Линейная алгебра

2. Определители

*Под **определителем** (детерминантом) понимают число, соответствующее квадратной матрице любого порядка и вычисленное по определенным правилам.*

Обозначают определитель матрицы **A:**

$\Delta \qquad \Delta(A) \qquad |A| \qquad \det A$

Определителем первого порядка называют число, соответствующее матрице 1-го порядка и равное:

$$\Delta = |a| = a$$

Определителем второго порядка называют число, соответствующее матрице второго порядка и равное:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Пример 1. Вычислить:

$$\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -5 \times 8 - (-6) \times 7 = -40 + 42 = 2$$

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix} = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Рассмотрим матрицу третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Минором $\mathbf{M_{ij}}$ *элемента* a_{ij} *матрицы* A *называется определитель, соответствующий матрице, полученной после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца в матрице A.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением *Aij элемента aij , матрицы A называется минор этого элемента, вычисленный по формуле:*

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

Например:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Пример 2. Найти алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \times M_{11} = +\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 7 = 41$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(40 - 7) = -33$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Определителем третьего порядка *называется число, равное сумме произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Или:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$$

Пример 3. Вычислить:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -33 - 3 = -36$$

Замечание

При вычислении определителя третьего порядка пользуются ***правилом Саррюса:***

К определителю приписывают два первых столбца: со знаком «+» берутся произведения трех элементов, стоящих на главной диагонали и на прямых, ей параллельной;

Со знаком «-» - произведения трех элементов, стоящих на побочной диагонали и прямых, ей параллельной.

Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} + \quad + \quad + \qquad\qquad - \quad - \quad - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 3 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 5 & 7 & 8 \end{array}\right. \end{array} =$$

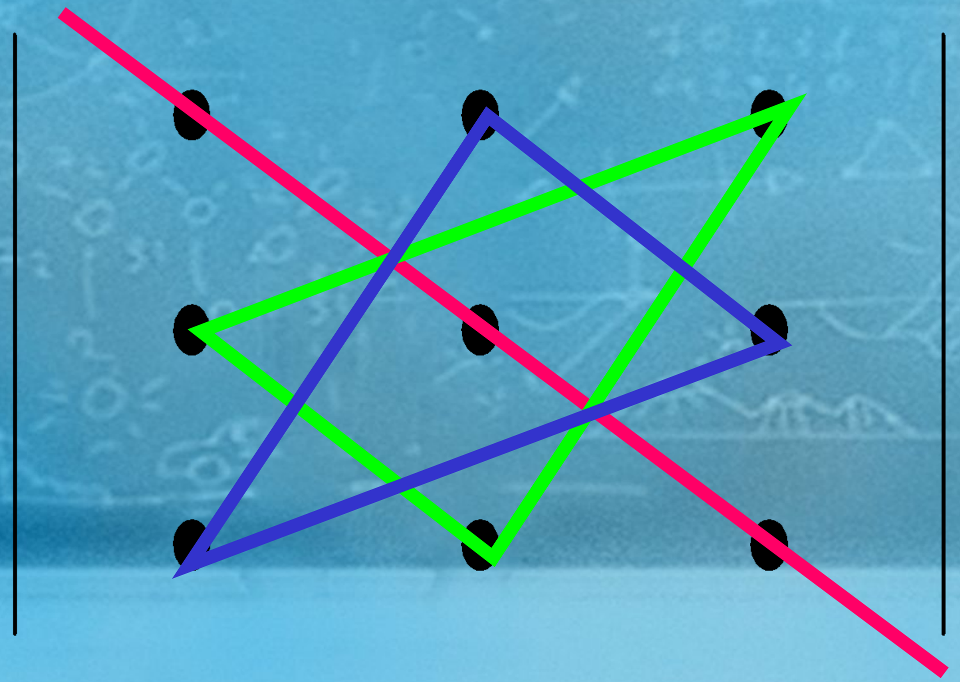
$$= 2\cdot9\cdot5 + 1\cdot3\cdot7 + 4\cdot6\cdot8 - 4\cdot9\cdot7 - 2\cdot3\cdot8 - 1\cdot6\cdot5 =$$

$$= 90 + 21 + 192 - 252 - 48 - 30 = -27$$

Этот же способ обычно называют «***методом треугольника***» и вычисления производят по следующей схеме:

