

# Лекция 10. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

1. Основные положения электромагнитной теории Максвелла.
2. Вихревое электрическое поле.
3. Ток смещения.
4. Закон полного тока.
5. Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

Понимать означает всегда только одно:  
познавать взаимосвязи...

*В. Гейзенберг*

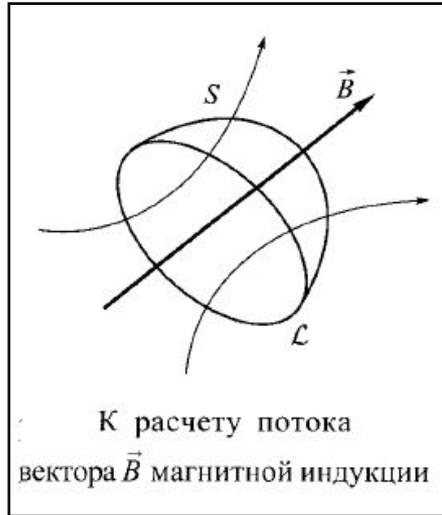
В физике... нет места для путаных мыслей...  
Действительно понимающие природу того или  
иного явления должны получать основные  
законы из соображений размерности.

*Э. Ферми*



**Максвелл Джеймс Клерк** (1831 – 1879) – английский физик, член Эдинбургского (1855) и Лондонского (1861) королевских обществ с 1871 г. – первый профессор экспериментальной физики в Кембридже. Работы посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статистике, оптике, механике, теории упругости. Самым большим научным достижением Максвелла является созданная им в 1860 – 1865 теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений

# Вихревое электрическое поле



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Возникающая в контуре ЭДС может быть представлена как циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  некоторого электрического поля по замкнутому контуру  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{E}_i = \oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_B d\vec{l}.$$

Аналогия – вращение воды в сливающейся ванне.

Тогда 
$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Для электростатического пог

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E}_Q d\vec{l} = 0.$$

Силовыми линиями электрического поля  $\vec{E}_B$  являются замкнутые линии, т. е. электрическое поле имеет вихревую структуру, поэтому такое поле получило название *вихревого электрического поля*.

Таким образом, в природе существуют электрические поля двух видов: электростатическое  $\vec{E}_Q$  и вихревое  $\vec{E}_B$ .

Согласно принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_B$ .

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Закон Фарадея

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S}$$

Теорема Стокса

$$\int_S \text{rot } \vec{E} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

**Вихревое электрическое поле возникает  
при изменении магнитного поля**

# Токи Фуко.

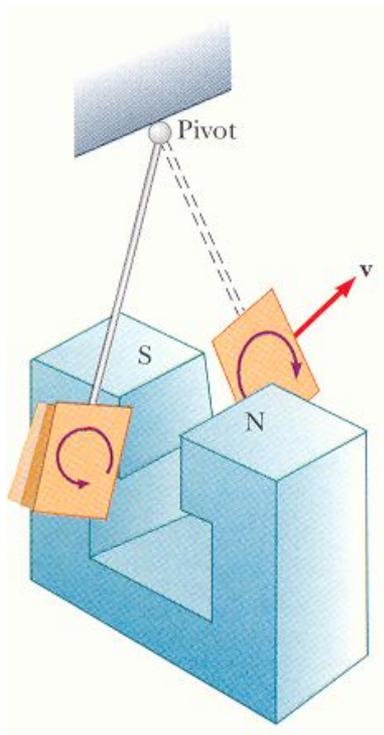
**Переменный магнитный поток** индуцирует ЭДС и ток в контуре.

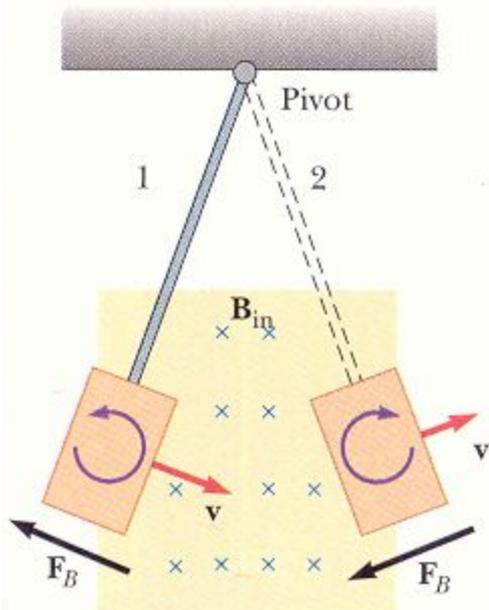
В массивных металлических пластинах, движущихся в магнитном поле, индуцируются вихревые токи, называемые **токами Фуко**.

Эти токи являются результатом перемещения **свободных электронов** в пластинах.

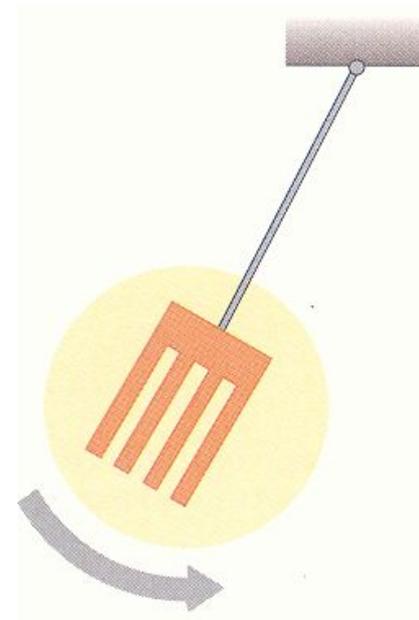
Направление вихревых токов таково, что они создают магнитные поля, противодействующие изменениям, вызванным токами (правило Ленца).

**Возникающие силы** взаимодействия двух полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{J}$ ) тормозят движение пластины.





**Силы, действующие на пластину, направлены в сторону, противоположную направлению ее движения. В результате колебательное движение пластины затухает.**



**Если в проводящей пластине есть прорези (щели), то вихревые токи более слабые и пластина движется в магнитном поле свободнее.**

