АЛМАТЫ ЭНЕРГЕТИКА ЖӘНЕ БАЙЛАНЫС УНИВЕРСИТЕТІ

Ғұмарбек Дәукеев атындағы

AUES

Алматинский университет энергетики и связи
имени Гумарбека Даукеева

Компьютерная графика и анимация

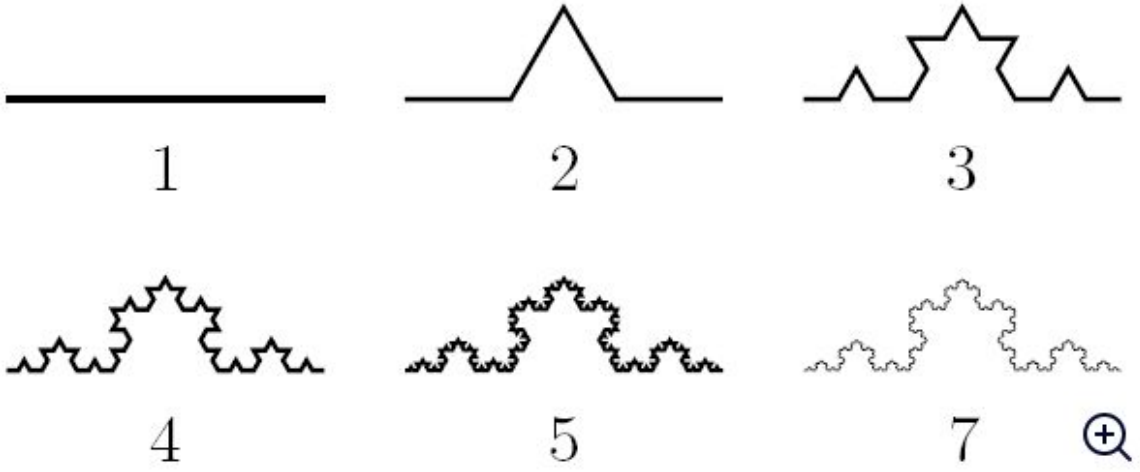
Фракталы (продолжение)

Бельгинова С.А.

s.belginova@aues.kz

Геометрические фракталы. Кривая Коха. Снежинка Коха

- **Кривая Коха** — фрактальная кривая, описанная в 1904 году шведским математиком Хельге фон Кохом. Копии кривой Коха, построенные (остриями наружу) на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую бесконечной длины, называемую снежинкой Коха.



Основные свойства кривой Коха

1. **Она непрерывна, но нигде не дифференцируема. Ни в одной точке не имеет касательную**.

2. **Имеет бесконечную длину**.

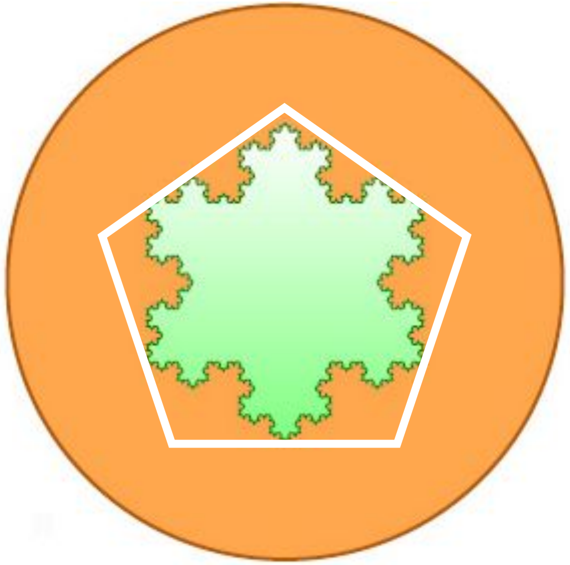
Пусть длина исходного отрезка равна 1.

На каждом шаге построения мы заменяем каждый из составляющих линию отрезков на ломаную, которая в 4/3 раза длиннее.

Значит, и длина всей ломаной на каждом шаге умножается на 4/3: длина линии с номером n равна (4/3)^

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$$

3. **Снежинка Коха имеет конечную площ**



Подробный вывод формулы по ссылке:
https://www.youtube.com/watch?v=skKxNSrg8U8&feature=emb_rel_pause

Геометрические фракталы. Системы Линдемайера

L-система это формальная грамматика, используемая для моделирования процессов роста и развития растений.

L-система определяется как кортеж $G=(V, w, P)$,

где *V* – алфавит, представляющий набор символов, содержащих элементы которые могут быть представлены графически,

w – аксиома, которая представляет собой строку символов из *V*, определяющая начальное состояния системы,

P - представляет собой набор правил производства новой строки, путем замены символов текущего состояния системы на ряд новых.

Правила грамматики *L*-системы применяются итеративно, начиная с начального состояния.

Системы Линдемайера (продолжение)

Рассмотрим *L*-систему, где алфавит состоит всего из двух символов $V=\{a,b\}$. Аксиома $w=a$. Правила производства описываются как $p1$: $a \rightarrow ab$, $p2$: $b \rightarrow ab$. Следуя итеративному принципу, каждое поколение кривой удваивается на каждом этапе: *a*, *ab*, *abab*, *abababab*. Графически *a* и *b* отображаются как два равных отрезка, соединенных под прямым углом.

