



AUES



Алматинский университет энергетики и связи
имени Гумарбека Даукеева

Компьютерная графика и анимация

Фракталы (продолжение)

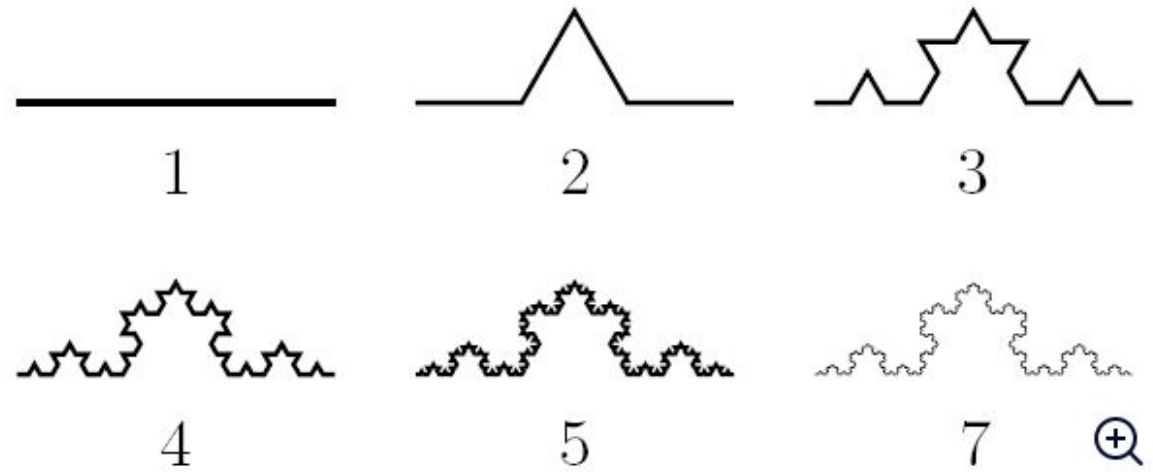
Бельгинова С.А.

s.belginova@aes.kz



Геометрические фракталы. Кривая Коха. Снежинка Коха

• **Кривая Коха** — фрактальная кривая, описанная в 1904 году шведским математиком Хельге фон Кохом. Копии кривой Коха, построенные (остриями наружу) на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую бесконечной длины, называемую снежинкой Коха.





Основные свойства кривой Коха

1. Она непрерывна, но нигде не дифференцируема. Ни в одной точке не имеет касательную.

2. Имеет бесконечную длину.

Пусть длина исходного отрезка равна 1.

На каждом шаге построения мы заменяем каждый из составляющих линию отрезков на ломаную, которая в $4/3$ раза длиннее.

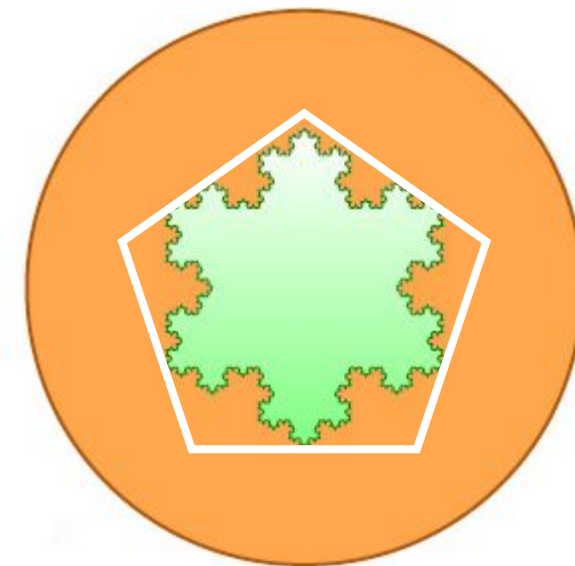
Значит, и длина всей ломаной на каждом шаге умножается на $4/3$: длина линии с номером n равна $(4/3)^n$

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{5} a^2$$

3. Снежинка Коха имеет конечную площ

Подробный вывод формулы по ссылке:

https://www.youtube.com/watch?v=skKxNSrg8U8&feature=emb_rel_pause





Геометрические фракталы. Системы Линдемайера

L-система это формальная грамматика, используемая для моделирования процессов роста и развития растений.

L-система определяется как кортеж $G=(V, w, P)$,

где V – алфавит, представляющий набор символов, содержащих элементы которые могут быть представлены графически,

w – аксиома, которая представляет собой строку символов из V , определяющая начальное состояния системы,

P - представляет собой набор правил производства новой строки, путем замены символов текущего состояния системы на ряд новых.

Правила грамматики *L*-системы применяются итеративно, начиная с начального состояния.



Системы Линдемайера (продолжение)

Рассмотрим L -систему, где алфавит состоит всего из двух символов

$V = \{a, b\}$. Аксиома $w = a$. Правила производства описываются как $p1: a \rightarrow ab$, $p2: b \rightarrow ab$.

Следуя итеративному принципу, каждое поколение кривой удваивается на каждом этапе: a , ab , $abab$, $abababab$. Графически a и b отображаются как два равных отрезка, соединенных под прямым углом.