Вихревое электрическое поле в бетатроне из-за изменения магнитного поля

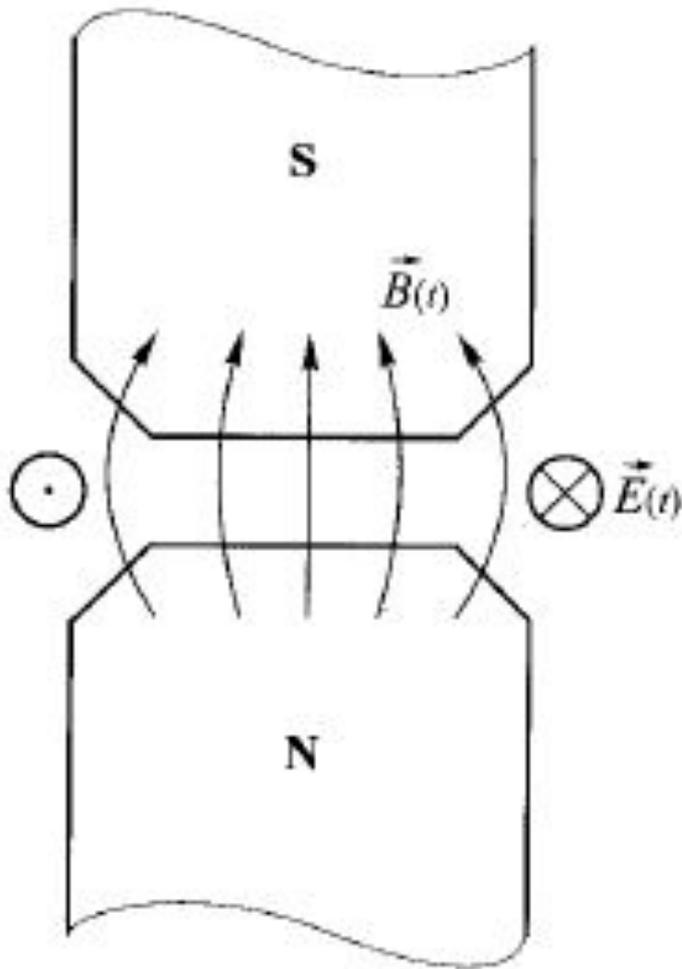


Схема бетатрона

$$m \frac{v^2(t)}{R} = F_B(t),$$

$$F_B(t) = qv(t)B(t),$$

$$m \frac{v^2(t)}{R} = qv(t)B(t)$$

$$v(t) = \frac{q}{m} RB(t).$$

$$2\pi RE(t) = \pi R^2 \dot{B}_{\text{ср}}(t),$$

Циркуляция вектора  $\mathbf{E}$


$$m\dot{v}(t) = qE(t) = \frac{qR\dot{B}_{\text{ср}}(t)}{2},$$

Сила после подстановки  $E$

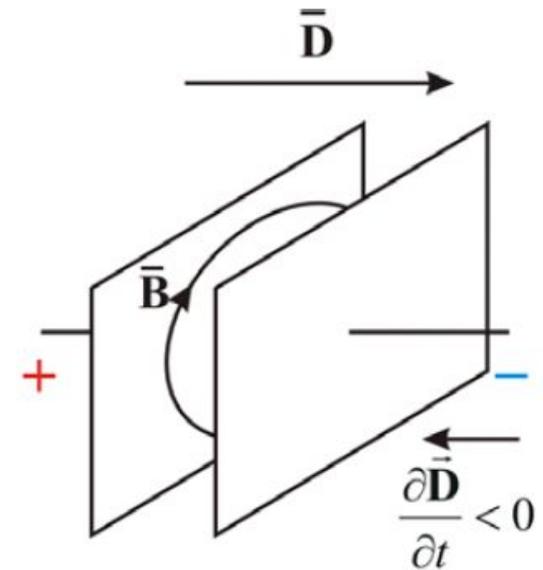
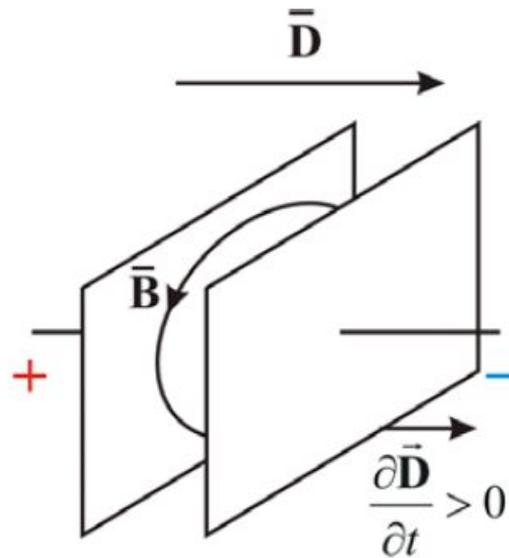
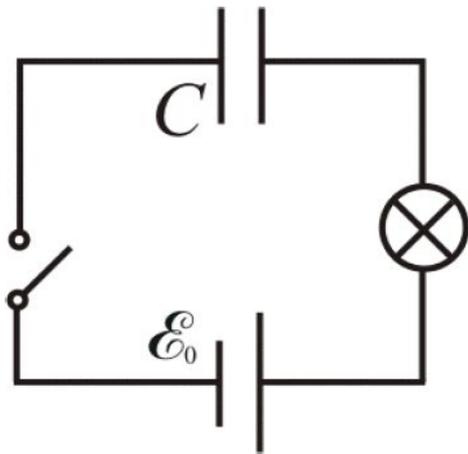
$$\dot{v}(t) = \frac{qE(t)}{m} = \frac{q}{2m} R\dot{B}_{\text{ср}}(t).$$

Ускорение  
частицы

Увеличением  $B$  (тока в катушках) производим ускорение частиц на определенном радиусе  $R$

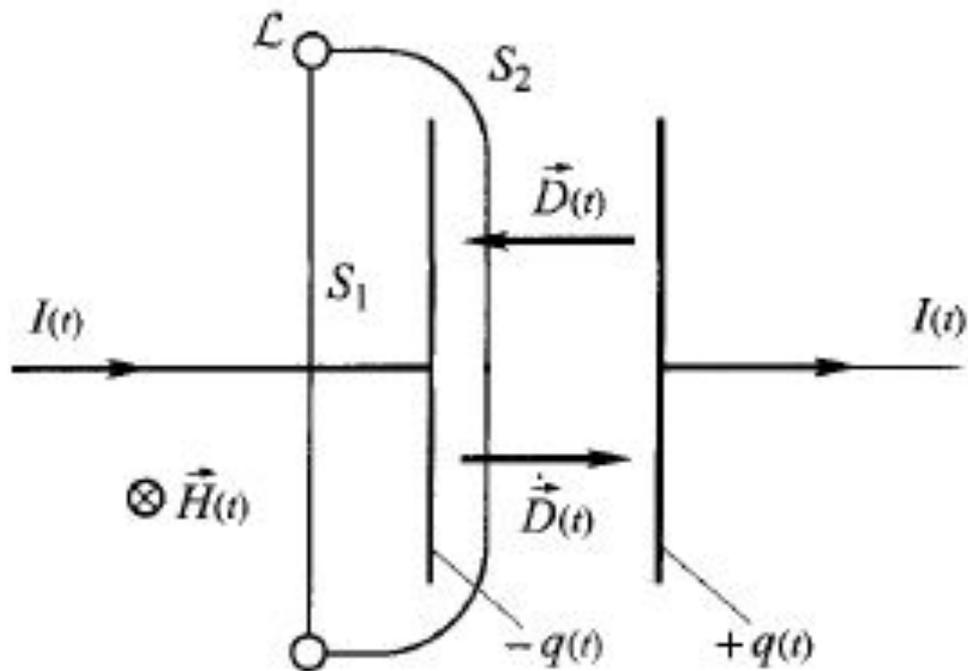
# ТОК СМЕЩЕНИЯ

В 1861 г. Дж. Максвелл сформулировал гипотезу о существовании в природе *тока смещения*, который, так же, как и ток проводимости, создает в окружающем пространстве магнитное поле.