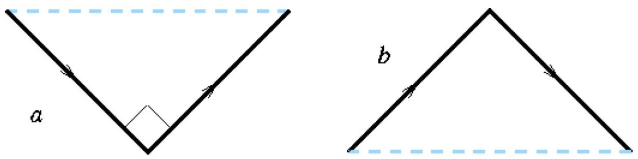


Рис. 1 - Графическое представление алфавита L-системы

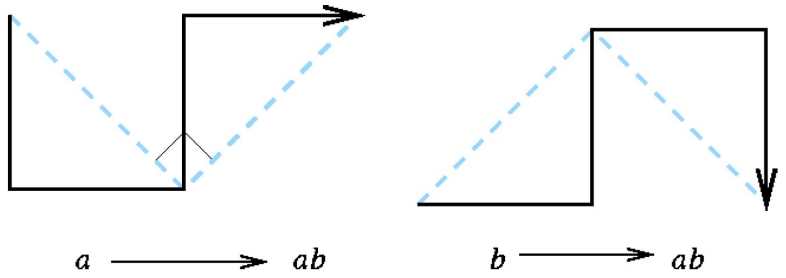
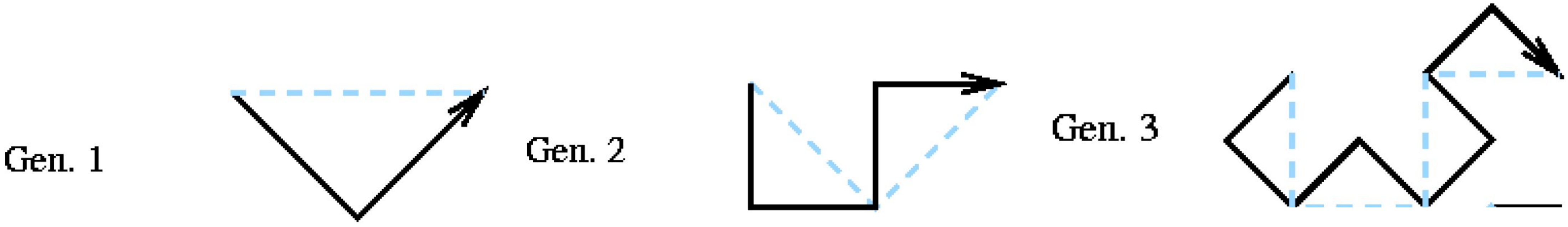
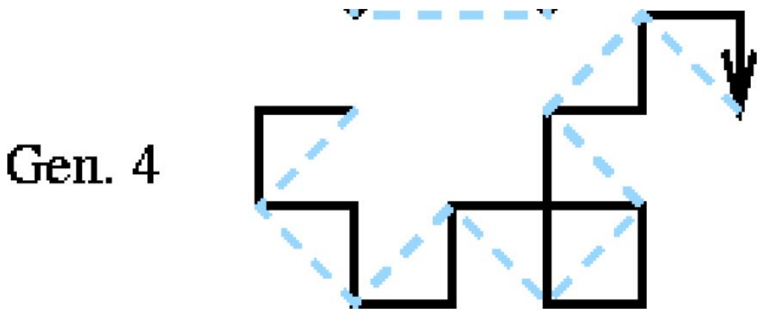
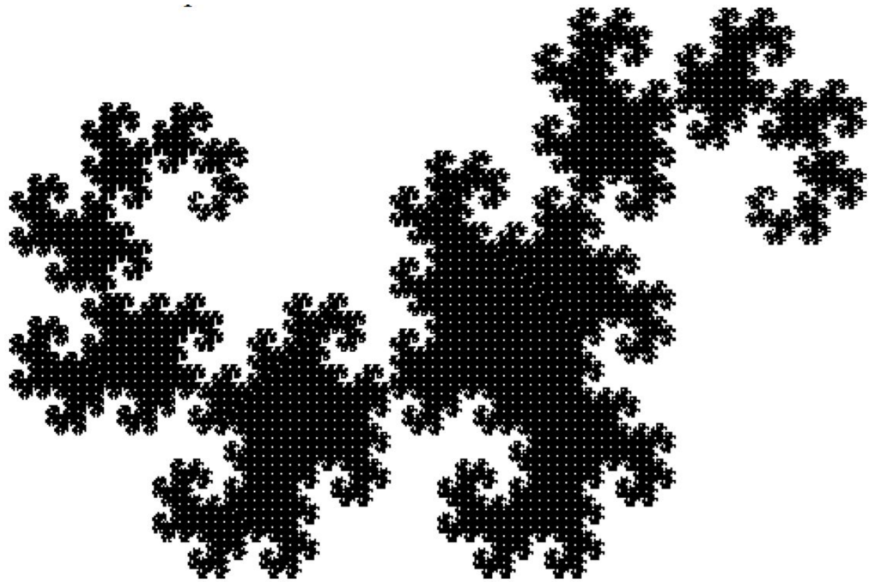


Рис. 2 - Графическое представление правил L-системы

Начальные итераций процесса построения фрактала в L-системе







Дракон Хартера-Хейтуэя

Геометрические фракталы. Треугольник Серпинского

Алгоритм построения:

- Равносторонний треугольник M_0 делится прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных равносторонних треугольника.
- Из треугольника удаляется центральный треугольник.
- Получается множество M_1, состоящее из 3 оставшихся треугольников "первого ранга".
- Поступая точно так же с каждым из треугольников первого ранга, получим множество M_2, состоящее из 9 равносторонних треугольников второго ранга.
- Продолжая этот процесс бесконечно, получим бесконечную последовательность M_0, M_1,…, M_n,…пересечение членов которой есть треугольник Серпинского

Линейные геометрические фракталы. Ветвь папортника.

Алгоритм построения основан на подобии построении всей ветви папоротника каждому ее листу. Заключим оригинальное изображение ветви в прямоугольное окно и проведем необходимые линейные и угловые измерения между опорными точками $p_0 - p_5$ лежащими на концах ветви и двух нижних листьев.

Вычислим длину листа $d = | p_0 - p_5 |$, высоту окна $h_0 = d \cos(\varphi_0)$ и коэффициенты пропорций:

$$k_1 = \frac{|p_0 - p_1|}{h_0}, \quad k_2 = \frac{|p_0 - p_2|}{h_0}$$

$$m_1 = \frac{|p_1 - p_3|}{d}, \quad m_2 = \frac{|p_2 - p_4|}{d}, \quad m_3 = \frac{|p_2 - p_5|}{d}$$

Линейные геометрические фракталы. Ветвь папортника.

Составим рекурсивную функцию построения ветви папоротника

$f\,(p_0,\, h,\, \psi,\, \delta\, ,side,\, rec)$

Если $\{rec = 0\}\ U\ \{k_2h < \delta\}$, то выход из рекурсии

$p_1 = p_0 + [0\ \ k_1h]\ \ R\,(\psi)$, $p_2 = p_0 + [0\ \ k_2h]\ \ R\,(\psi)$ - точки ветвления

$line(\ p_0\, p_2)$ - рисование линии в окне 0

$f\,(p_1,\, m_1h,\, \psi - side\,(\varphi_1+\varphi_0)\,,\, -side\,,\ \delta\,,\, rec-1\,)$ - построение листа в окне 1

$f\,(p_2,\, m_2h,\, \psi + side\,(\varphi_2+\varphi_0)\,,\ side\,,\ \delta\,,\, rec-1\,)$ - построение листа в окне 2

$f\,(p_3,\, m_3h,\, \psi - side(\,\varphi_3 - \varphi_0\,)\,,\ side\,,\ \delta\,,\, rec-1\,)$ - построение листа в окне 3

Здесь

$p_0\ = [\,x_0\ \ y_0\,]$ - координаты начальной точки на осевой линии окна;

h - высота ветви;

ψ - угол отклонения ветви от вертикали;

side = ±1 - направление изгиба ветви вправо (+1) или влево (-1) от оси окна;

δ - минимальная длина ветвящегося отрезка;

rec - максимальное число рекурсий ветвления.

Линейные геометрические фракталы. Ветвь папортника.

