

Понятия о многогранном угле, геометрическом теле

Цели обучения:

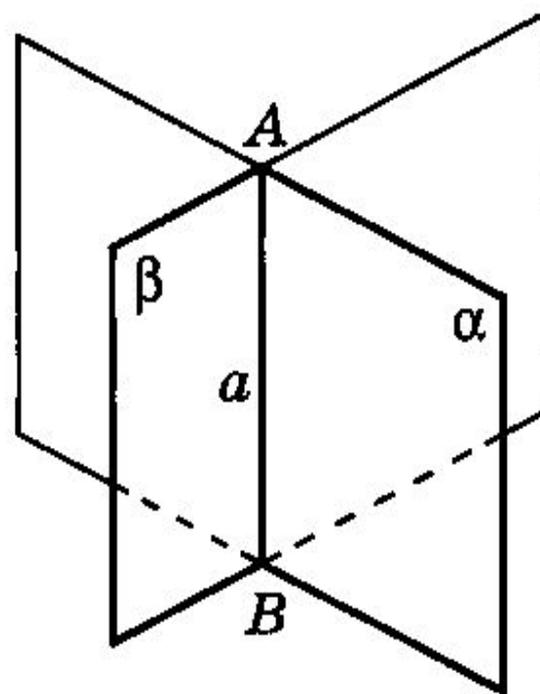
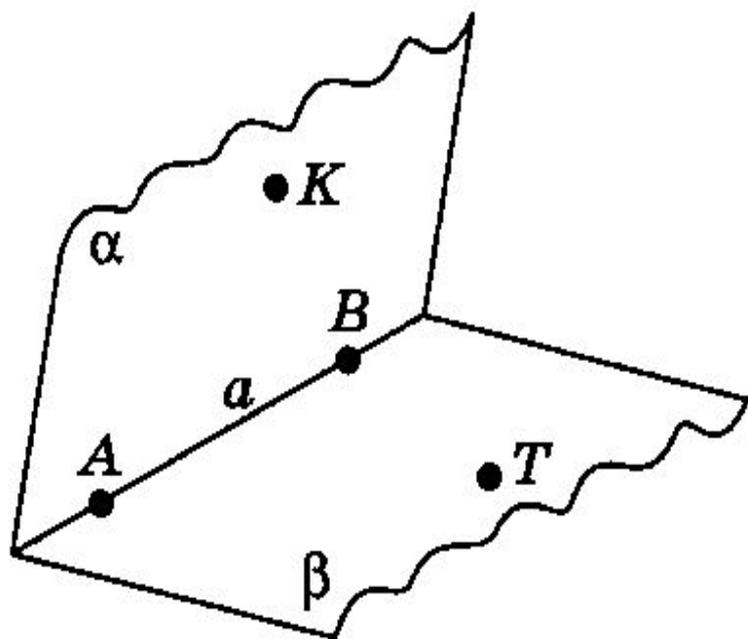
11.1.1

- знать понятие многогранного угла и геометрического тела;
- уметь изображать их на плоскости;

Какие фигуры изображены на картинке?

Как они расположены?

Где расположены точки A , B , K , T ?



Составьте определение из ЭТИХ КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ

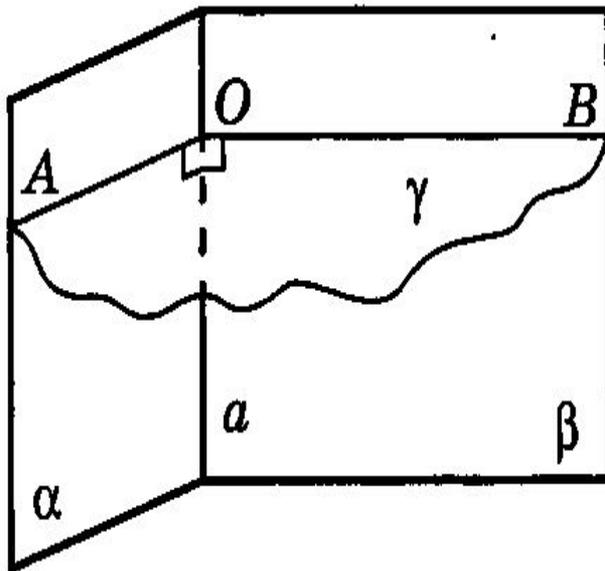
- Прямая,
- граница,
- Общая,
- ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Определение

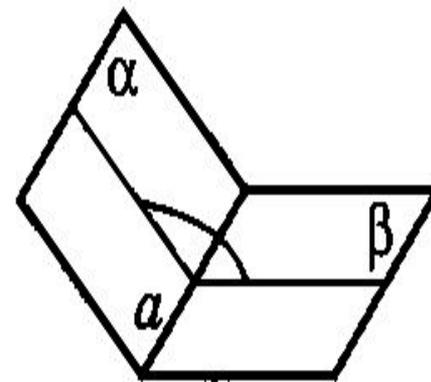
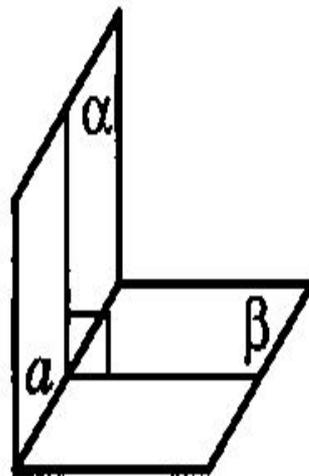
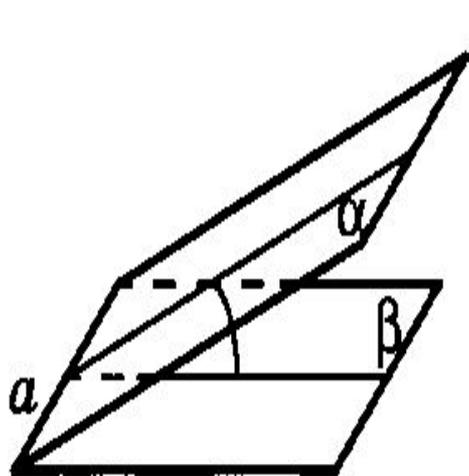
Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его *гранями*, прямая a –общая граница полуплоскостей - называется *ребром* двугранного угла.