Максвелл сделал вывод: всякое переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле.

Токи проводимости в проводнике замыкаются токами смещения в диэлектрике или в вакууме. Переменное электрическое поле в конденсаторе создает такое же магнитное поле, как если бы между обкладками существовал ток проводимости, имеющий величину равную току в металлическом проводнике.



$$I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k I_k$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \sum_k I_k$$

Для поверхности  $S_1$

Для поверхности  $S_2$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_1} \text{rot } \vec{H} d\vec{S}_1 = I(t),$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S_2} \text{rot } \vec{H} d\vec{S}_2 = 0, \quad D = \sigma = \frac{q}{S_k}$$

Для поверхности  $S_2$  вводится ток  
смещения

$$S_k \frac{dD}{dt} = \frac{dq}{dt}, \quad I_{\text{см}} = S_k \frac{dD}{dt}.$$

Плотность тока смещения:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

# Рисунок из БКФ

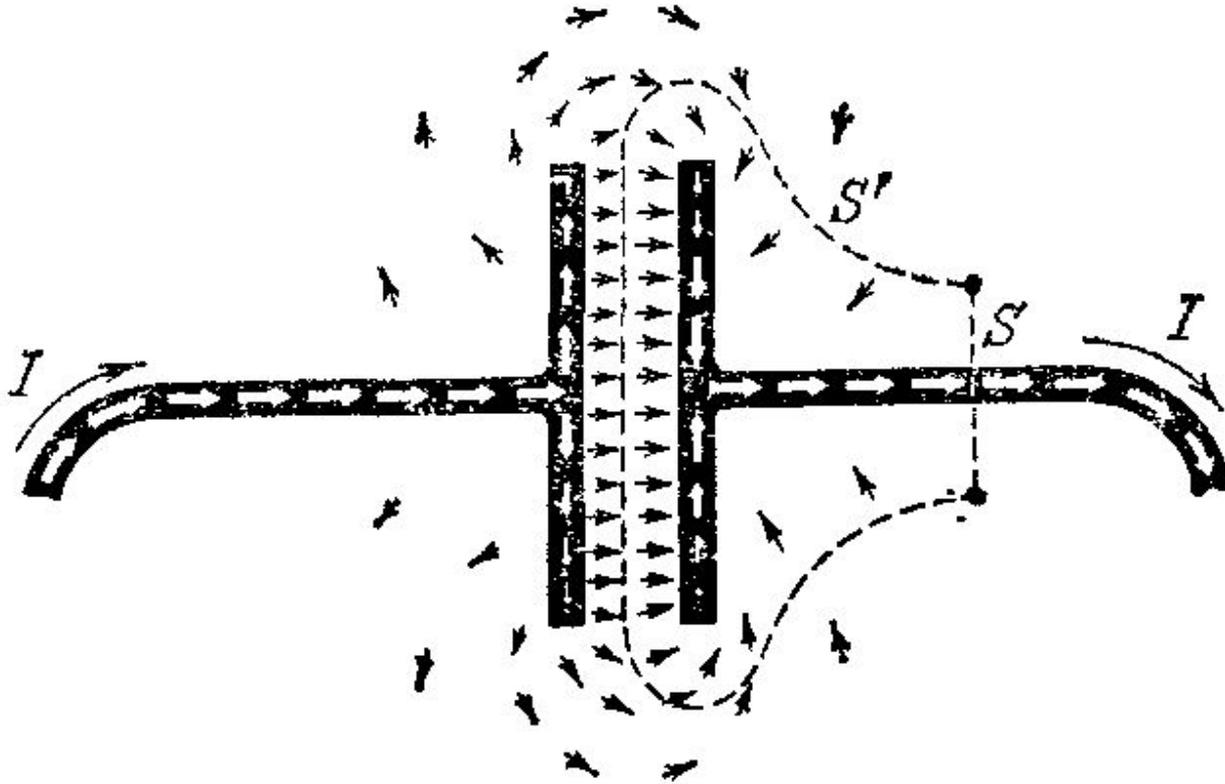


Рис 7.30. Ток проводимости (белые стрелки) и ток смещения (черные стрелки).