На каждом уровне рекурсии в текущем окне *0* высотой *h*, алгоритм вычисляет точки p_1 и p_2 , лежащие на осевой линии окна на расстояниях $|p_0 p_1| = k_1 h$ и $|p_0 p_2| = k_2 h$ от точки p_0. Затем рисуется отрезок $p_0 p_2$ и трижды рекурсивно просчитывается с параметрами подобных окон 1, 2 и 3:

-точками ветвления p_1 , p_2 и p_3

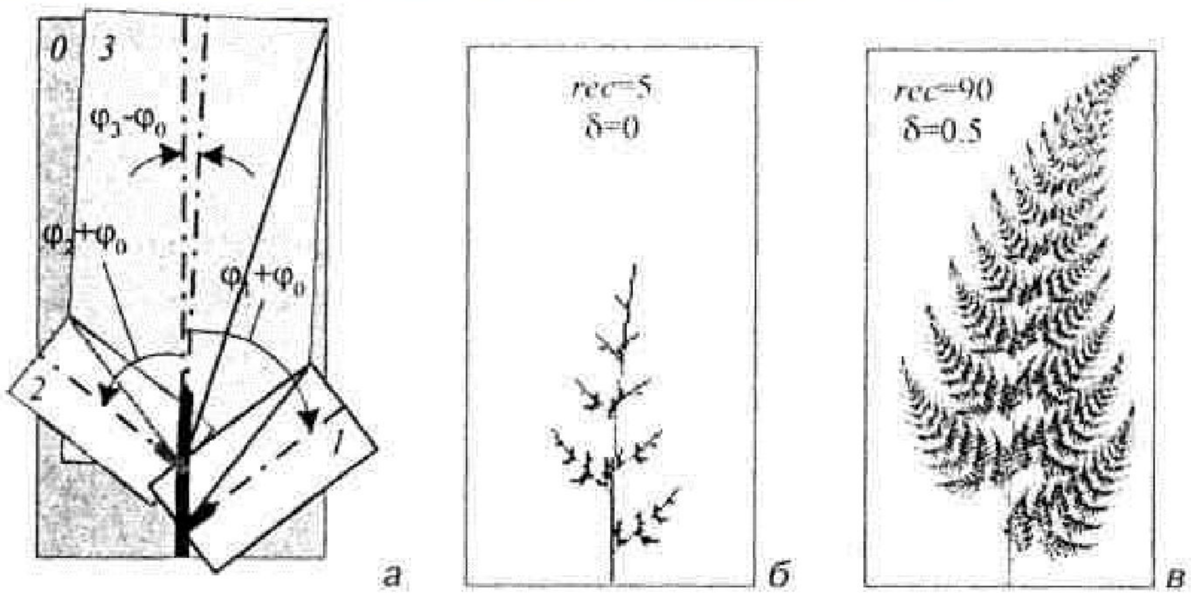
-высотами $m_1 h$, $m_2 h$, $m_3 h$

-углами отворота от осевой линии $-(\varphi_1+\varphi_0)$, $\varphi_2+\varphi_0$ и $-(\varphi_3-\varphi_0)$

-направлениями изгиба листьев относительно изгиба ветви :огласно схеме на рис.

-параметром δ;

-декрементированным значением *rec - 1*.



Алгебраические фракталы

Алгебраические фракталы получают с помощью нелинейных процессов в *n*-мерных пространствах..

Алгоритм построения основан на итеративном выражении:

$$Z_{n+1} = F(z_n),$$

где $F(z)$ - какая-либо функция комплексной переменной.

К алгебраическим фракталам относят биоморфы . Термин был предложен Клиффордом Пикоувером для обозначения алгебраических фракталов, внешним видом напоминающих одноклеточные организмы.

Биоморфы получают из следующих функций:

$$z = z^z + z^6 + c$$

$$z = \sin(z^3) + c$$

$$z = z^2 + \sin(z) + c$$

$$z = z^3 + c$$

$$z = z^5 + c$$

$$z = e^z + \sin(z) + c$$

Бассейны Ньютона

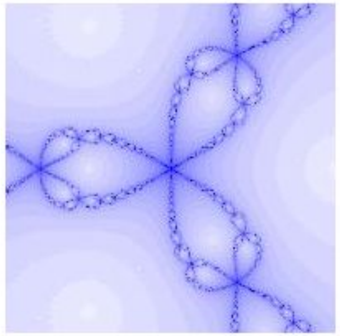
Рассмотрим уравнение: $p(z) = z^3 - 1$

Общая формула метода Ньютона имеет вид: $z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$

Подставив p(z) в формулу метода, получим итерационную формулу для построения фрактала:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2}$$

Итерационный процесс останавливается п $|z_{k+1}^3| \leqslant r_{\min}$



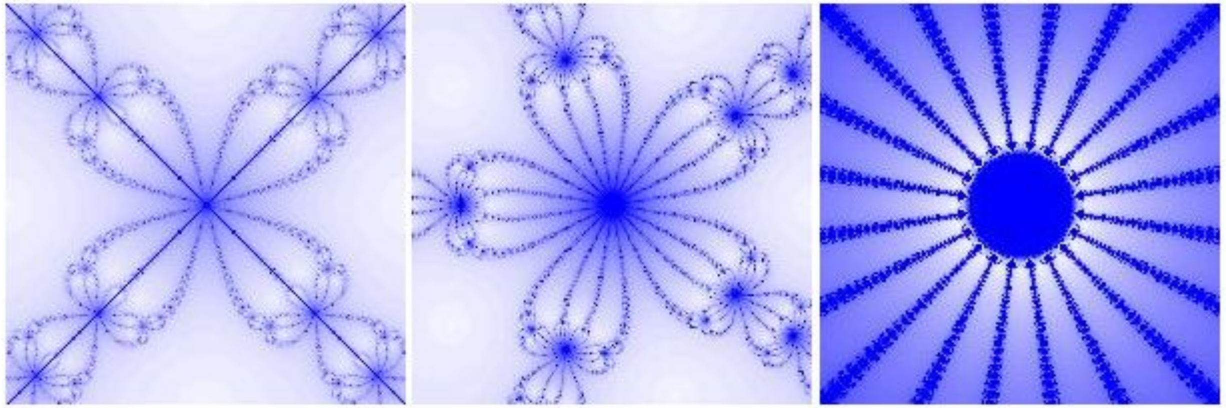
Бассейны Ньютона

Если записать формулу в общем виде:

$$p(z) = z^N - 1$$

$$\left|z_{k+1}^N - 1\right| \leqslant r_{\min}$$

то можно получить изображения фракталов более сложной формы:



Алгебраические фракталы. Множество Мендельброта.

Множество Мандельброта — это фрактал, определённый как множество точек c на комплексной плоскости, для которых итеративная последовательность

$z_0 = 0$

$z_{n+1} = z_n^2 + c$

не уходит в бесконечность.