Двугранный угол с гранями α , β и ребром a обозначают $\alpha a \beta$.

Определение. Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

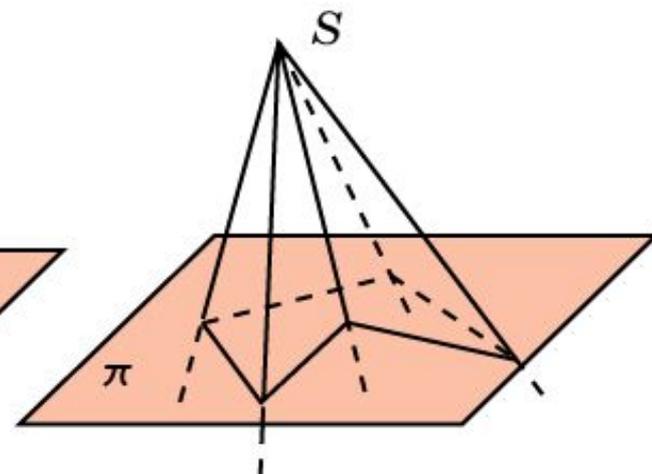
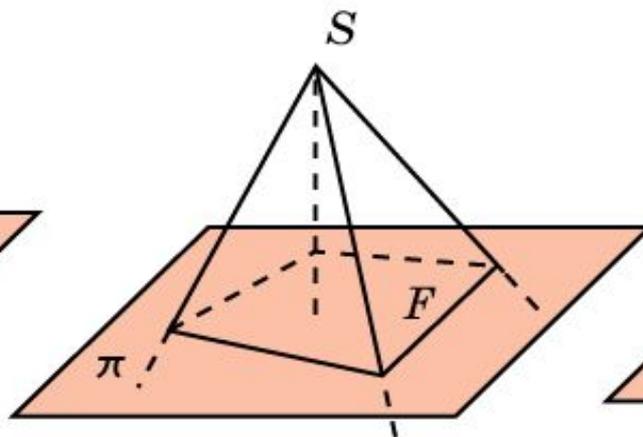
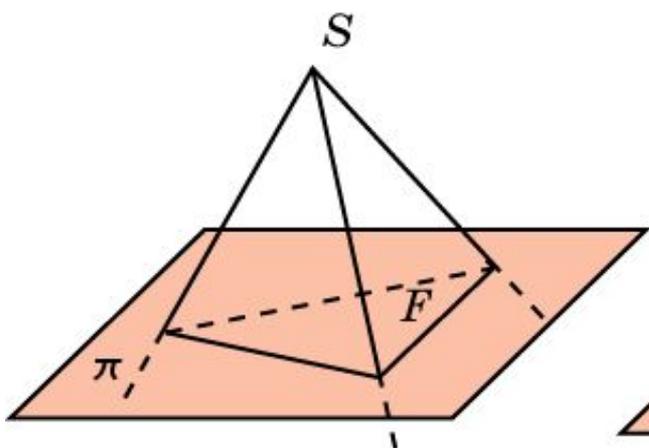


Двугранный угол является *острым*, *прямым* или *тупым*, если его линейный угол соответственно острый, прямой или тупой.



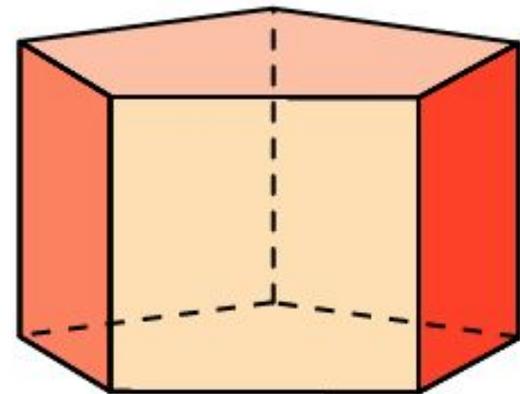
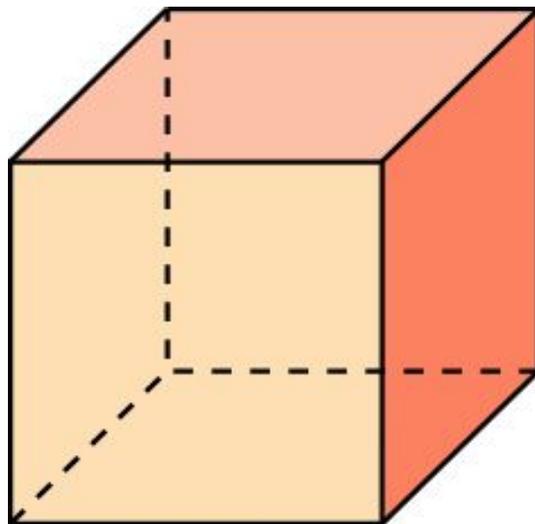
МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

В зависимости от числа граней многогранные углы бывают трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т. д.