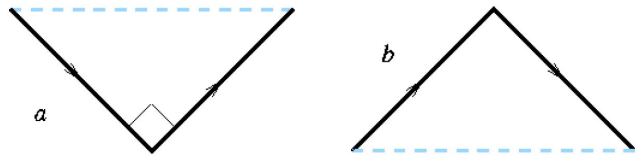


Рис. 1 - Графическое
представление
алфавита L -системы

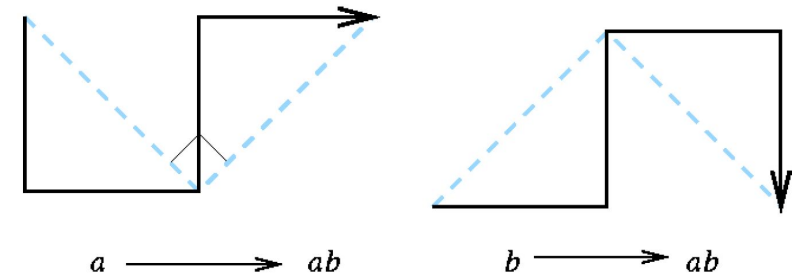


Рис. 2 - Графическое
представление
правил L -системы

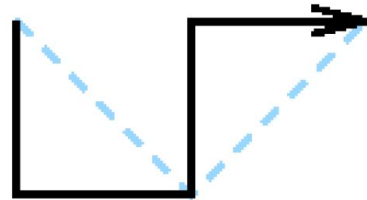


Начальные итераций процесса построения фрактала в L-системе

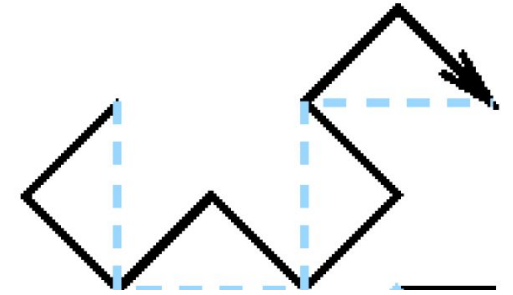
Gen. 1



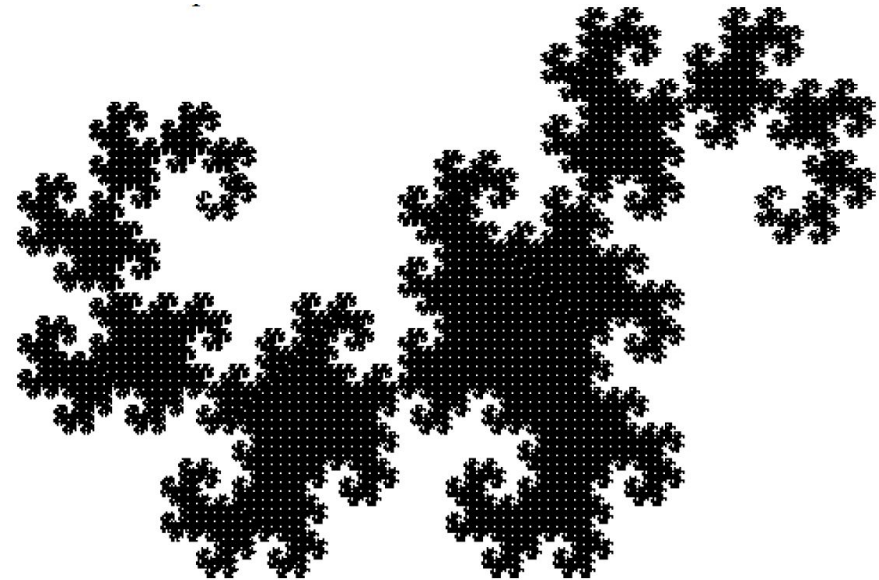
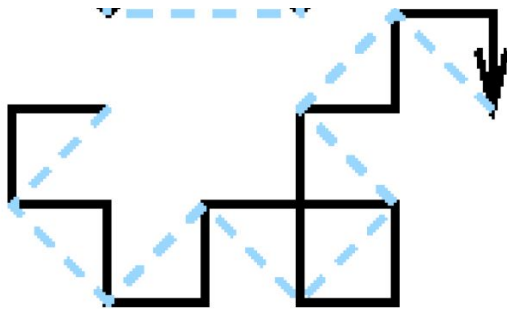
Gen. 2



Gen. 3



Gen. 4



Дракон Хартера-Хейтуэя



Геометрические фракталы. Треугольник Серпинского

Алгоритм построения:

- Равносторонний треугольник M_0 делится прямыми, параллельными его сторонам, на 4 равных равносторонних треугольника.
- Из треугольника удаляется центральный треугольник.
- Получается множество M_1 , состоящее из 3 оставшихся треугольников "первого ранга".
- Поступая точно так же с каждым из треугольников первого ранга, получим множество M_2 , состоящее из 9 равносторонних треугольников второго ранга.
- Продолжая этот процесс бесконечно, получим бесконечную последовательность $M_0, M_1, \dots, M_n, \dots$ пересечение членов которой есть треугольник Серпинского





Линейные геометрические фракталы. Ветвь папоротника.

Алгоритм построения основан на подобии построении всей ветви папоротника каждому ее листу. Заключим оригинальное изображение ветви в прямоугольное окно и проведем необходимые линейные и угловые измерения между опорными точками $p_0 - p_5$ лежащими на концах ветви и двух нижних листьев.

Вычислим длину листа $d = |p_0 - p_5|$, высоту окна $h_0 = d \cos(\varphi_0)$ и коэффициенты пропорций:

$$k_1 = \frac{|p_0 - p_1|}{h_0}, \quad k_2 = \frac{|p_0 - p_2|}{h_0}$$

$$m_1 = \frac{|p_1 - p_3|}{d}, \quad m_2 = \frac{|p_2 - p_4|}{d}, \quad m_3 = \frac{|p_2 - p_5|}{d}$$





Линейные геометрические фракталы. Ветвь папоротника.