Таким образом, вышеуказанная последовательность может быть раскрыта для каждой точки c на комплексной плоскости следующим образом:

$c = x + i \cdot y$

$Z_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= Z_0^2 + c \\
&= x + i \cdot y \\
Z_2 &= Z_1^2 + c \\
&= (x + i \cdot y)^2 + x + i \cdot y \\
&= x^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y - y^2 + x + i \cdot y \\
&= x^2 - y^2 + x + (2 \cdot x \cdot y + y) \cdot i \\
Z_3 &= Z_2^2 + c = \ldots
\end{aligned}
$$

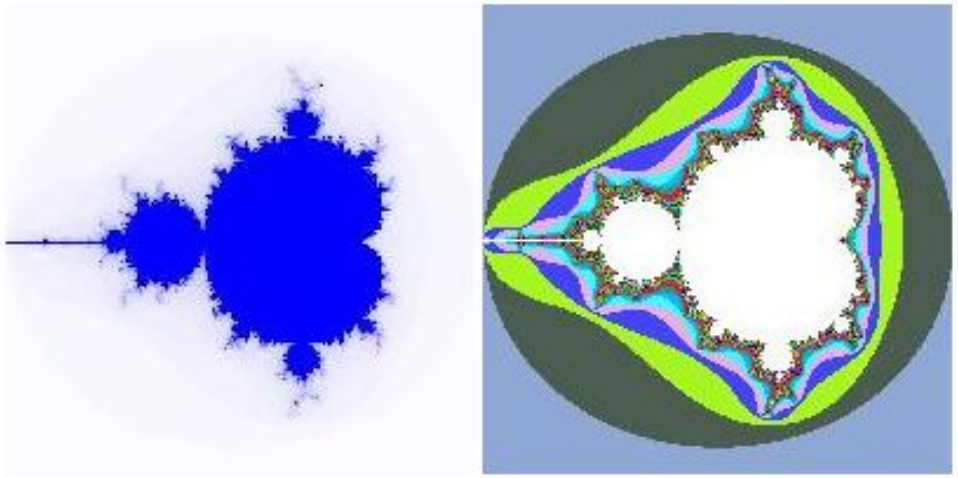
и так далее.

Множество Мандельброта

Если переформулировать эти выражения в виде итеративной последовательности значений координат комплексной плоскости x и y, т. е. заменив z_n на $x_n + i \cdot y$, а c на $p + i \cdot q$, мы получим:

$$x_{n+1} = x_n^{\,2} - y_{\mathrm{n}}^{\,2} + p$$
$$y_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot y_{\mathrm{n}} + q \qquad (*)$$

$$r_i = \sqrt{x_i + y_i}$$



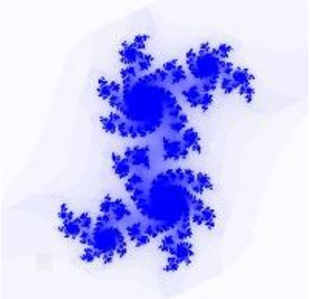
Фрактал Жюлиа

Рассмотрим ту же последовательность комплексных чисел, что и для множества Мандельброта:

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Исходные данные, этапы построения и условия остановки – те же, что и для фрактала Мандельброта, за исключением:

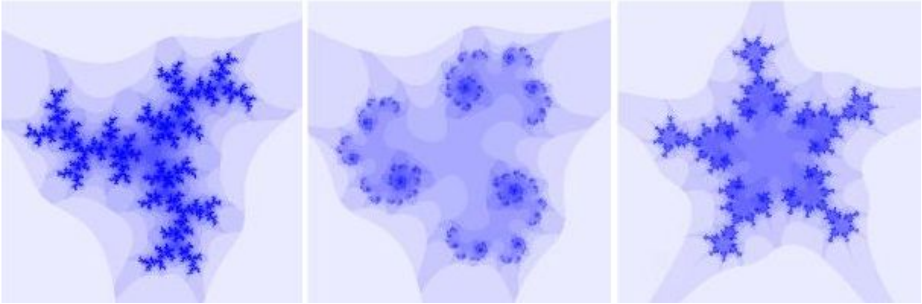
- значение c фиксируется: $c = 0,36 + 0,36i$
- начальное значение z_0 перебирается дискретно в области $C \in [-1;1] + [-1;1]i$



Рассматривая множество в общем виде:

$$z_{k+1} = z_k^N + c$$

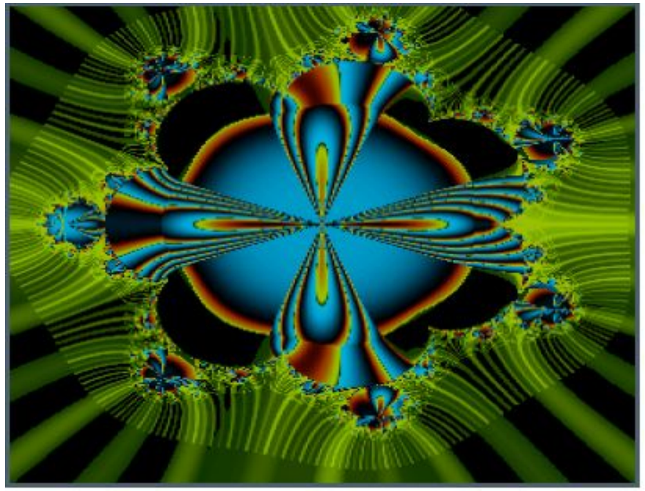
Можно получать разнообразные фрактальные множества:

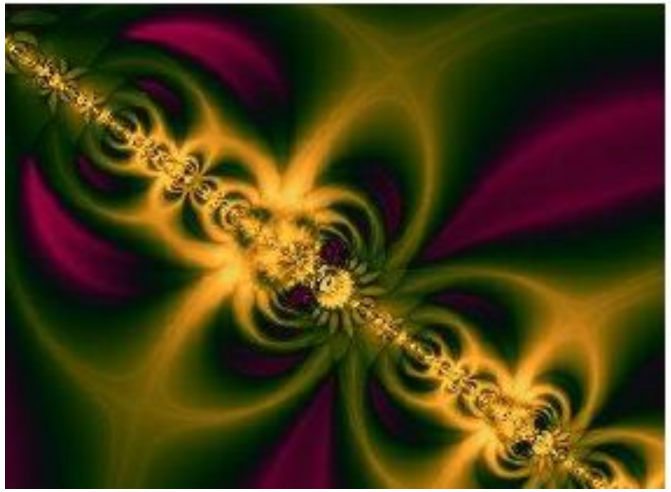


Примеры фрактальных изображений

$$z_{i+1} = z_i^8 + c$$

$$z = z - \frac{\sin z}{0{,}00000000000001 + \cos z} \cdot \frac{z^8 - z^6 - \sin z - zc - 1}{8z^7 - 6z^5 - \cos z - c}$$