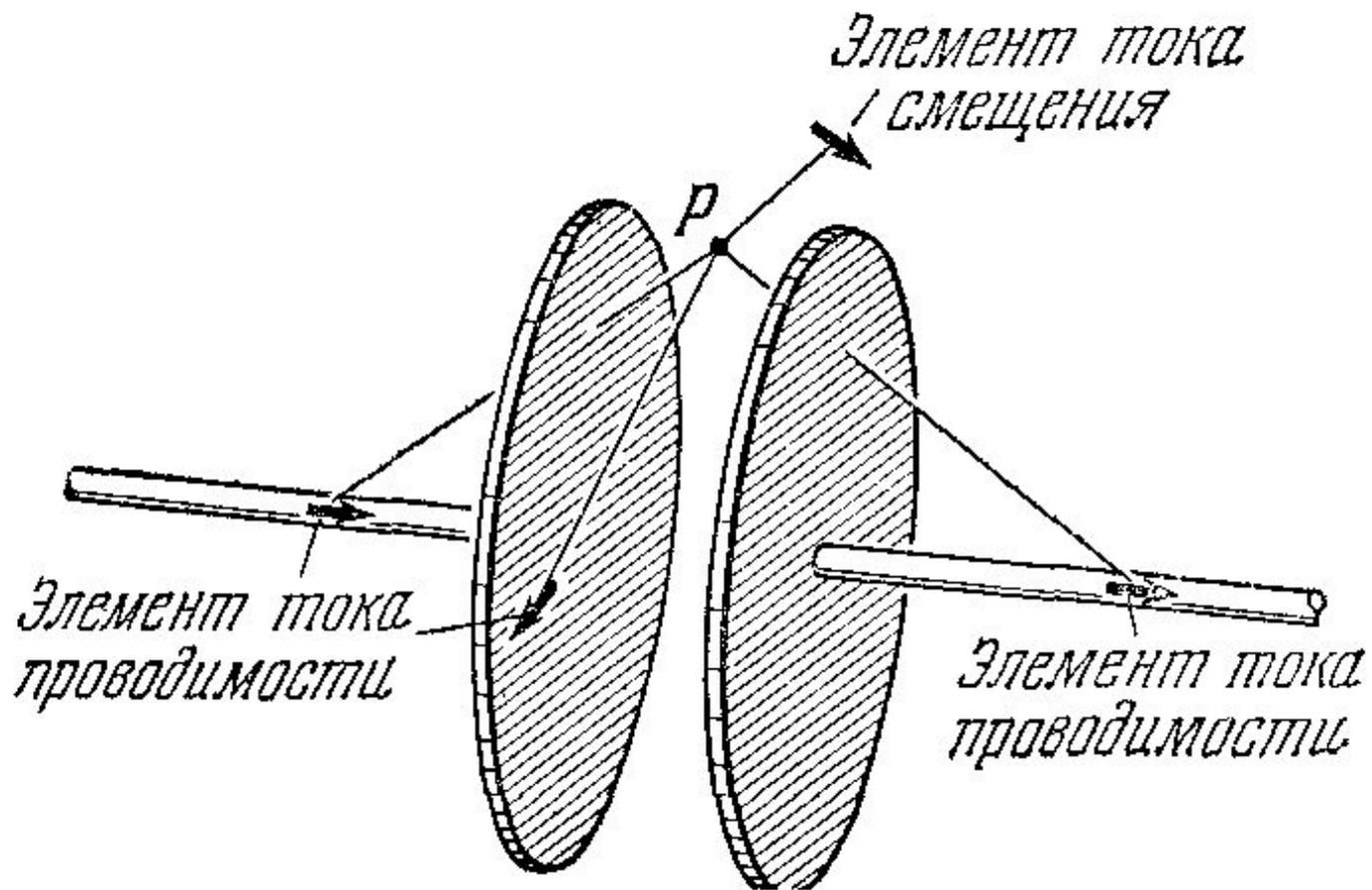
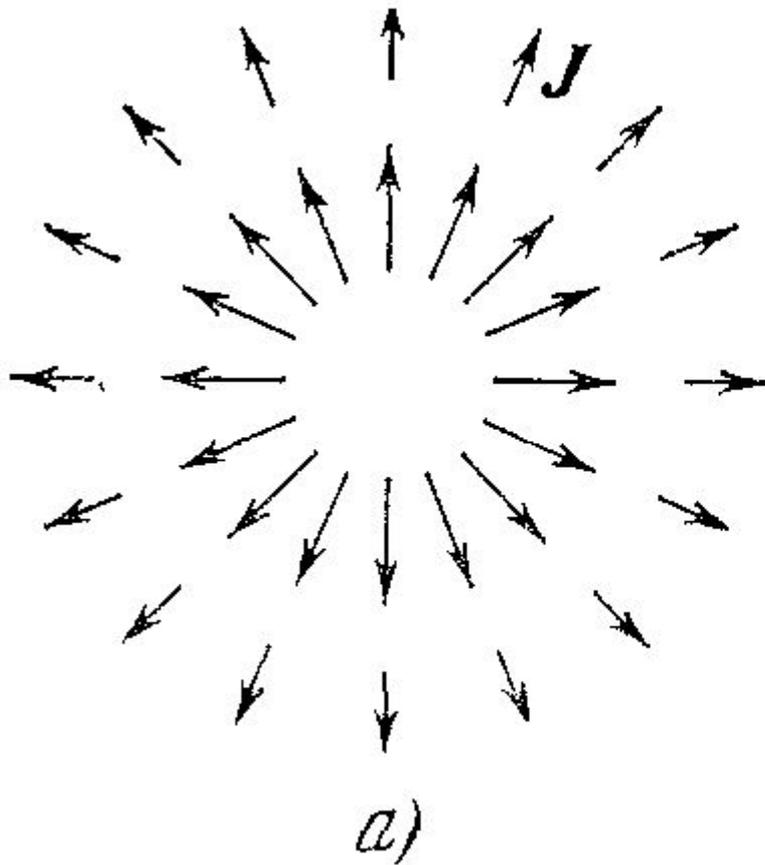
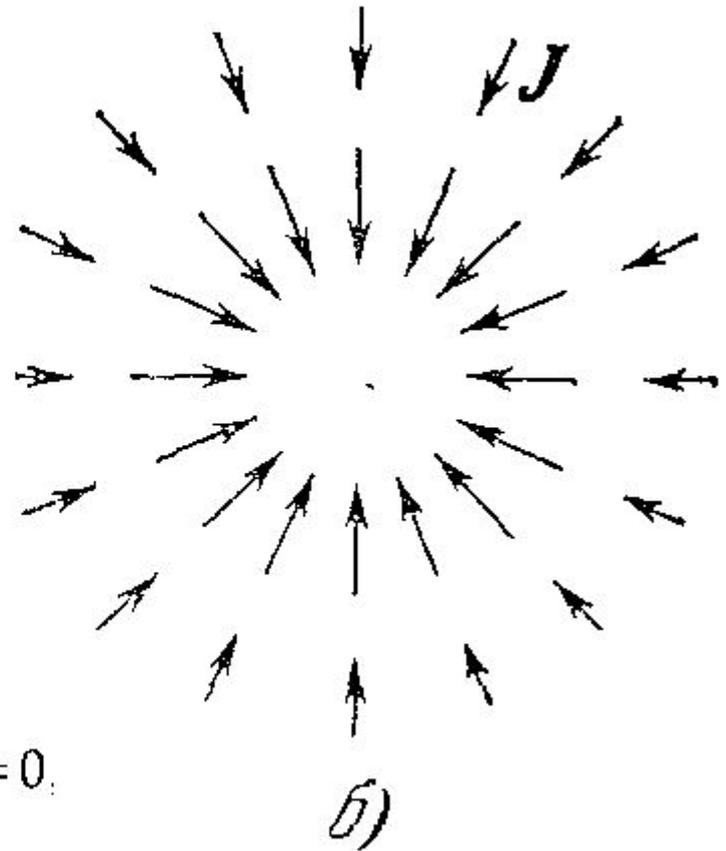


Рис. 7.31. В медленно изменяющихся полях полный вклад в магнитное поле в любой точке от всех токов смещения равен нулю. Магнитное поле в точке  $P$  может быть вычислено по закону Био — Савара, применяемому только к элементам тока проводимости.