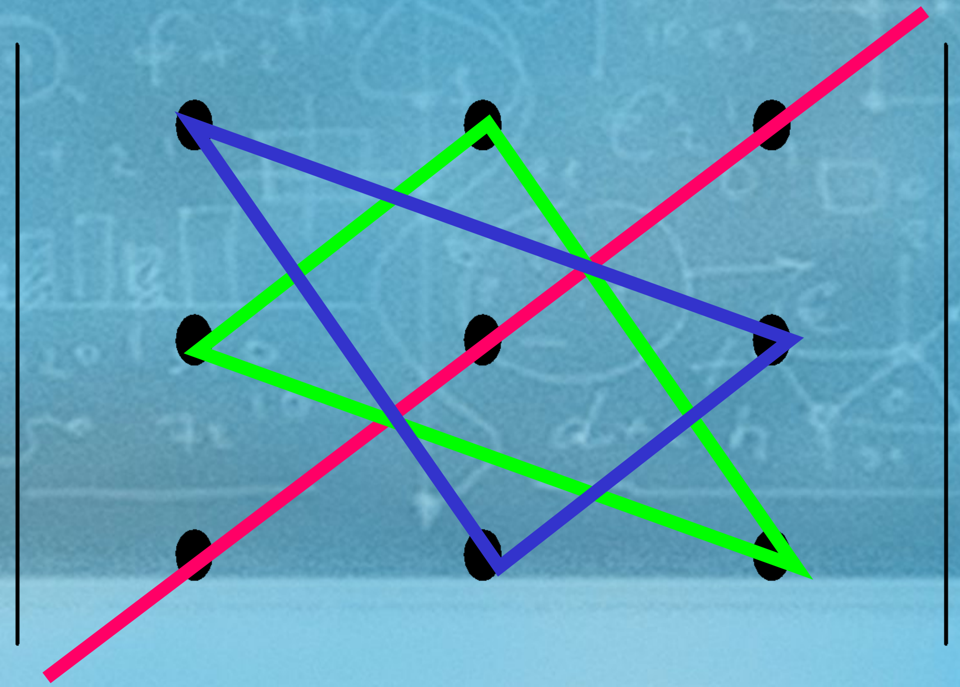
Со знаком «+»

(главная диагональ)



Со знаком «-»

(побочная диагональ)



Пример 4. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

Решение.

$\Delta = 3 \cdot 6 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \cdot 4 - 4 \cdot 6 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot (-2) =$

$= -36 + 100 - 15 + 10 = 59.$

Определителем n-го порядка *называется число, равное сумме произведений элементов строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

Свойства определителей

1. Определитель матрицы А равен определителю транспонированной матрицы

$$\mathit{det}\ \mathrm{A} = \mathit{det}\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$$

Таким образом, строки и столбцы определителя равноправны, все дальнейшие свойства справедливы как для строк, так и для столбцов определителя.

2. Перестановка двух соседних строк (столбцов) изменит знак определителя на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

3. Формула разложения определителя по любой строке *(столбцу)*.

Определитель равен алгебраической сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\Delta = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

4. Если две строки (столбца) определителя одинаковы, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix} = 0$$

5. Если элементы некоторой строки (столбца) умножить на одно и то же число *k,* то определитель умножится на это число. Другими словами, общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ... & ka_{in} \\ . & . & ... & . \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} . & . & ... & . \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ . & . & ... & . \end{vmatrix}$$

6. Если элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} . & . & \dots & . \\ a & b & \dots & c \\ ka & kb & \dots & kc \\ & & & \\ . & . & \dots & . \end{vmatrix} = 0$$

7. Если элементы некоторой строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, соответствующие строки которых состоят из этих слагаемых:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{vmatrix}$$

8. Если элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

9. Алгебраическая сумма произведений элементов некоторой строки (столбца) на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{sk} = 0, \text{ если } \mathrm{i} \neq \mathrm{s}$$

10. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число *k*.

Доказательство.

Пусть,
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot 0 = \Delta$$

Пример 5. Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение:

К первой строке прибавим третью, умноженную на (-4); ко второй строке прибавим третью, умноженную на (-2); полученный определитель разложим по первому столбцу, тогда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0A_{11} + 0A_{21} + 1A_{31} + 0A_{41} = 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -6 & -6 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)(-3)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(-1)2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Далее к первой и третьей строкам прибавим вторую, умноженную на (-2) и разложим по элементам первого столбца.

Получим:

$$\Delta = 6\begin{vmatrix} 0 & -7 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 6(-5)(-1)\begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 30(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -30(7-5) = -60$$

Пример 6. Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение.

Используем теорему Лапласа. Основные миноры образуем из третьей и четвертой строк. Очевидно, что здесь только один минор второго порядка M_{12}^{34} отличен от нуля, остальные равны нулю, дополнительный минор:

$$M_{34}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Получим:

$$\Delta = (-1)^{3+4+1+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 45 \times 2 = 90$$

Пример 7. Вычислить

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение.

Преобразуем определитель так, чтобы все миноры второго порядка в первых двух строках равнялись нулю. Прибавим к третьему столбцу первый, умноженный на (-4), к четвертому - второй, умноженный на (-2).

Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & 12 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times (-31).$$