Измерение многогранных углов

Поскольку градусная величина развернутого двугранного угла измеряется градусной величиной соответствующего линейного угла и равна 180° , то будем считать, что градусная величина всего пространства, которое состоит из двух развернутых двугранных углов, равна 360° . Величина многогранного угла, выраженная в градусах, показывает какую часть пространства занимает данный многогранный угол. Например, трехгранный угол куба занимает одну восьмую часть пространства и, значит, его градусная величина равна $360^\circ : 8 = 45^\circ$. Трехгранный угол в правильной n -угольной призме равен половине двугранного угла при боковом ребре. Учитывая, что этот двугранный угол равен $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, получаем, что трехгранный угол призмы равен $\frac{90^\circ(n-2)}{n}$.



Упражнение 1

Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами:

а) 30° , 60° , 20° ; б) 45° , 45° , 90° ; в) 30° , 45° , 60° ?

Ответ: а) Нет; б) нет; в) да.

Упражнение 2

Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80° . В каких границах находится третий плоский угол?

Ответ: $10^\circ < \phi < 150^\circ$.

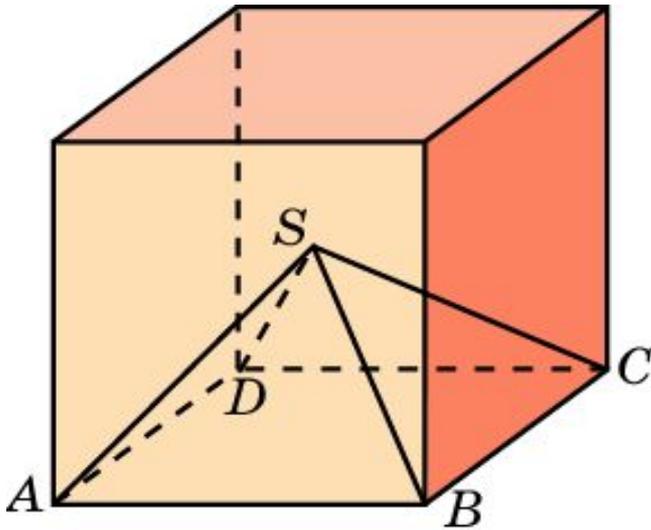
Упражнение 3

В трехгранном угле два плоских угла равны по 45° ; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

Ответ: 60° .

Упражнение 4

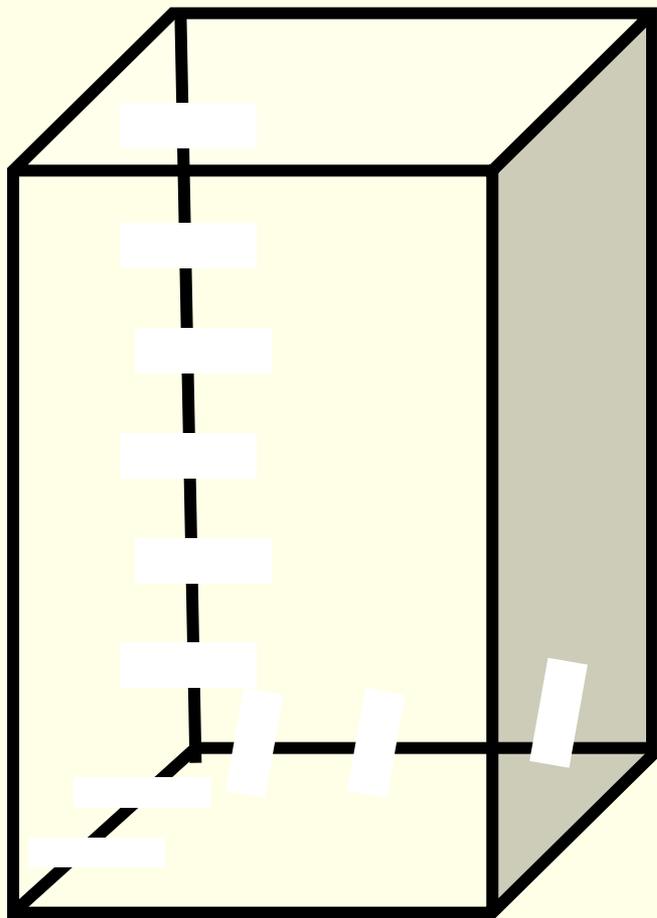
В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 2 см, высота 1 см. Найдите четырехгранный угол при вершине этой пирамиды.