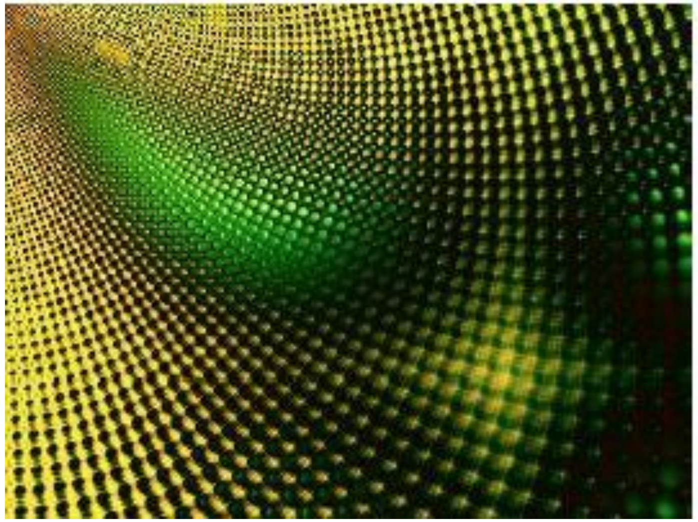
Примеры фрактальных изображений

“Встреча в аквариуме”.

$$z = \left(\frac{c}{\cos z} \right)^2$$

“Иной”

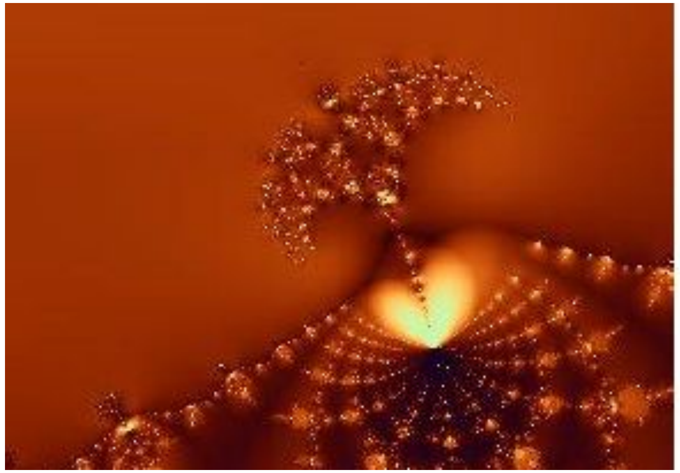
$$z = z - \frac{z^5 - z^3 - z^2 \sin z - z - \sin z}{4z^3 - z^2 \cos z - 1} + c$$



Примеры фрактальных изображений

“Огненный цветок”

$$z = z - \frac{z^3 \sin z - \sin z - z}{3z^2 \cos z - \cos z - 1} + c$$



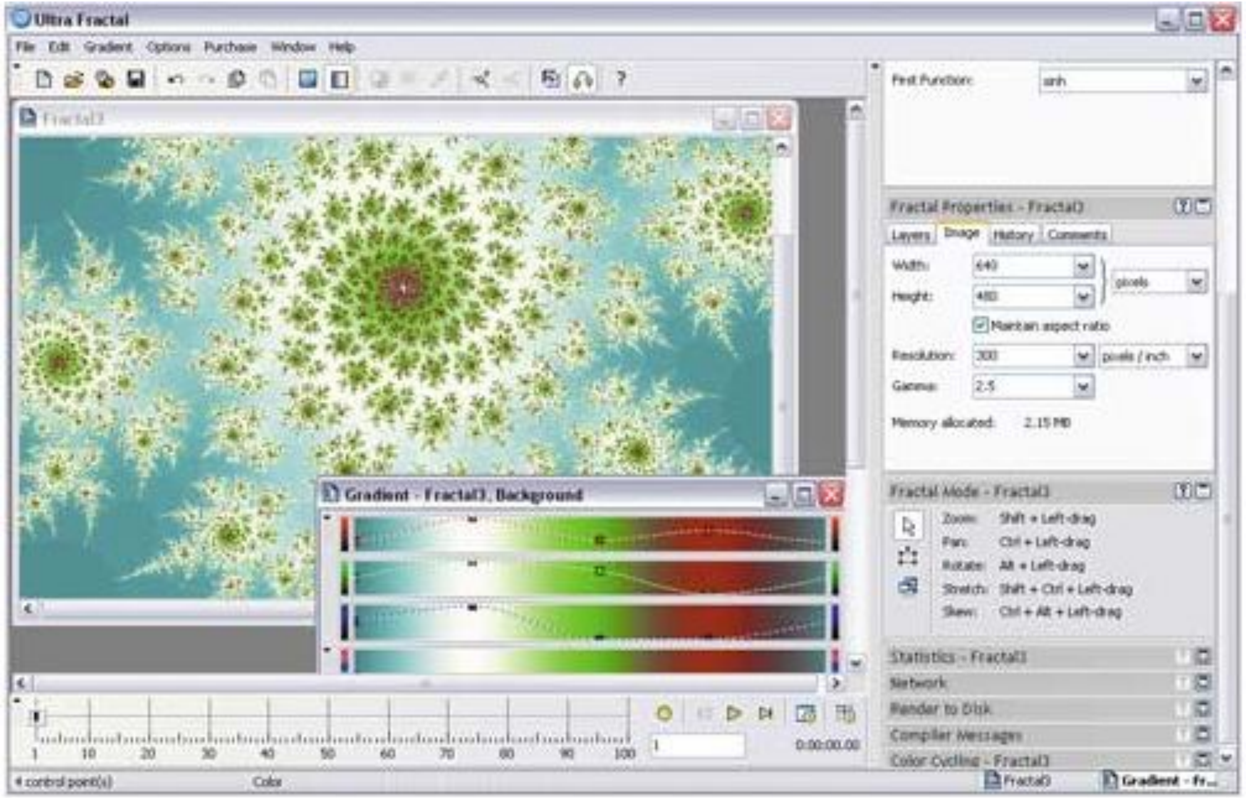
“Сфинкс”

$$z = z - \frac{z^6 - z^5(1 - \sin z) - cz^4 \sin z - cz \sin z - z}{6z^5 - 5z^4 - z^5 \cos z - cz^4 \cos z - cz \cos z - 1}$$