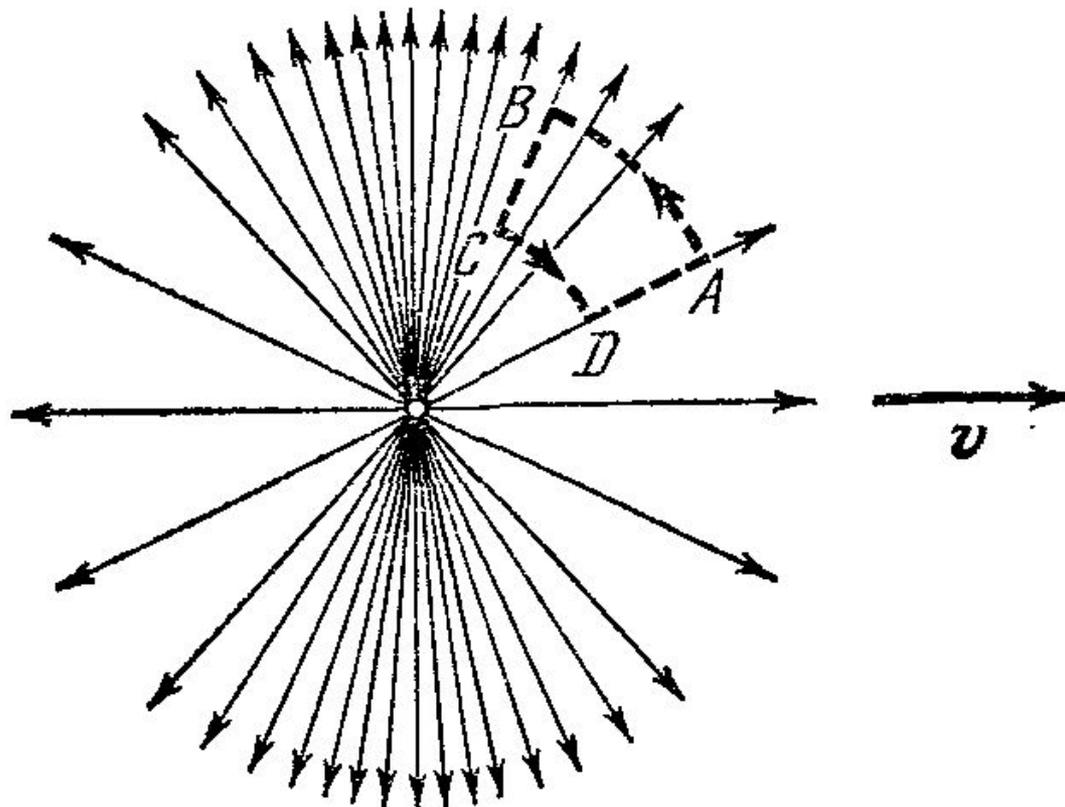
# Рисунки из БКФ



rot  $J=0$ .

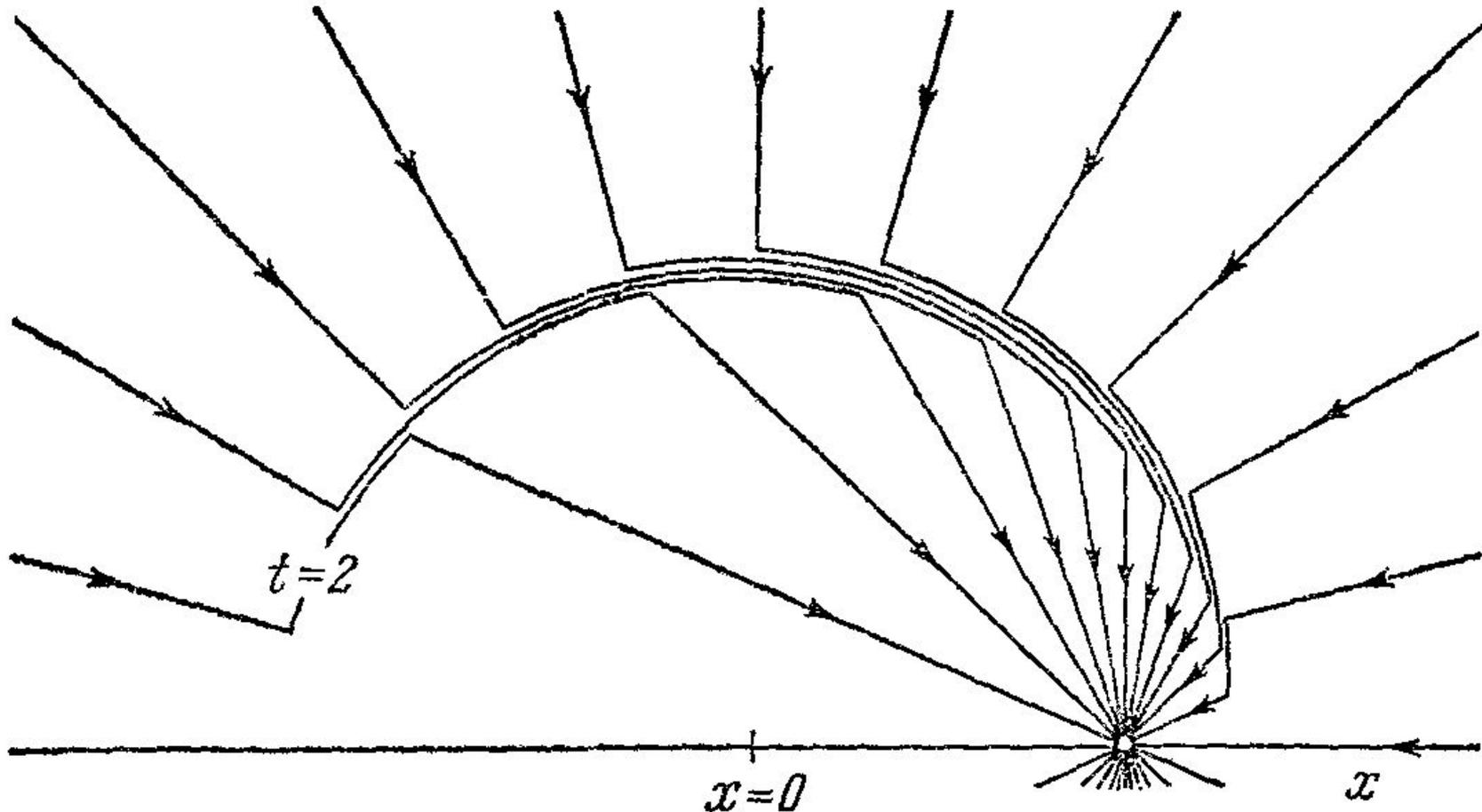


# Рисунки из БКФ



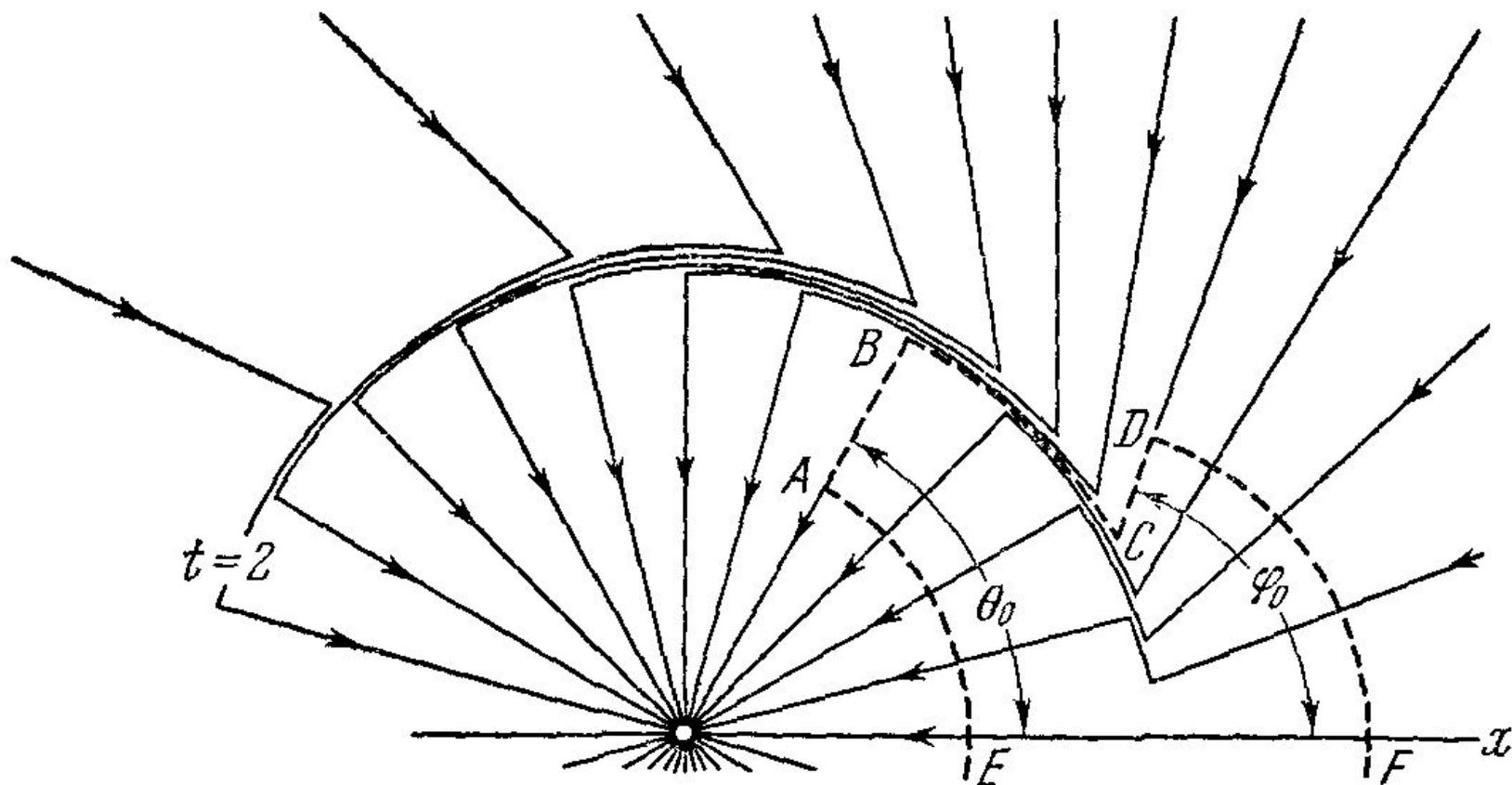
представление поля равномерно движущегося заряда.