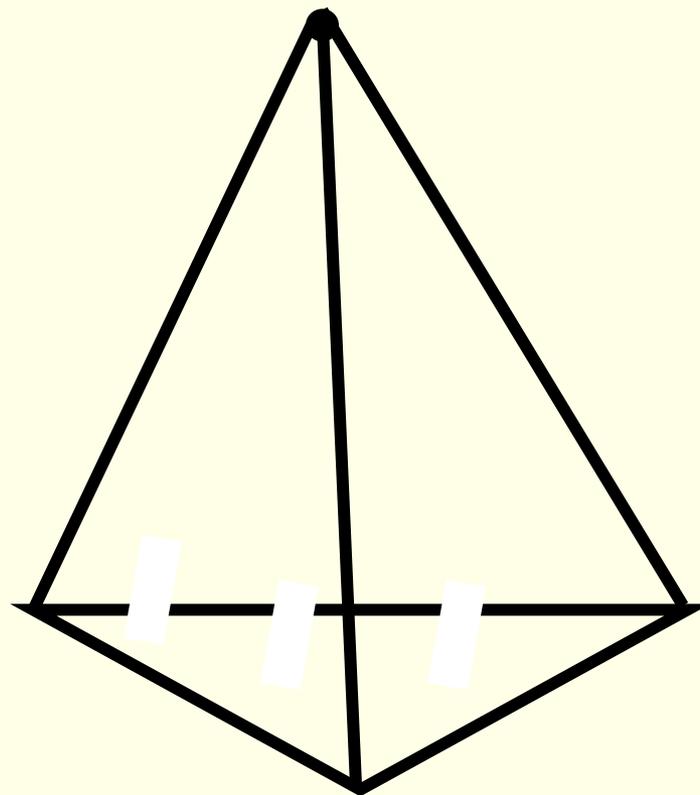
Решение: Указанные пирамиды разбивают куб на шесть равных пирамид с вершинами в центре куба. Следовательно, 4-х гранный угол при вершине пирамиды составляет одну шестую часть угла в 360° , т.е. равен 60° .

Ответ: 60° .

ПАРАЛЛЕЛЕПЕД



ТЕТРАЭДР

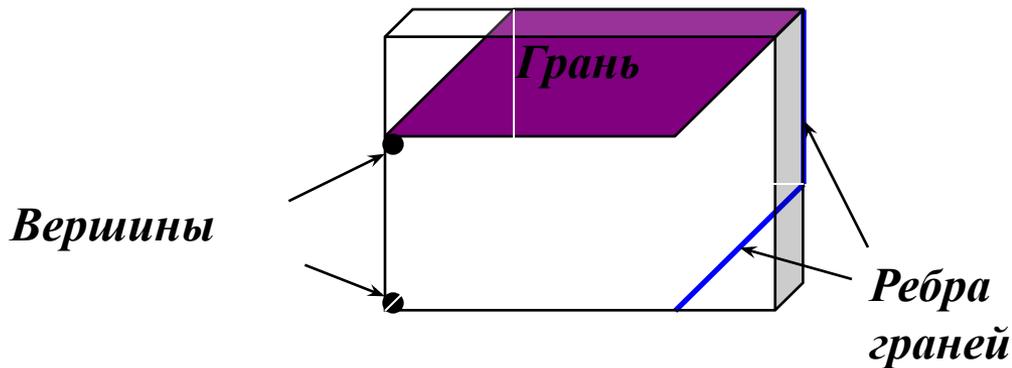


Компоненты многогранника

Общую часть плоскости многоугольника и поверхности выпуклого многогранника называют *гранью* многогранника.

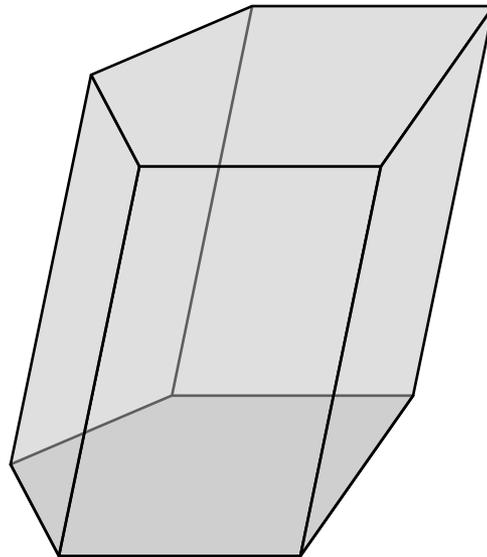
Стороны граней- называются *ребрами многогранника*

Вершины граней- называются *вершинами многогранника*



Призма

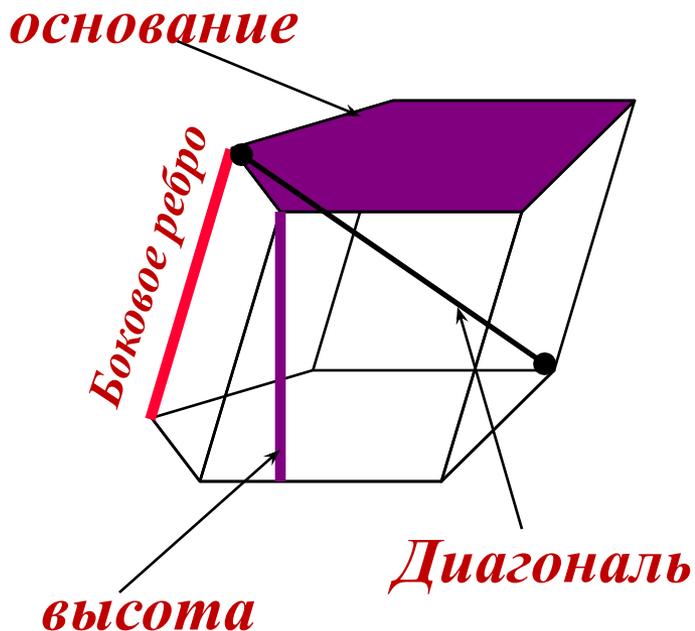
Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.