Программы генерации фракталов

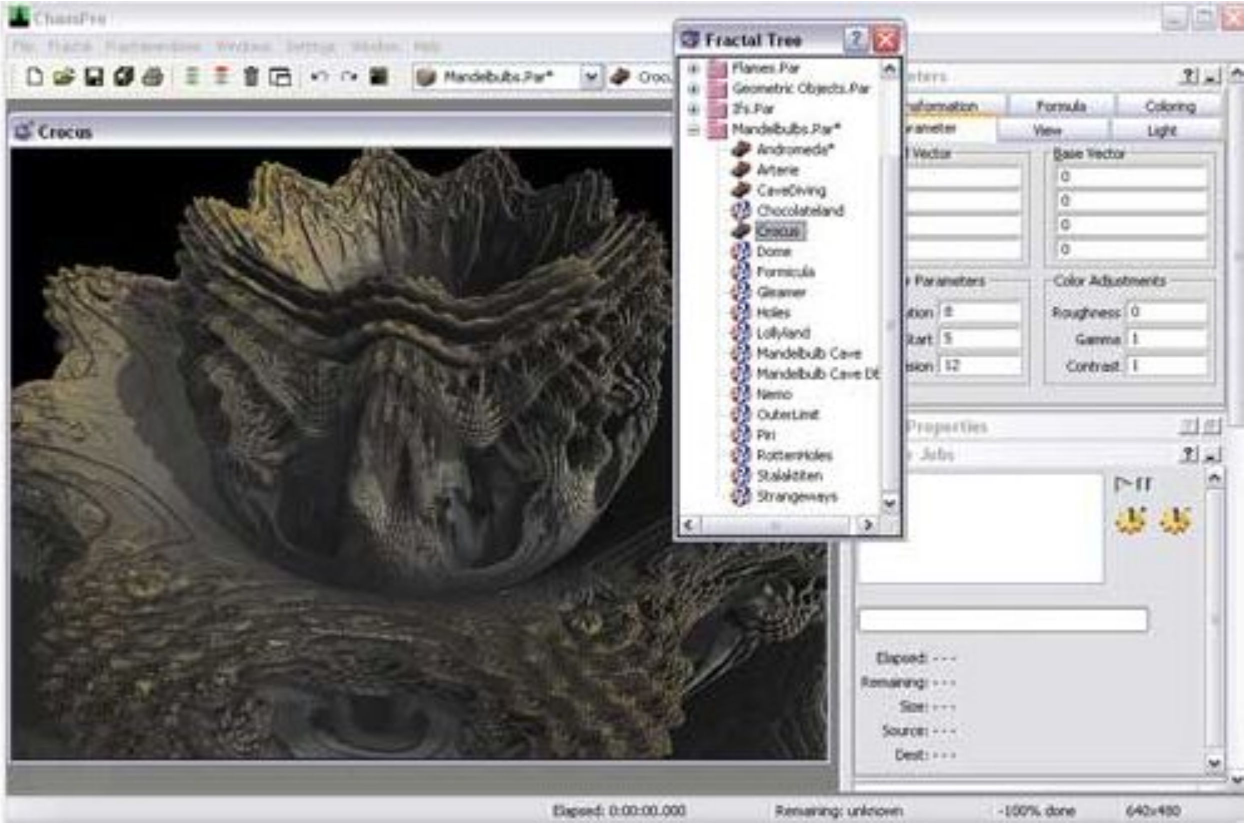
Ultra Fractal 5.04

Разработчик: Frederik Slijkerman
Сайт: http://www.ultrafractal.com/
Размер дистрибутива: 6,26 Мбайт
Способ распространения: shareware (30-дневная демо-версия, включающая водяные знаки на изображениях



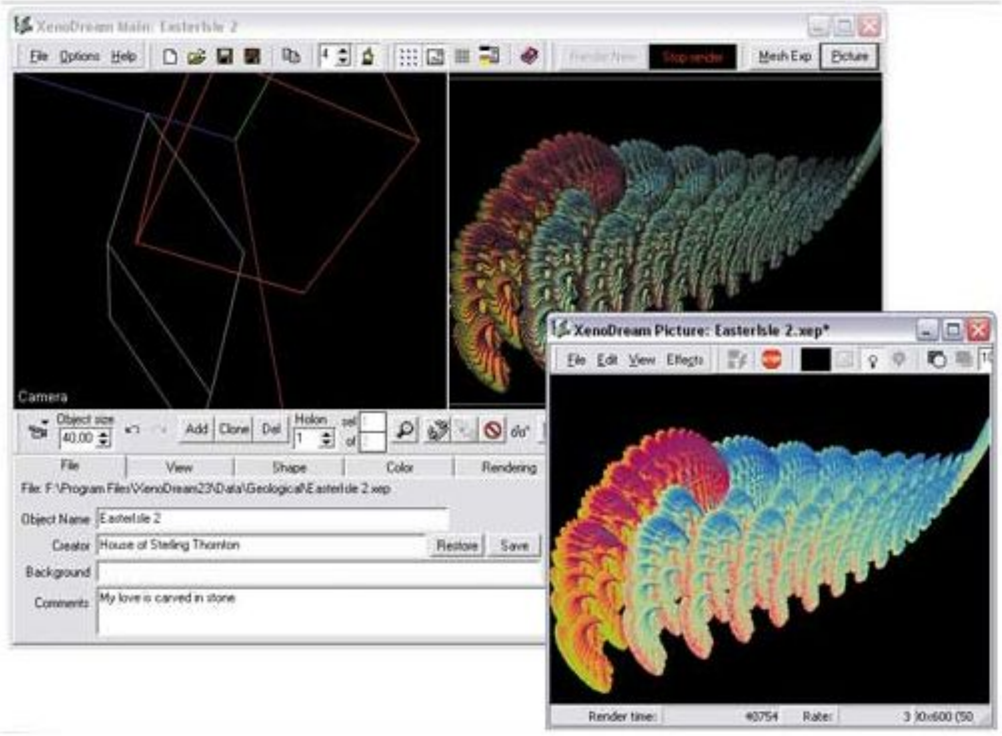
Программы генерации фракталов

ChaosPro 4.0.228
Разработчик: Martin Pfingstl
Сайт программы: http://www.chaospro.de/
Размер дистрибутива: 7,23 Мбайт
Способ распространения: freeware (http://www.chaospro.de/download.php)
Цена: бесплатно