# Рисунки из БКФ



Заряд, вначале покоящийся в точке  $x=0$ , внезапно ускоряется в момент  $t=0$  и движется затем с постоянной скоростью.

# Рисунки из БКФ



Заряд, двигавшийся с постоянной скоростью, в момент  $t=0$  достигает начала координат, резко затормаживается там до остановки и остается в начале координат.

# Уравнения Максвелла для вакуума

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

**Закон Гаусса  
в электричестве**

Результирующий электрический поток через произвольную замкнутую поверхность равен величине суммарного заряда, заключенного внутри этой поверхности, деленной на  $\epsilon_0$ .

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

**Закон Гаусса  
в магнетизме**

Результирующий магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

**Закон Фарадея**

Циркуляция вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура равна скорости изменения магнитного потока через произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур.

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

**Закон Ампера**

Циркуляция вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равна сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

Есть мнение, что токи смещения не создают магнитного поля, возможно, это неверно.

# Закон полного тока

Предположение Дж. Максвелла о существовании тока смещения позволило ввести понятие *полного тока* как суммы токов проводимости и тока смещения:

$$\vec{j}_{\Sigma} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \sum_k (I_k + I_{\text{см}k}),$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \text{div } \vec{j} + \text{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Далее: 
$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = 0.$$

С учетом теоремы Гаусса: 
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho,$$

Выводим уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Это уравнение является следствием закона сохранения электрического заряда.

# Система уравнений Максвелла в интегральной форме

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S};$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV;$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

4 уравнения

# Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

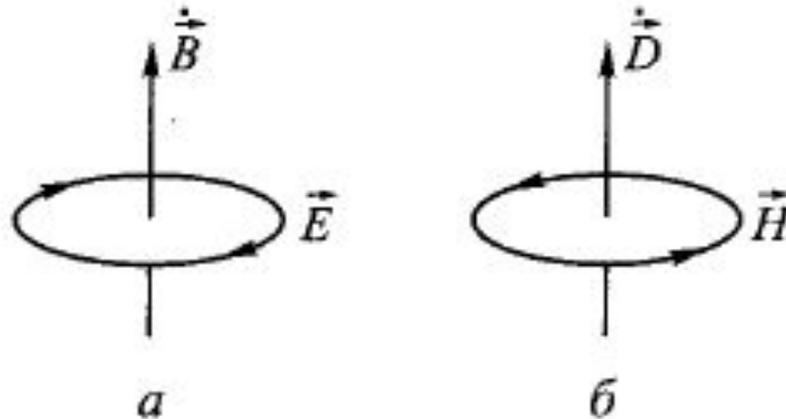
# Дифференциальные уравнения Максвелла в иной форме:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

# В отсутствии токов проводимости

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$



Для замыкания уравнений Максвелла  
используются уравнения материальной среды

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E};$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H};$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_{\text{ст}}).$$

3 уравнения

# Далее факультативный материал

С учетом проекции этих уравнений на оси координат уравнения материальной среды позволяют записать еще девять уравнений, которые совместно с семью независимыми уравнениями **основной** системы образуют систему из 16 уравнений, содержащую 16 независимых переменных, что делает ее математически разрешимой.

## Подробности

Из четырёх уравнений Максвелла два векторных и два скалярных. Так как каждое векторное уравнение эквивалентно трём скалярным, то всего получается  $3+3+2 = 8$  уравнений с 12 –тью неизвестными. Поэтому, чтобы систему уравнений можно было решить, её дополняют, так называемыми, **материальными уравнениями**, которые учитывают свойства окружающей токи и заряды среды. В случае однородной несегнетоэлектрической и неферромагнитной среды материальные уравнения имеют вид:  $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ ,  $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ .

В этих уравнениях:

- поляризованность среды учитывает величина  $\varepsilon$ ,
- намагниченность среды величина  $\mu$ ,
- проводящие свойства среды величина  $\sigma$ .

Чтобы система уравнений Максвелла имела единственное решение, к ним необходимо ещё добавить начальные условия и условия на границе раздела сред (граничные условия):

$$\begin{aligned} D_{2n} - D_{1n} &= \sigma, & E_{2\tau} - E_{1\tau} &= 0 \\ H_{2\tau} - H_{1\tau} &= j_N^{поверх}, & B_{2n} - B_{1n} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\sigma$  - поверхностная плотность свободных зарядов в рассматриваемой точке М,

$\vec{n}$  - единичный вектор нормали в точке М, проведённый из среды 1 в 2,

$\vec{\tau}$  - единичный вектор касательной к поверхности раздела в точке М,

$\vec{j}_N^{поверх}$  - вектор поверхностной плотности тока проводимости в точке М.

## Добавления и примечания

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

$$\vec{j}_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_l}{\partial t}$$

Здесь  $\mathbf{E}$   
внутри.

– плотность тока поляризации – плотность тока, обусловленная перемещением зарядов в диэлектрике. Эта составляющая тока смещения выделяет джоулево тепло (тепло выделяющееся при процедурах УВЧ,...). Ток смещения в вакууме и в металлах – джоулева тепла не выделяет.