Элементы призмы

Многоугольники являются *основания призмы*

Отрезки, соединяющие соответствующие вершины оснований называются *боковыми ребрами призмы*.

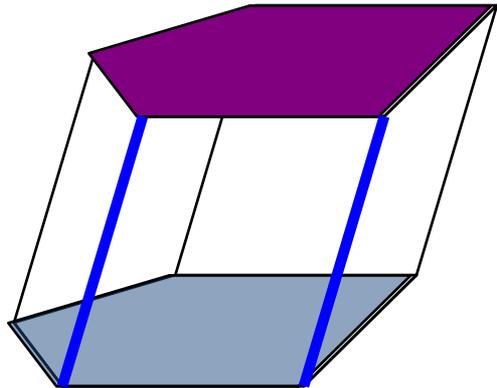


Высота призмы - расстояние между плоскостями оснований призмы.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю призмы*.

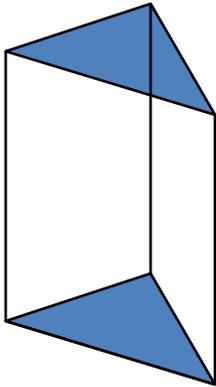
Основные свойства призмы:

- ⇒ *основания равны*
- ⇒ *основания лежат в параллельных плоскостях*
- ⇒ *боковые ребра параллельны и равны*

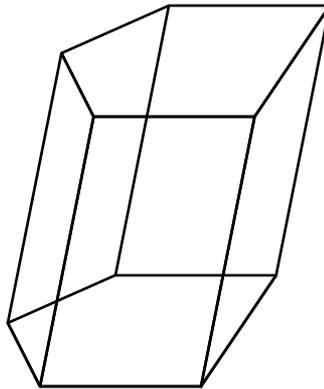


Виды призм

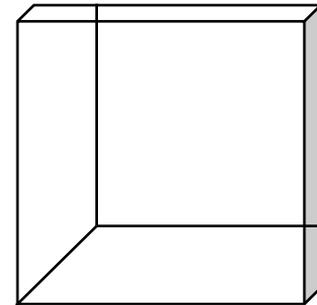
Прямая призма-
боковые ребра
перпендикулярны
основаниям.



**Наклонная
призма-** боковые
ребра не
перпендикулярны
основаниям.

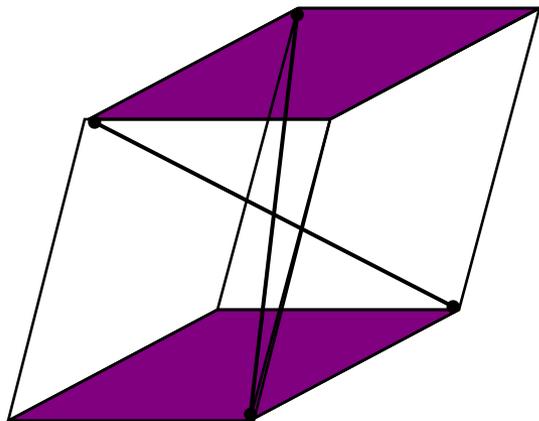


Правильная призма-
прямая призма,
основания которой
правильные
многоугольники.



Свойства параллелепипеда :

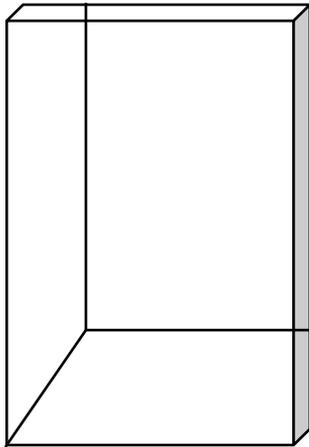
- *У параллелепипеда противоположные грани параллельны и равны.*
- *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.*



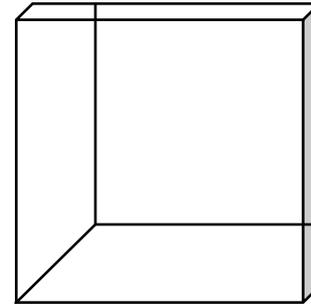
- *Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.*

Виды параллелепипеда.

Прямоугольный параллелепипед - *прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник.*