Составим рекурсивную функцию построения ветви папоротника

$f(p_0, h, \psi, \delta, side, rec)$ I

Если $\{rec = 0\} \cup \{k_2 h < \delta\}$, то выход из рекурсии

$p_1 = p_0 + [0 \ k_1 h] R(\psi)$, $p_2 = p_0 + [0 \ k_2 h] R(\psi)$ - точки ветвления

$line(p_0 p_2)$ - рисование линии в окне 0

$f(p_1, m_1 h, \psi - side(\varphi_1 + \varphi_0), -side, \delta, rec - 1)$ - построение листа в окне 1

$f(p_2, m_2 h, \psi + side(\varphi_2 + \varphi_0), side, \delta, rec - 1)$ - построение листа в окне 2

$f(p_3, m_3 h, \psi - side(\varphi_3 - \varphi_0), side, \delta, rec - 1)$ - построение листа в окне 3

Здесь

$p_0 = [x_0 \ y_0]$ - координаты начальной точки на осевой линии окна;

h - высота ветви;

ψ - угол отклонения ветви от вертикали;

$side = \pm 1$ - направление изгиба ветви вправо (+1) или влево (-1) от оси окна;

δ - минимальная длина ветвящегося отрезка;

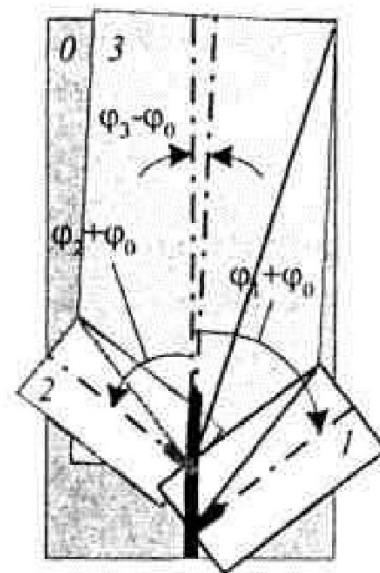
rec - максимальное число рекурсий ветвления.



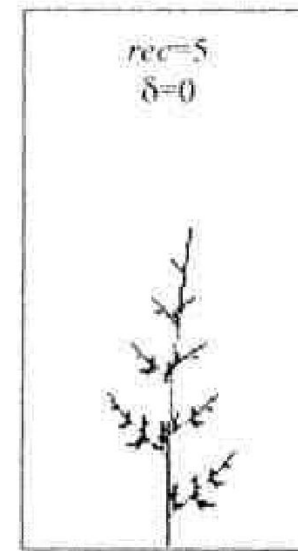
Линейные геометрические фракталы. Ветвь папоротника.

На каждом уровне рекурсии в текущем окне O высотой h , алгоритм вычисляет точки p_1 и p_2 , лежащие на осевой линии окна на расстояниях $|p_0 p_1| = k_1 h$ и $|p_0 p_2| = k_2 h$ от точки p_0 . Затем рисуется отрезок $p_0 p_2$ и трижды рекурсивно просчитывается с параметрами подобных окон 1, 2 и 3:

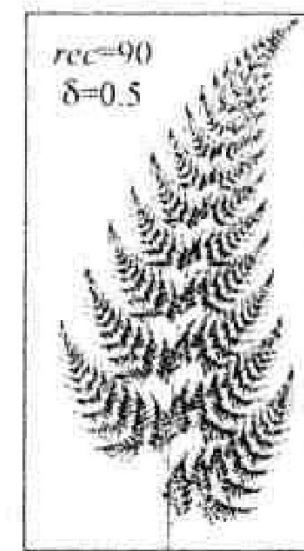
- точками ветвления p_1, p_2 и p_3
- высотами $m_1 h, m_2 h, m_3 h$
- углами отворота от осевой линии $-(\varphi_1 + \varphi_0), \varphi_2 + \varphi_0$ и $-(\varphi_3 - \varphi_0)$
- направлениями изгиба листьев относительно изгиба ветви согласно схеме на рис.
- параметром δ ;
- декрементированным значением $rec - 1$.



а



б



в



Алгебраические фракталы получают с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах..

Алгоритм построения основан на итеративном выражении:

$$z_{n+1} = F(z_n),$$

где $F(z)$ - какая-либо функция комплексной переменной.

К алгебраическим фракталам относят биоморфы . Термин был предложен Клиффордом Пикоувером для обозначения алгебраических фракталов, внешним видом напоминающих одноклеточные организмы.

Биоморфы получают из следующих функций:

$$z = z^2 + z^6 + c$$

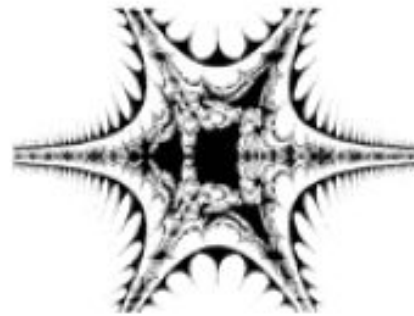
$$z = \sin(z^3) + c$$

$$z = z^2 + \sin(z) + c$$

$$z = z^3 + c$$

$$z = z^5 + c$$

$$z = e^z + \sin(z) + c$$





Бассейны Ньютона

Рассмотрим
уравнение:

$$p(z) = z^3 - 1$$

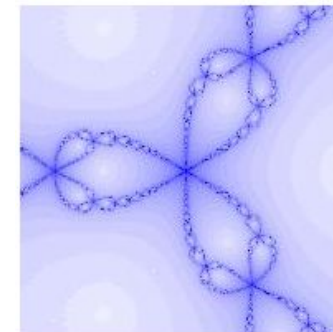
Общая формула метода Ньютона имеет вид:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}$$

Подставив $p(z)$ в формулу метода, получим итерационную формулу для построения фрактала:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2}$$