# Решение уравнений Максвелла

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_2}{r_{1-2}} dV_2$$

$$A_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j_2}{r_{1-2}} dV_2$$

1 – точка наблюдения;

2 – точка расположения источника поля.

# Решение уравнений Максвелла

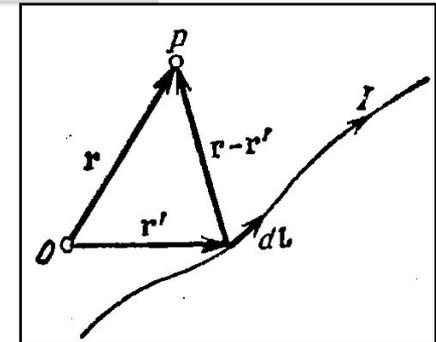
$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\mathbf{p}_m \mathbf{r}]}{r^3}$$



$d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$  есть приращение вектора  $\mathbf{r}'$  на отрезке  $d\mathbf{l}$ .

Уравнение Пуассона для вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$$

# Определения скалярного и векторного потенциалов

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_2}{r_{1-2}} dV_2$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_2}{r_{1-2}} dV_2$$

или

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}_2}{r_{1-2}} dV_2$$

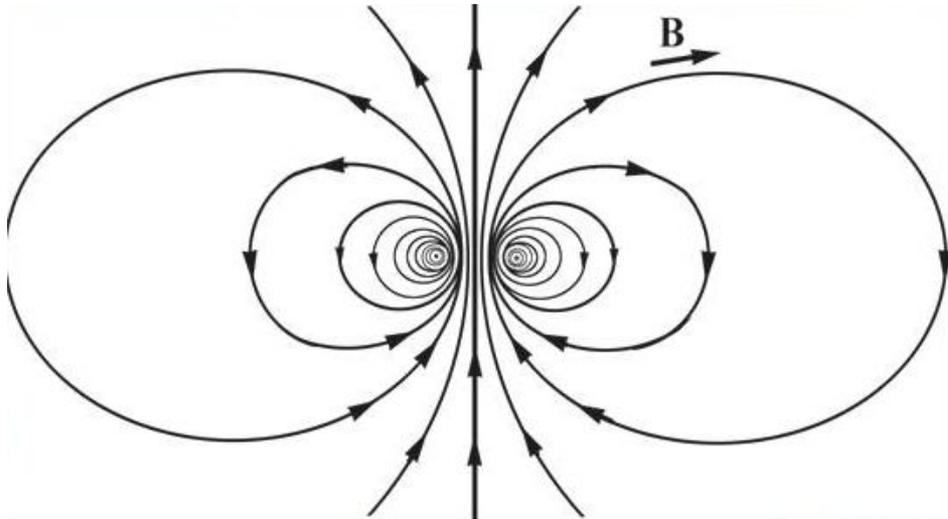
1 – точка наблюдения;

2 – точка расположения источника поля.

# Определение векторного потенциала через магнитный момент кругового тока

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{p}_m \cdot \vec{e}_r]}{r^2}$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3e_r(e_r \cdot \vec{p}_m) - \vec{p}_m}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}$$

Из Савельева

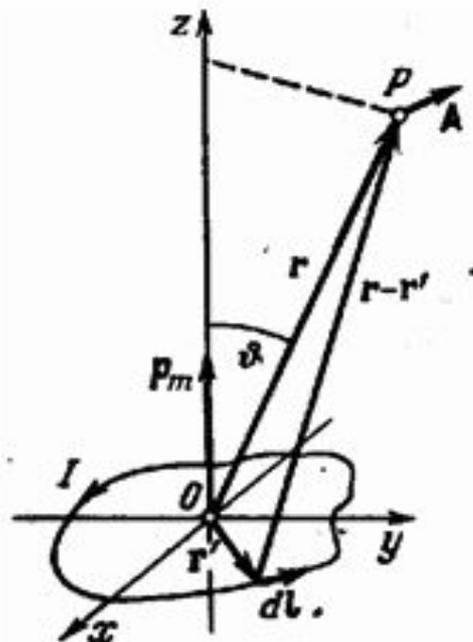


Рис. III.2.

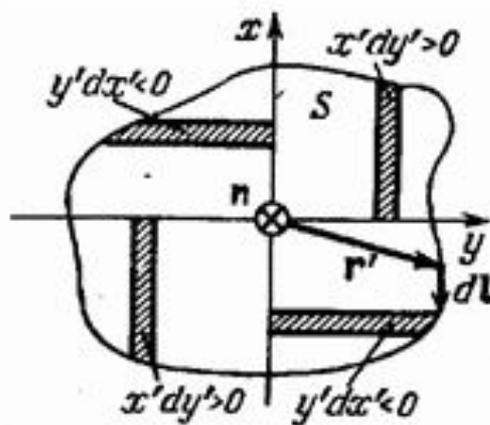


Рис. III.3. 2020

# Плотности зарядов и токов выступают как вторые производные скалярного и векторного потенциалов

Уравнение Пуассона для скалярного потенциала

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

# Аналогии интегральных соотношений

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$\oint \vec{P} d\vec{S} = -q^*$$

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = (q + q^*) / \epsilon_0$$

$$\oint \vec{H} d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I$$

$$\oint \vec{J} d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = \sum I'$$

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum (I + I')$$

$$\int \vec{B} d\vec{S} = \Phi$$

# Аналогии дифференциальных соотношений

$$\operatorname{div} D = \varepsilon_0 \operatorname{div} E_0 = \rho$$

$$\operatorname{div} P = -\rho'$$

$$\operatorname{div} E = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} H = j$$

$$\operatorname{rot} J = j'$$

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 (j + j')$$

Из системных  
представлений:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -c^2 \text{rot} \vec{B}$$

$$\text{rot} \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Уравнения Максвелла с использованием «материальных векторов»