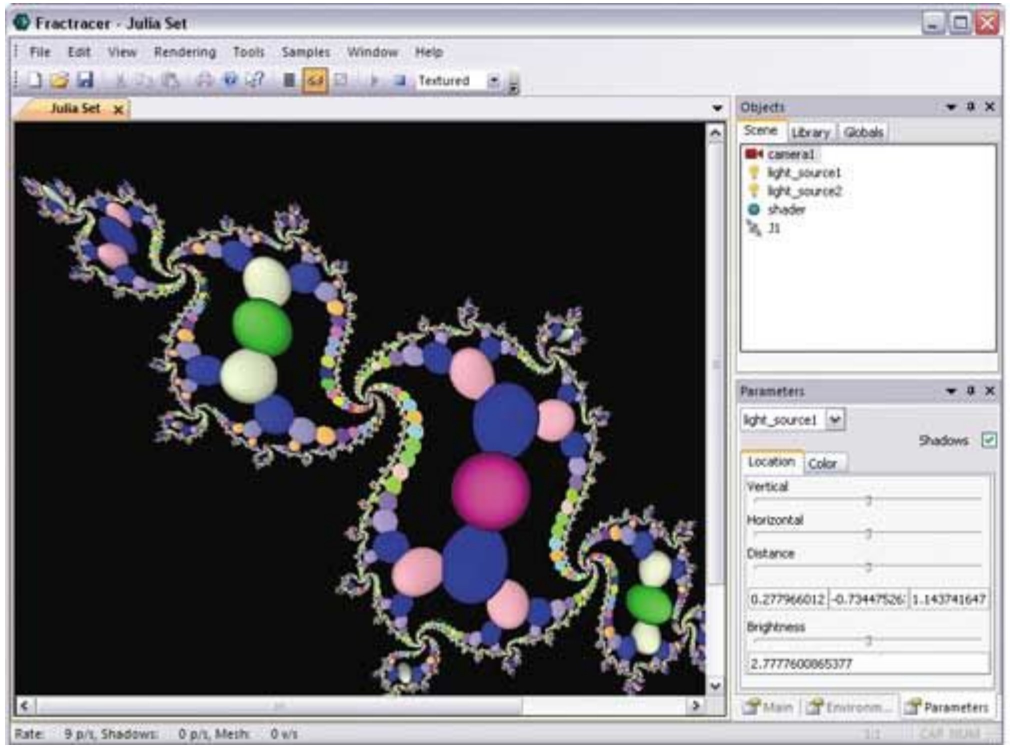
Программы генерации фракталов

XenoDream 2.3
Разработчик: XenoDream Software, LLC
Сайт программы: http://xenodream.com/
Размер дистрибутива: 6,68 Мбайт
Способ распространения: shareware (функционально ограниченная демо-версия, включающая водяные знаки на изображениях



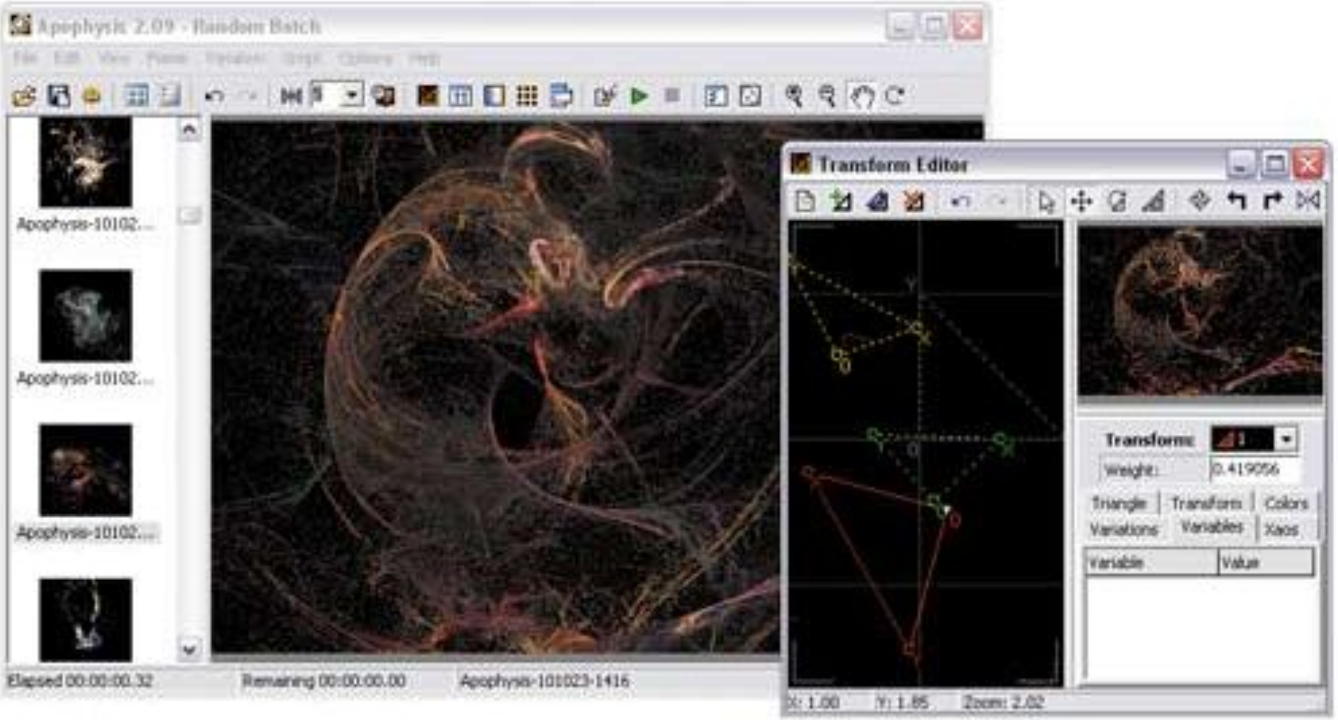
Программы генерации фракталов

Fractracer 1.1
Разработчик: Fractracer Lab
Сайт программы: http://fractracer.com/
Размер дистрибутива: 32-битная версия — 3,5 Мбайт; 64-битная версия — 4 Мбайт
Способ распространения: shareware (функционально ограниченная демо-версия, включающая водяные знаки на изображениях



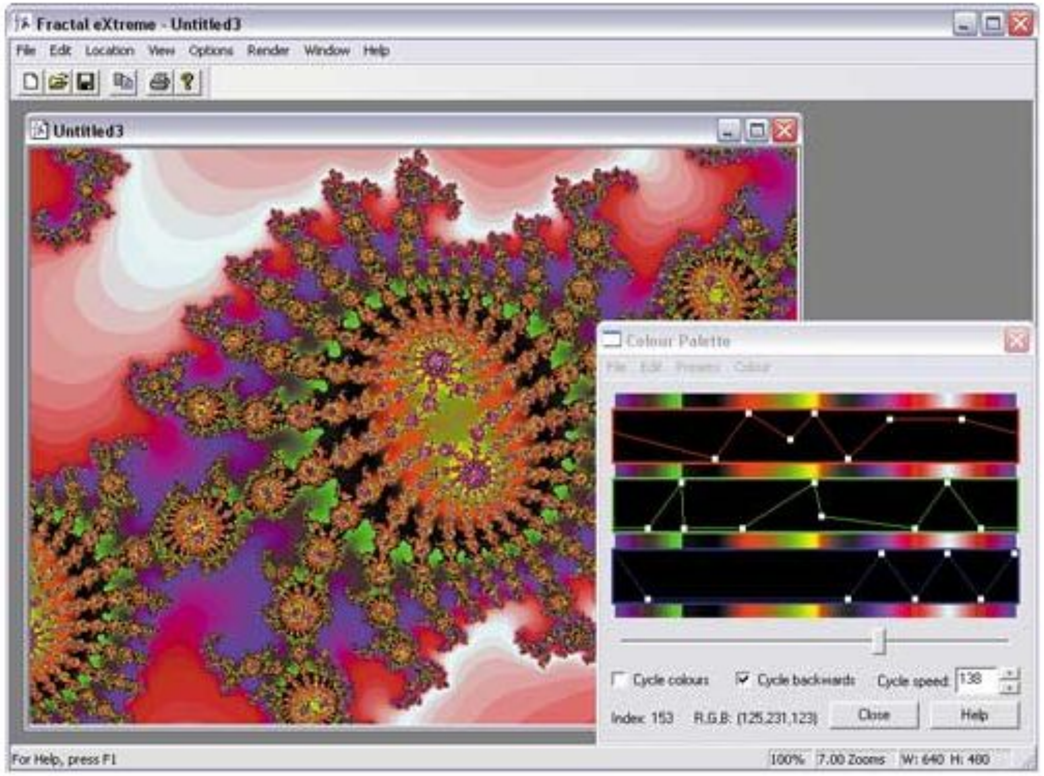
Программы генерации фракталов

Apophysis 2.02 Stable/2.09 Beta
Разработчик: Peter Sdobnov, Piotr Borys
Ronald Hordijk
Сайт программы: http://www.apophysis.org/
Размер дистрибутива: 2,58 Мбайт
Способ распространения: freeware