Итерационный процесс останавливается п $|z_{k+1}^3| \leq r_{\min}$





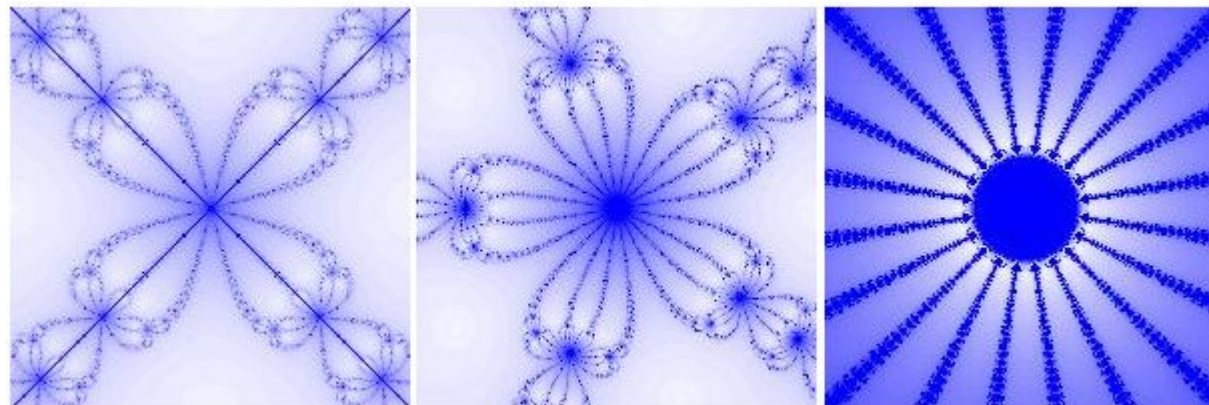
Бассейны Ньютона

Если записать формулу в общем виде:

$$p(z) = z^N - 1$$

$$|z_{k+1}^N - 1| \leq r_{\min}$$

то можно получить изображения фракталов более сложной формы:





Алгебраические фракталы. Множество Мендельброта.

Множество Мандельброта — это фрактал, определённый как множество точек c на комплексной плоскости, для которых итеративная последовательность

$$z_0 = 0$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

не уходит в бесконечность.

Таким образом, вышеуказанная последовательность может быть раскрыта для каждой точки c на комплексной плоскости следующим образом:

$$c = x + i \cdot y$$

$$Z_0 = 0$$

$$Z_1 = Z_0^2 + c$$

$$= x + i \cdot y$$

$$Z_2 = Z_1^2 + c$$

$$= (x + i \cdot y)^2 + x + i \cdot y$$

$$= x^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y - y^2 + x + i \cdot y$$

$$= x^2 - y^2 + x + (2 \cdot x \cdot y + y) \cdot i$$

$$Z_3 = Z_2^2 + c = \dots$$

и так далее.

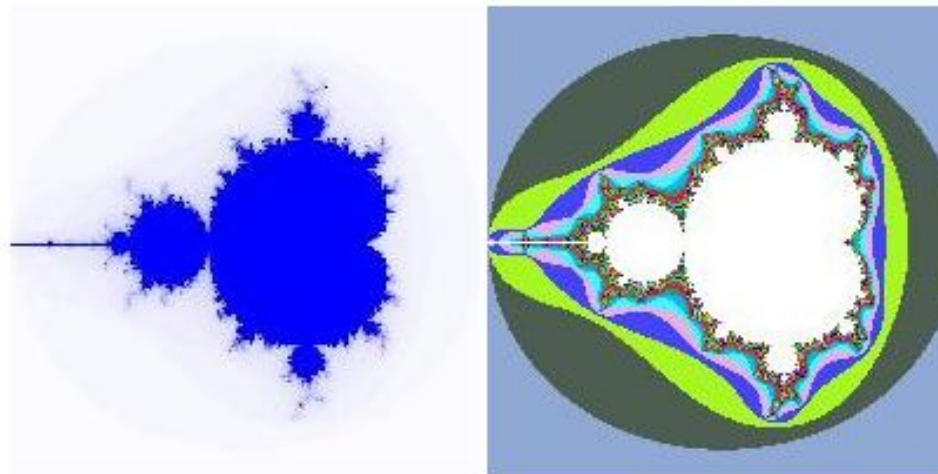


Множество Мандельброта

Если переформулировать эти выражения в виде итеративной последовательности значений координат комплексной плоскости x и y , т. е. заменив z_n на $x_n + i \cdot y_n$, а c на $p + i \cdot q$, мы получим:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + p \\ y_{n+1} &= 2 \cdot x_n \cdot y_n + q\end{aligned} \quad (*)$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$





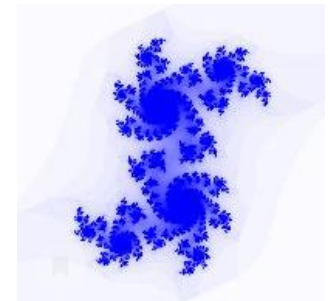
Фрактал Жюлиа

Рассмотрим ту же последовательность комплексных чисел, что и для множества Мандельброта:

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, k = 0, 1, 2, \dots$$

Исходные данные, этапы построения и условия остановки – те же, что и для фрактала Мандельброта, за исключением:

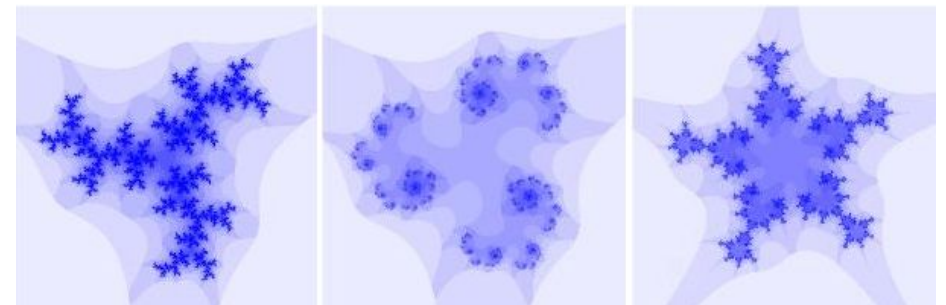
- значение c фиксируется: $c = 0,36 + 0,36i$
- начальное значение z_0 перебирается дискретно в области $C \in [-1; 1] + [-1; 1]i$