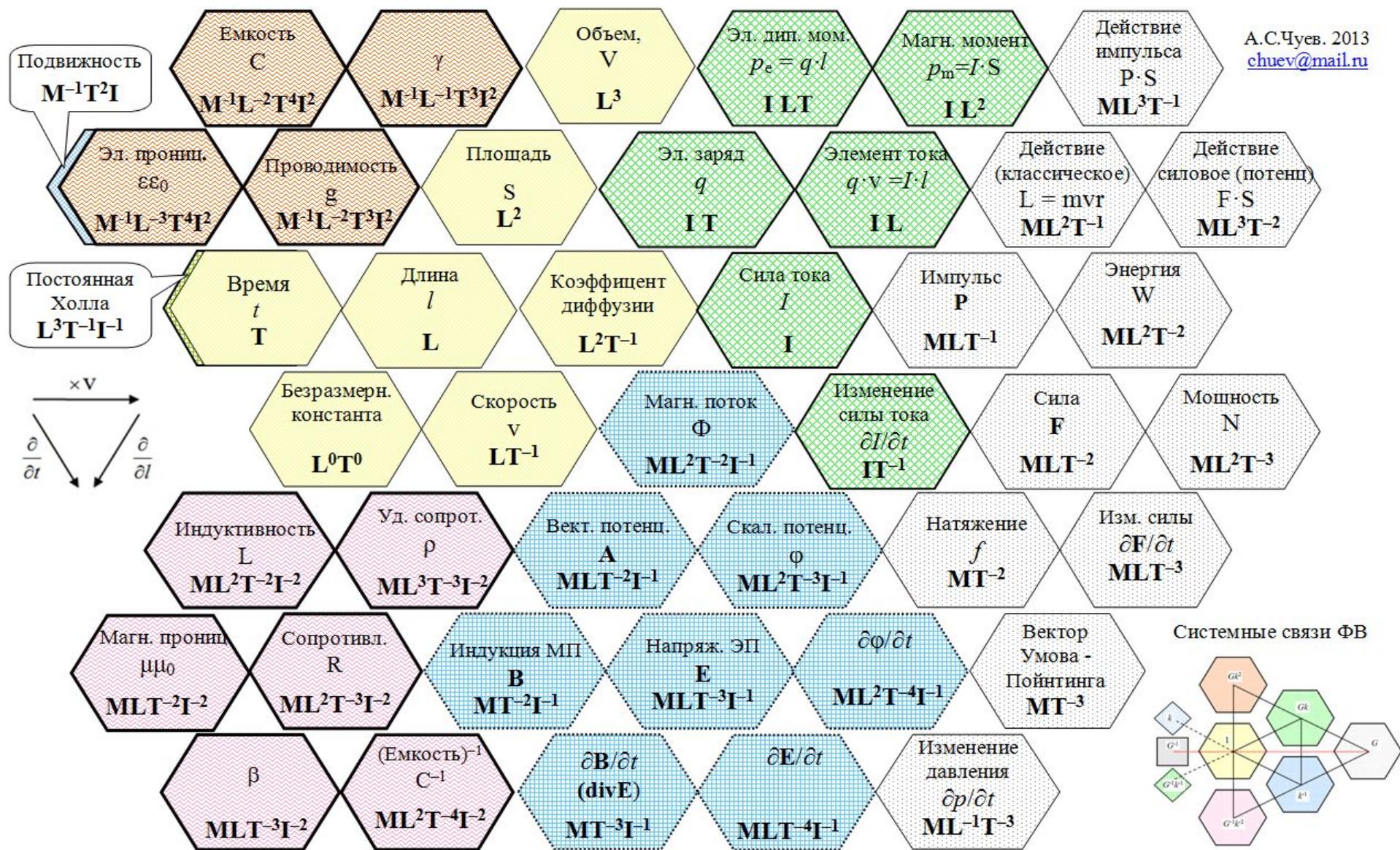
$$\frac{\partial \vec{P}_B}{\partial t} = -(\text{div} \vec{J}_B + \text{rot} \vec{J}_B)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -c^2 (\text{div} \vec{P}_B + \text{rot} \vec{P}_B)$$

$$\frac{\partial |\vec{P}_B|}{\partial t} = \vec{j}'_{\text{CM}}$$

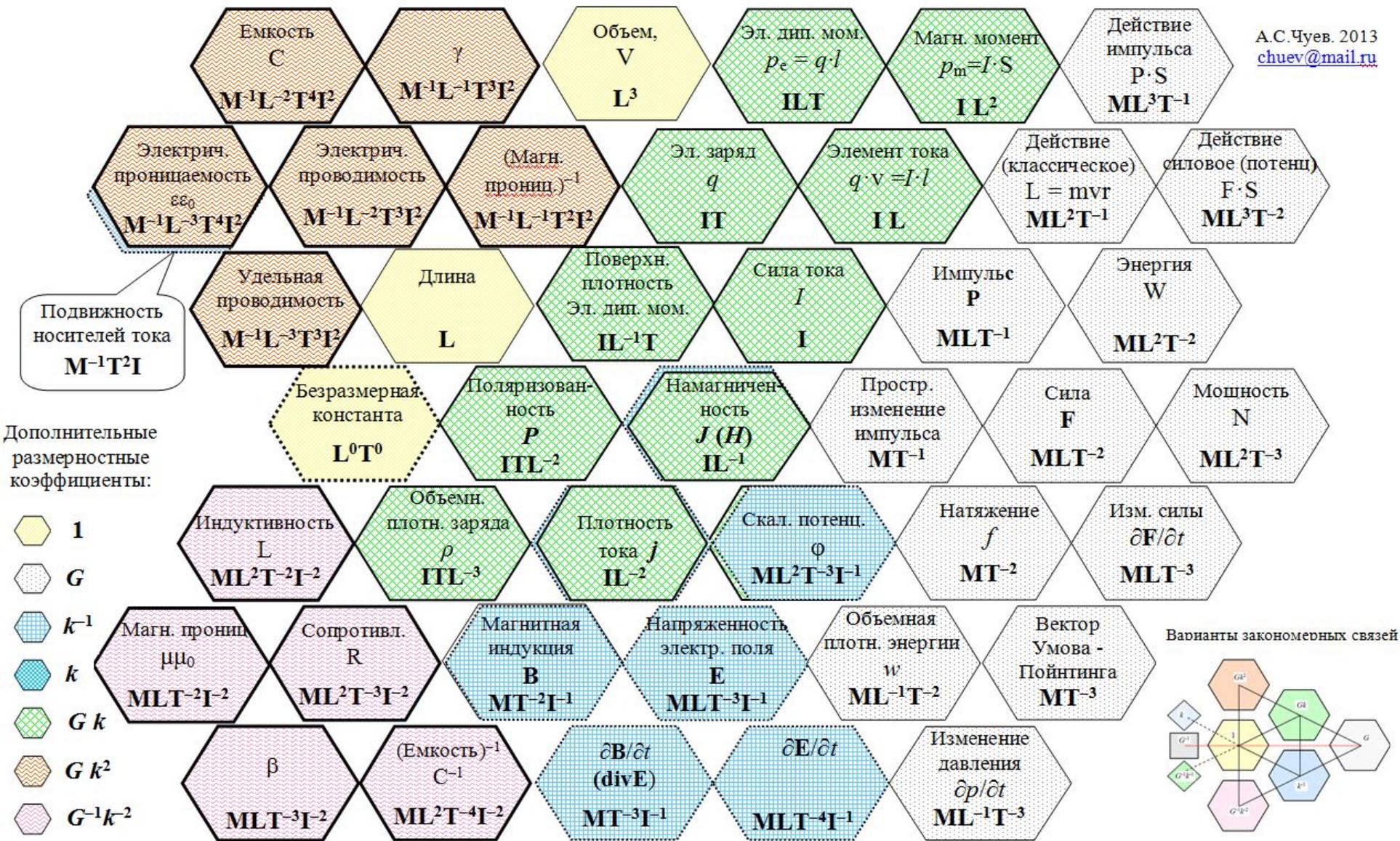
# СИСТЕМА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ

А.С.Чуев. 2013  
[chuev@mail.ru](mailto:chuev@mail.ru)



# Система электромагнитных величин и их взаимосвязей

А.С.Чуев. 2013  
[chuev@mail.ru](mailto:chuev@mail.ru)



# Конец лекции 10 -2020