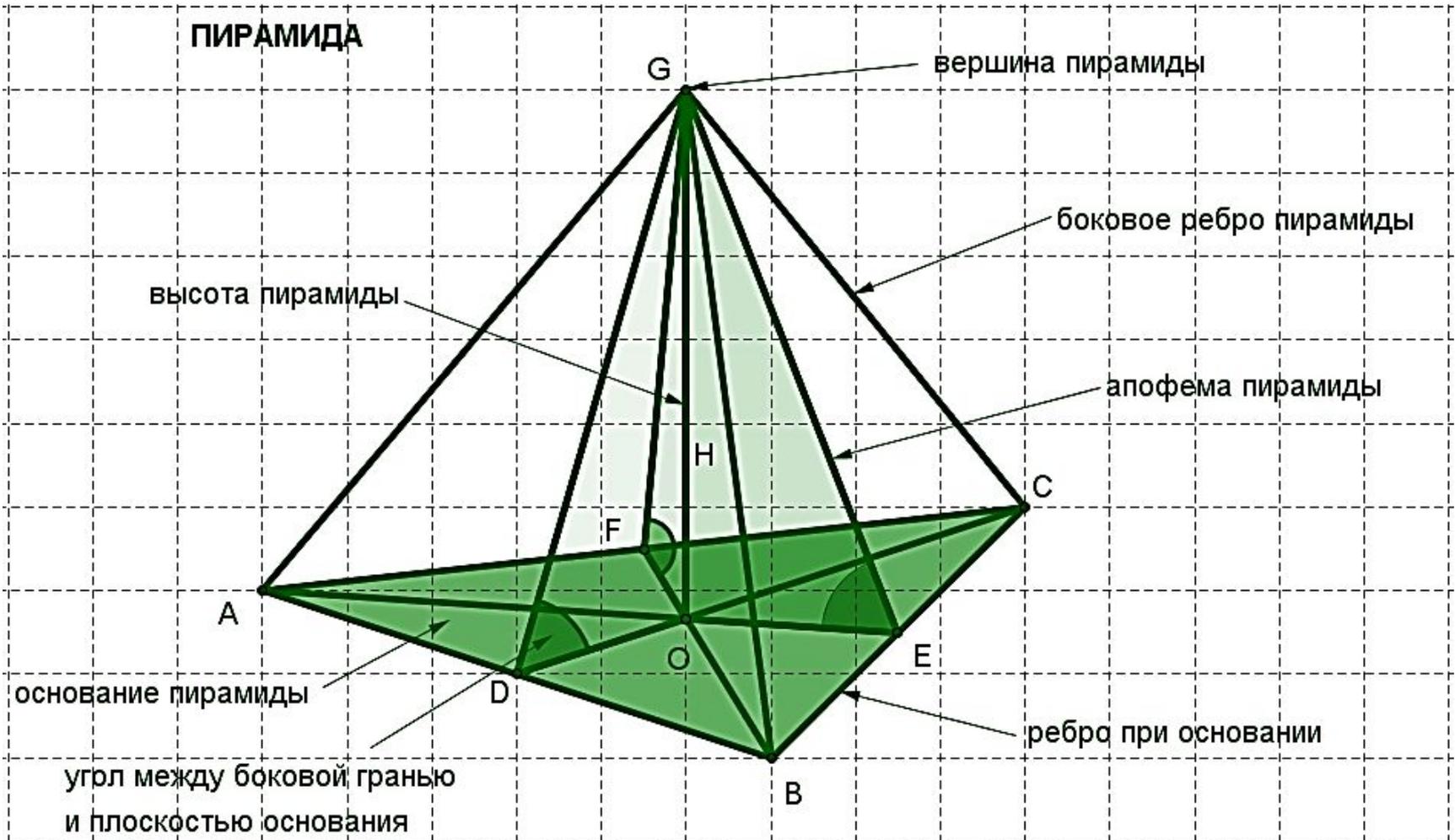


Куб – *прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны.*



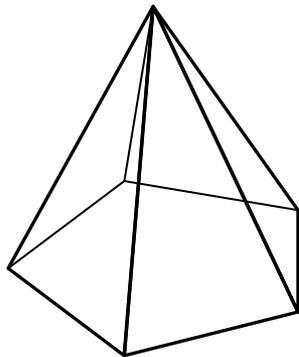
Пирамида

Пирамидой называется многогранник, который состоит из ОСНОВАНИЯ пирамиды (плоского многоугольника), ВЕРШИНЫ пирамиды и всех отрезков, соединяющих их.

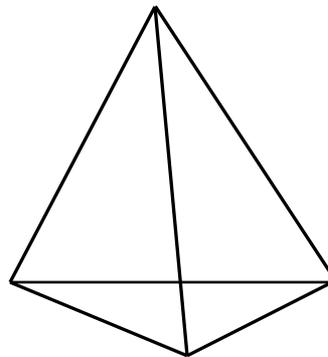


Виды пирамиды

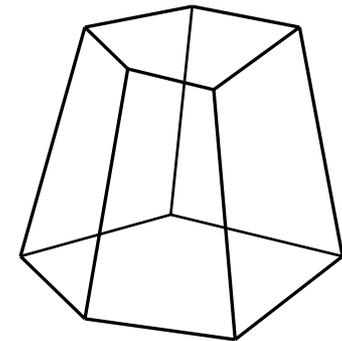
*Пирамида называется **n-угольной** если ее основанием является **n-угольник**.*



***Правильная пирамида** – основания **правильные многоугольники**, а **основание высоты совпадает с центром этого многоугольника**.*



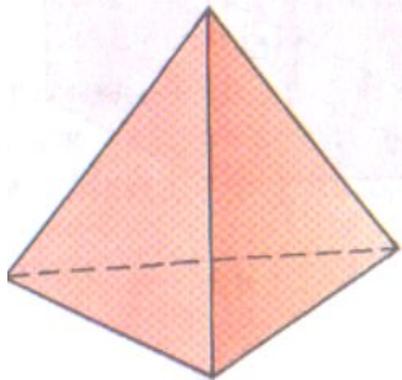
Усеченная пирамида** – **многогранник**, полученный при **пересечении пирамиды плоскостью**, **параллельной основанию** и **пересекающей ее боковые ребра