Рассматривая множество в общем виде:

$$z_{k+1} = z_k^N + c$$

Можно получать разнообразные фрактальные множества:

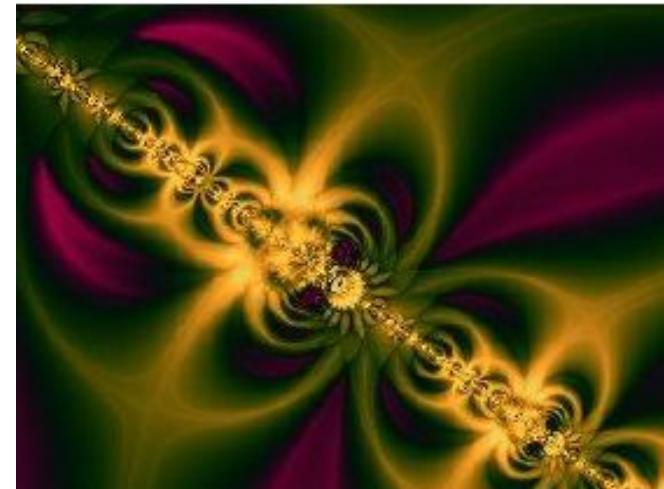
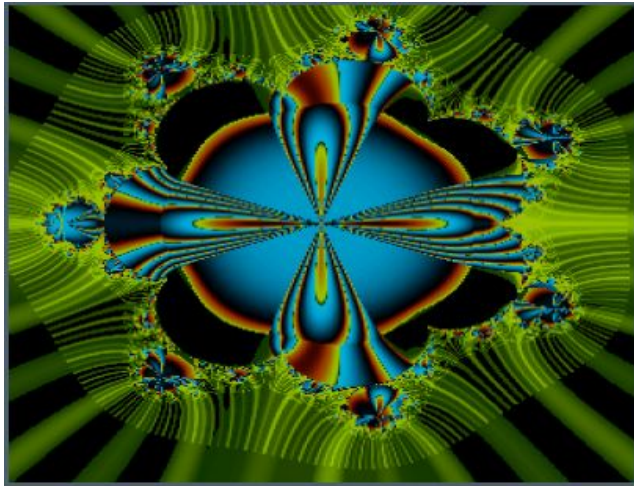




Примеры фрактальных изображений

$$z_{i+1} = z_i^8 + c$$

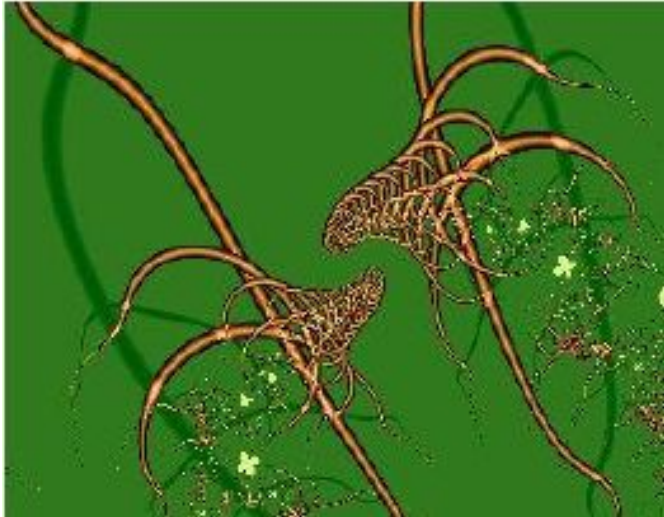
$$z = z - \frac{\sin z}{0,0000000000000001 + \cos z} \cdot \frac{z^8 - z^6 - \sin z - zc - 1}{8z^7 - 6z^5 - \cos z - c}$$





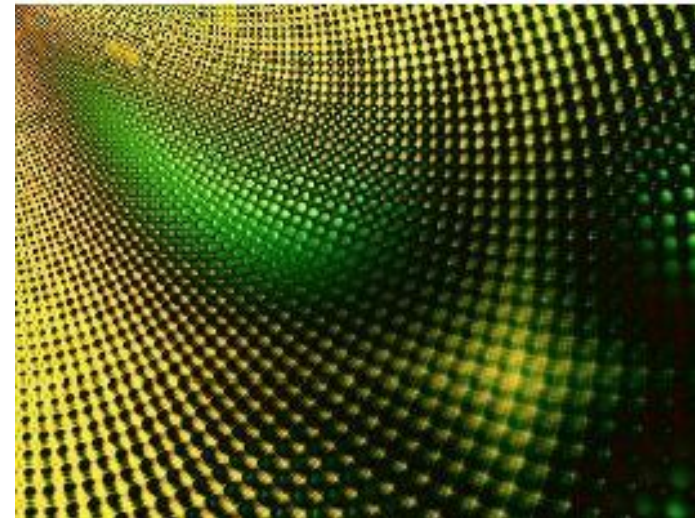
Примеры фрактальных изображений

“Встреча в
аквариуме”²
 $z = \left(\frac{c}{\cos z} \right)^2$



“Иной”

$$z = z - \frac{z^5 - z^3 - z^2 \sin z - z - \sin z}{4z^3 - z^2 \cos z - 1} + c$$