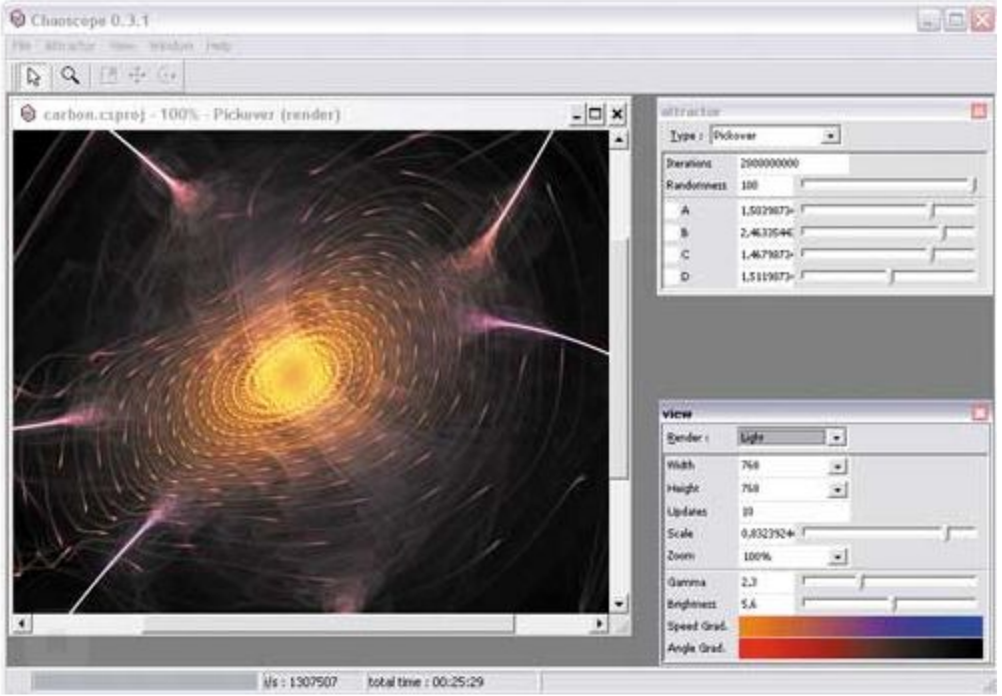
Программы генерации фракталов

Fractal Extreme 2.04
Разработчик: Cygnus Software
Сайт программы: http://www.cygnus-software.com/
Размер дистрибутива: 32-битная версия — 12 Мбайт; 64-битная версия — 10,63 Мбайт
Способ распространения: shareware (15-дневная демо-версия



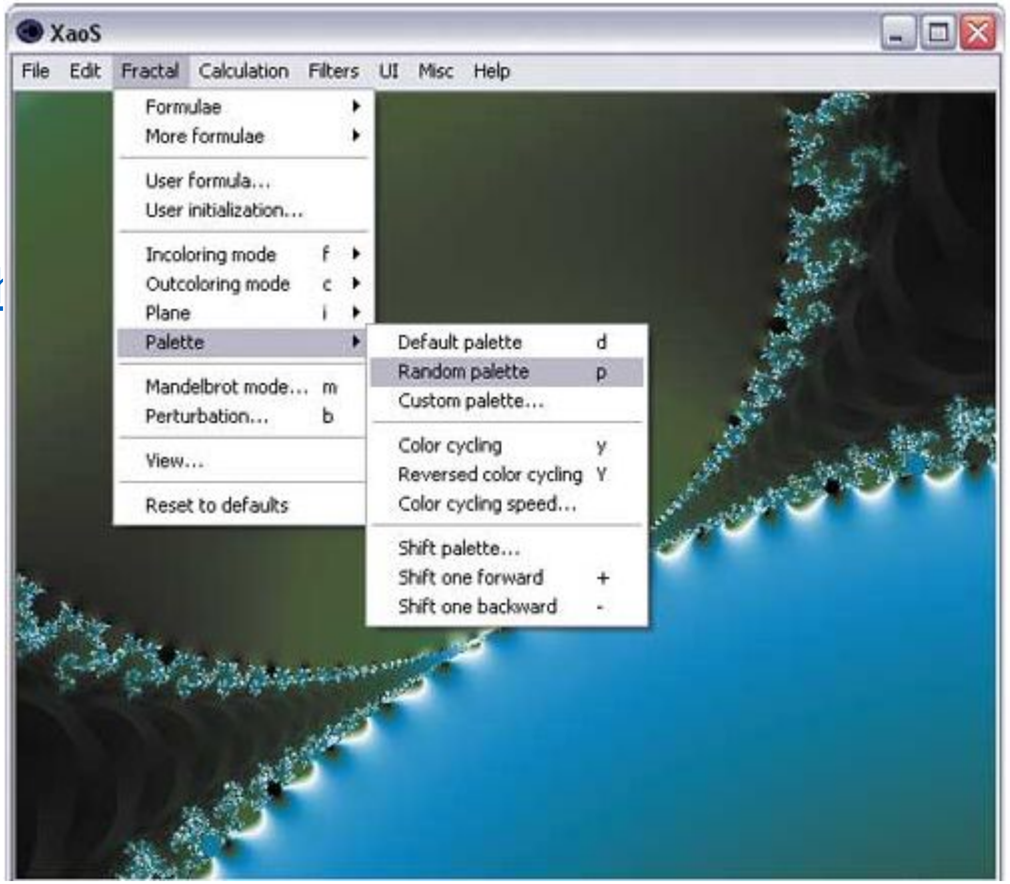
Программы генерации фракталов

Chaoscope 0.3.1
Разработчик: Chaoscope Team
Сайт программы: http://www.chaoscope.org/
Размер дистрибутива: 2,5 Мбайт
Способ распространения: freeware



Программы генерации фракталов

XaoS 3.5
Разработчик: GNU XaoS Contributors
Сайт программы: http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.ph
Размер дистрибутива: 1,46 Мбайт
Способ распространения: GPL/freeware
Цена: бесплатно



Контрольные вопросы

	Вопрос		
	Определение Кривой Коха		Бассейн Ньютона
	Основные свойства кривой Коха		Множество Мендельброта.
	Системы Линдемайера		Фрактал Жюлиа
	Треугольник Серпинского		Примеры фрактальных изображений
	Ветвь папортника.		Программы генерации фракталов
	Примеры биоморфов		