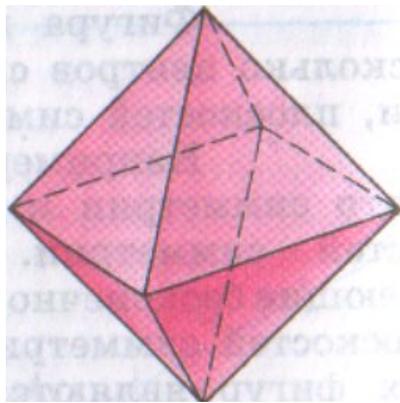
Дворец мира и согласия — здание пирамидальной формы, созданное архитектором сэром Норманом Фостером в Нур-Султане, столице Казахстана, специально для проведения «Конгресса лидеров мировых и традиционных религий». Она заключает в себе пропорции золотого сечения: грани основания имеют длину 62 метра, и высота равна 62 метрам. Площадь боковой поверхности пирамиды равна(15376 м²)



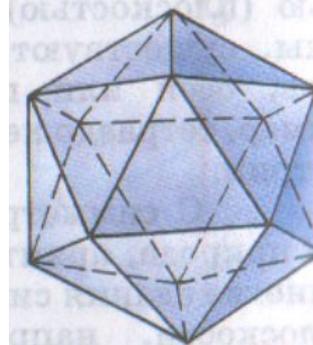
Правильные многогранники



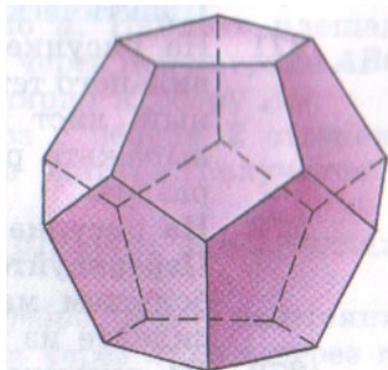
Тетраэдр



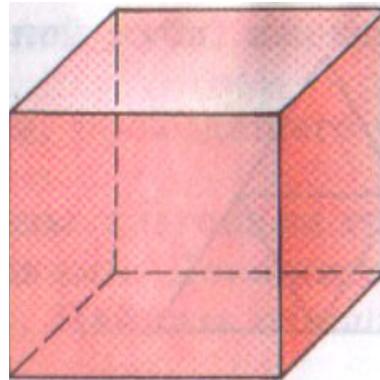
Октаэдр



Икосаэдр



Додекаэдр



Куб

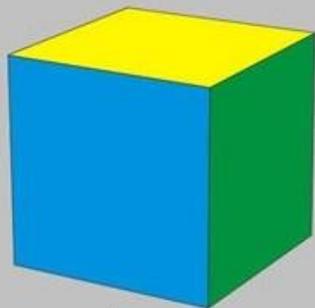
Теорема Эйлера

Число граней + число вершин – число ребер = 2.

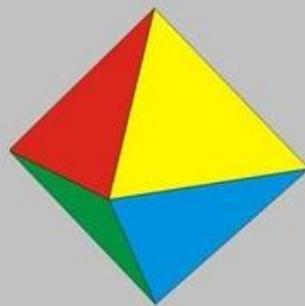
Правильные многогранники	тетраэдр	октаэдр	икосаэдр	додекаэдр	куб
Число граней	4	8	20	12	6
Число вершин	4	6	12	20	8
Число ребер	6	12	30	30	12



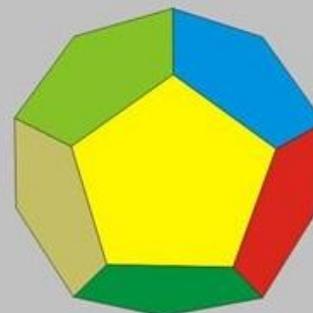
тетраэдр



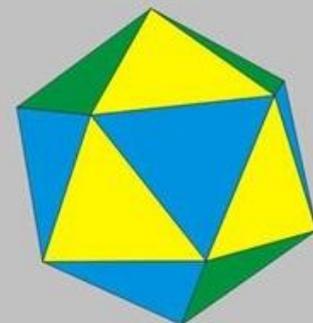
куб



октаэдр



додекаэдр



икосаэдр

Теорема Эйлера:

Выпуклый многогранник

Теорема Эйлера для призм:

$$(B + \Gamma - P) = 2$$

Ребра: $3n$

Вершины: $2n$

Грани: $n + 2$

Диагонали: $n \cdot (n - 3)$

Теорема Эйлера для пирамид:

$$(B + \Gamma - P) = 2$$

Ребра: $2n$

Вершины: $n + 1$

Грани: $n + 1$

№1.

В данном геометрическом теле три ребра обозначьте как a , b , c ,

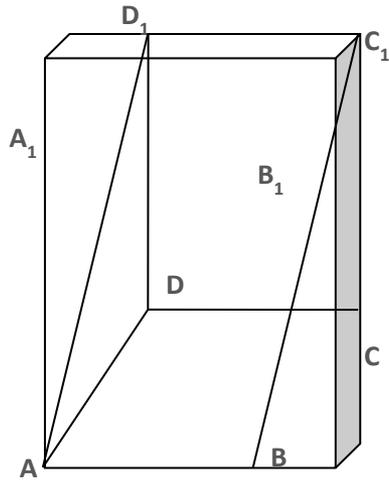
а) покажите, что диагональ вычисляется по формуле:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

б) Вычислите диагонали геометрического тела.

с) если $a=3\text{см}$, $b=5\text{см}$ и $c=4\text{см}$, найдите значение d .

№2. Высота прямоугольного параллелепипеда равна 8 см, а стороны основания равны – 5 см и 6 см. Найдите площадь сечения, проходящего через меньшую сторону нижнего основания и противоположную ей сторону верхнего основания.



Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед;

$AB = 5$ см; $BC = 6$ см; $A_1 A = 8$ см

Найти: $S_{ABC_1 D_1}$.

Решение: по теореме о трех перпендикулярах:
если $AB \perp AD$, то $AB \perp D_1 A$ и $AB \perp C_1 B \Rightarrow AD_1 C_1 B$
– прямоугольник,

$$D_1 A = C_1 B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

$$S_{\text{сечения}} = AB \cdot C_1 B = 5 \cdot 10 = 50.$$

Ответ: 50 см².

3. В прямой треугольной призме стороны основания равны – 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы равна 18 см. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и меньшую высоту основания.

Решение: по теореме о трех перпендикулярах:
если $AB \perp AD$, то $AB \perp D_1A$ и $AB \perp C_1B \Rightarrow AD_1C_1B$
– прямоугольник,

$$D_1A = C_1B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

$$S_{\text{сечения}} = AB \cdot C_1B = 5 \cdot 10 = 50.$$

Ответ: 50 см².

Решение задач

4. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетом 5 см и гипотенузой 13 см. Диагональ боковой грани, содержащей наибольший катет треугольника, равна

$4\sqrt{13}$ см. Найдите высоту призмы.

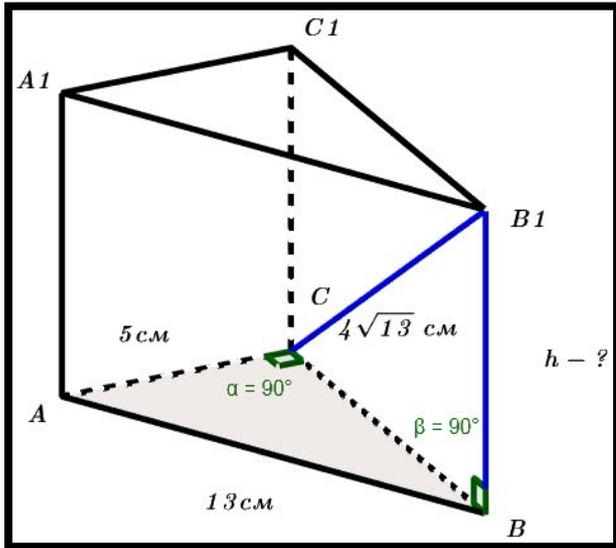
Решение:

Решение: по теореме о трех перпендикулярах:
если $AB \perp AD$, то $AB \perp D_1A$ и $AB \perp C_1B \Rightarrow AD_1C_1B$ – прямоугольник,
 $D_1A = C_1B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
 $S_{\text{сечения}} = AB \cdot C_1B = 5 \cdot 10 = 50$.

Ответ: 50 см².

Решение: по теореме о трех перпендикулярах:
если $AB \perp AD$, то $AB \perp D_1A$ и $AB \perp C_1B \Rightarrow AD_1C_1B$ – прямоугольник,
 $D_1A = C_1B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
 $S_{\text{сечения}} = AB \cdot C_1B = 5 \cdot 10 = 50$.

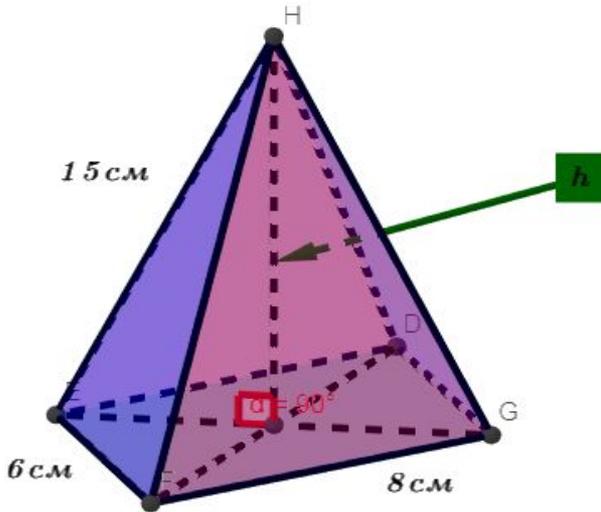
Ответ: 50 см².



Ответ: 8 см

Решение задач

5. Основание пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, а боковые рёбра равны 15 см. Найдите высоту пирамиды.



Решение:

Решение: по теореме о трех перпендикулярах:
если $AB \perp AD$, то $AB \perp D_1A$ и $AB \perp C_1B \Rightarrow AD_1C_1B$ – прямоугольник,

$$D_1A = C_1B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$
$$S_{\text{сечения}} = AB \cdot C_1B = 5 \cdot 10 = 50.$$

Ответ: 50 см².

Решение: по теореме о трех перпендикулярах:
если $AB \perp AD$, то $AB \perp D_1A$ и $AB \perp C_1B \Rightarrow AD_1C_1B$ – прямоугольник,

$$D_1A = C_1B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$
$$S_{\text{сечения}} = AB \cdot C_1B = 5 \cdot 10 = 50.$$

Ответ: 50 см².

Решение: по теореме о трех перпендикулярах:
если $AB \perp AD$, то $AB \perp D_1A$ и $AB \perp C_1B \Rightarrow AD_1C_1B$ – прямоугольник,
 $D_1A = C_1B = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$
 $S_{\text{сечения}} = AB \cdot C_1B = 5 \cdot 10 = 50.$