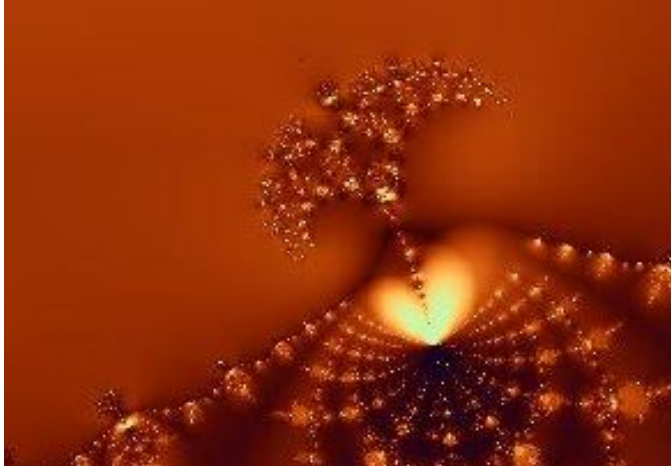




Примеры фрактальных изображений

“Огненный цветок”

$$z = z - \frac{z^3 \sin z - \sin z - z}{3z^2 \cos z - \cos z - 1} + c$$



“Сфинкс”

$$z = z - \frac{z^6 - z^5(1 - \sin z) - cz^4 \sin z - cz \sin z - z}{6z^5 - 5z^4 - z^5 \cos z - cz^4 \cos z - cz \cos z - 1}$$





Программы генерации фракталов

Ultra Fractal 5.04

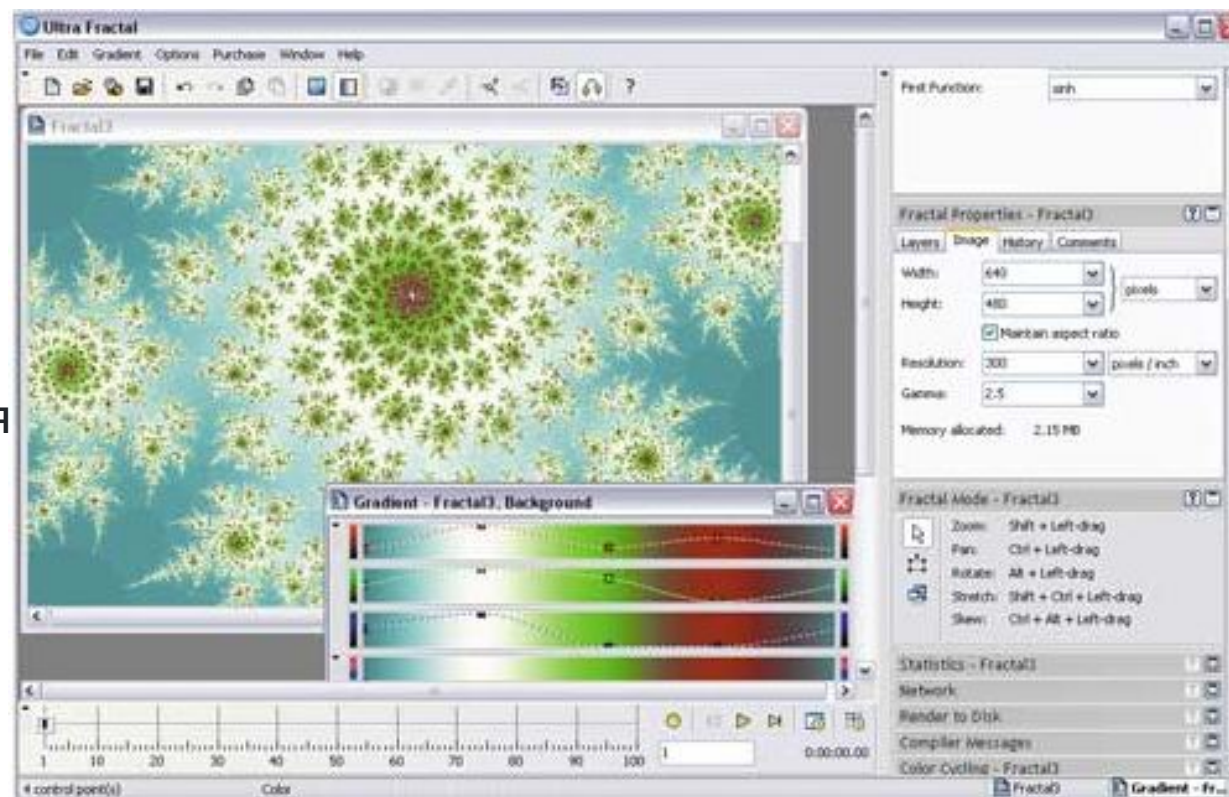
Разработчик: Frederik Slijkerman

Сайт: <http://www.ultrafractal.com/>

Размер дистрибутива: 6,26 Мбайт

Способ распространения: shareware

(30-дневная демо-версия, включающая
водяные знаки на изображениях)





Программы генерации фракталов

ChaosPro 4.0.228

Разработчик: Martin Pfungstl

Сайт

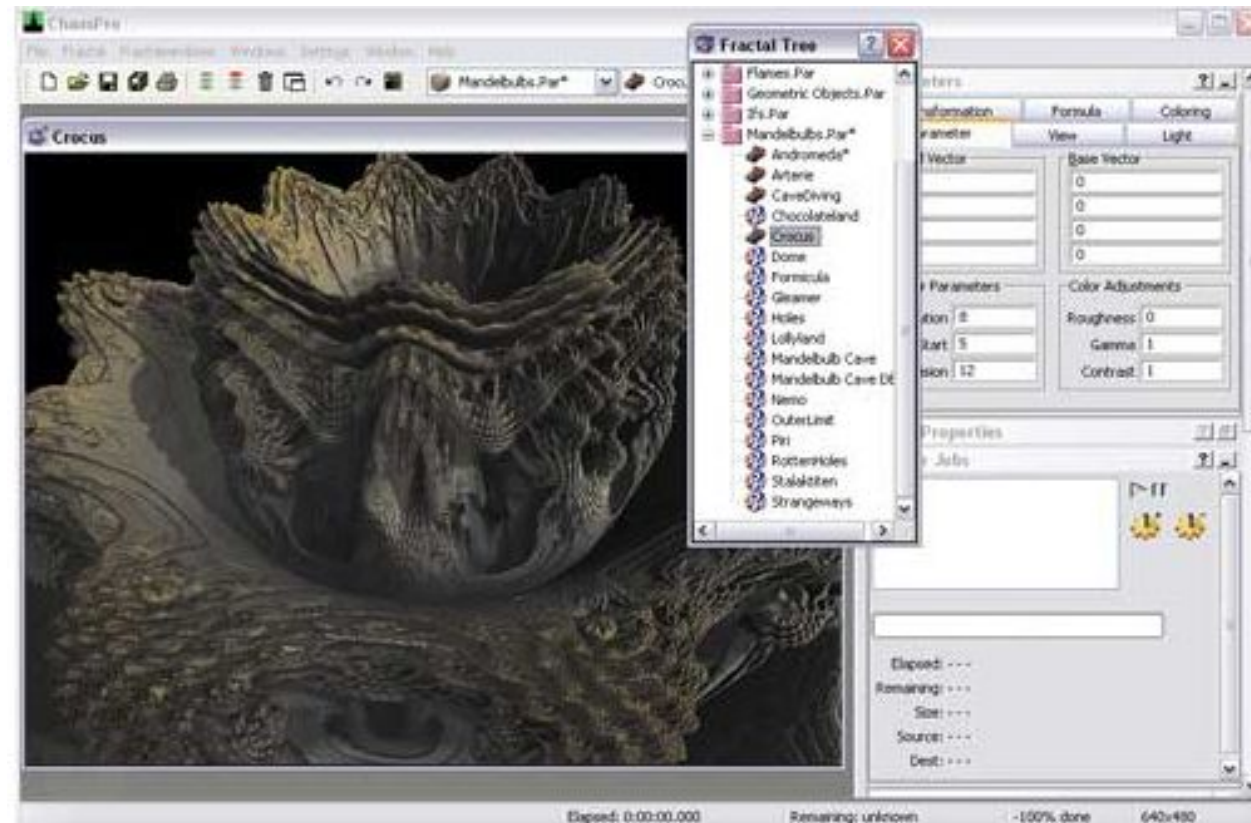
программы: <http://www.chaospro.de/>

Размер дистрибутива: 7,23 Мбайт

Способ распространения: freeware

(<http://www.chaospro.de/download.php>)

Цена: бесплатно





Программы генерации фракталов

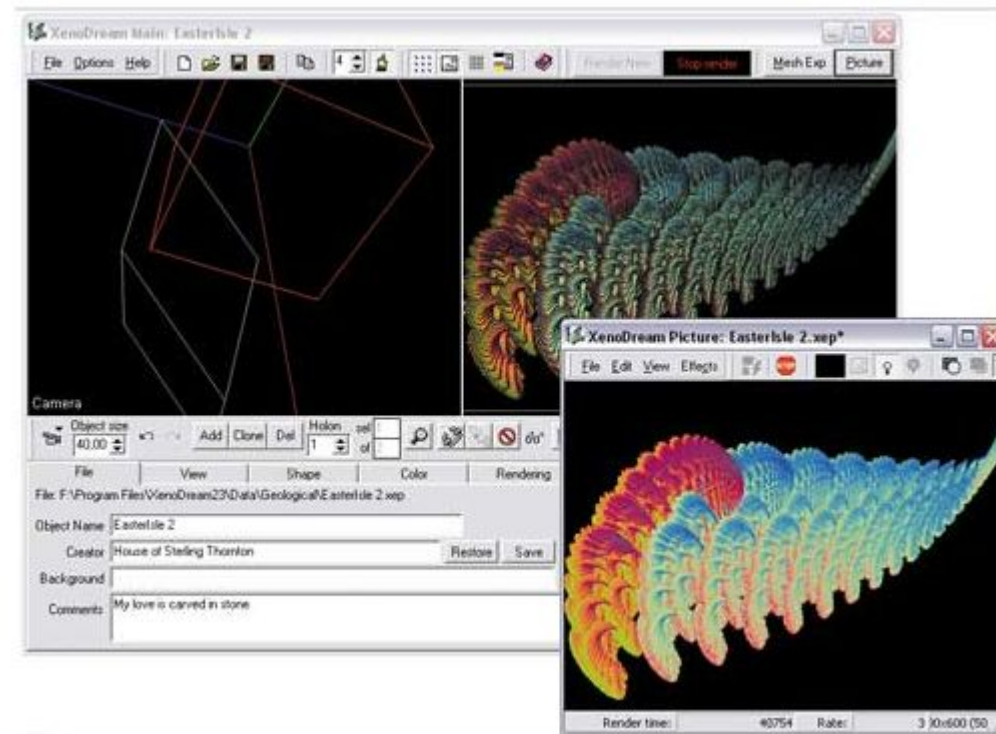
XenoDream 2.3

Разработчик: XenoDream Software, LLC

Сайт программы: <http://xenodream.com/>

Размер дистрибутива: 6,68 Мбайт

Способ распространения: shareware
(функционально ограниченная демо-версия, включающая водяные знаки на изображениях)





Программы генерации фракталов

Fractracer 1.1

Разработчик: Fractracer Lab

Сайт

программы: <http://fractracer.com/>

Размер дистрибутива: 32-битная

версия — 3,5 Мбайт; 64-битная

версия — 4 Мбайт

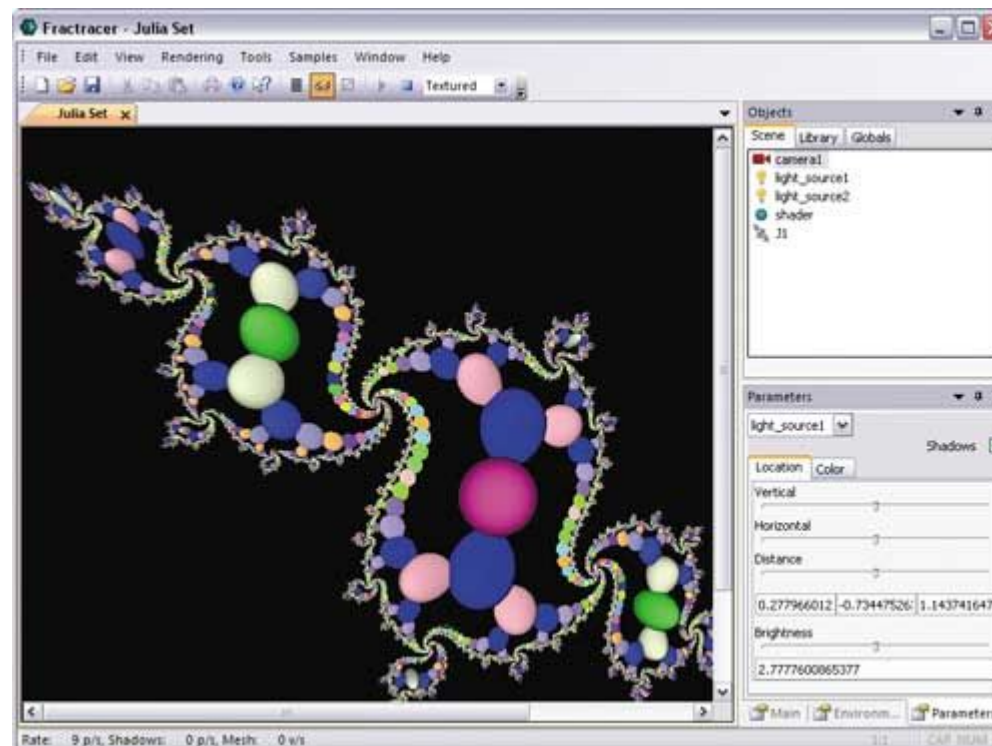
Способ

распространения: shareware

(функционально ограниченная

демо-версия, включающая

водяные знаки на изображениях





Программы генерации фракталов

Apophysis 2.02 Stable/2.09 Beta

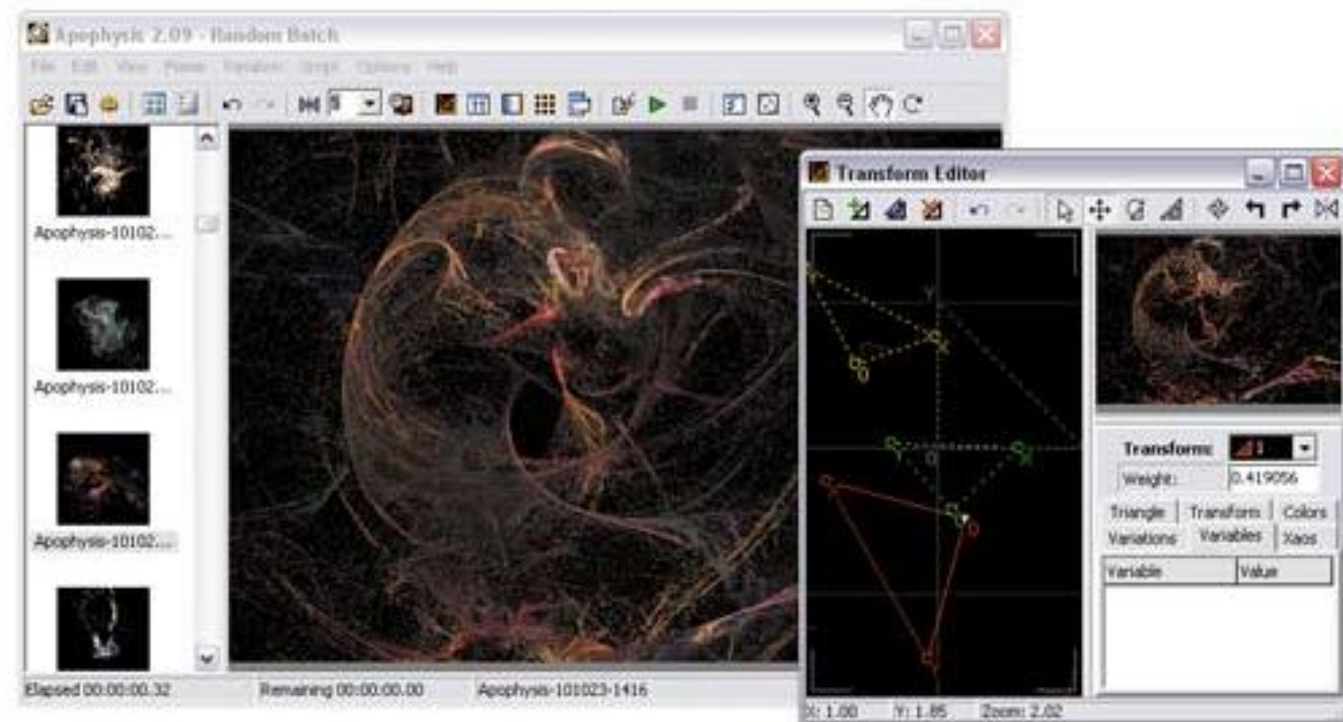
Разработчик: Peter Sdobnov, Piotr Borys
Ronald Hordijk

Сайт

программы: <http://www.apophysis.org/>

Размер дистрибутива: 2,58 Мбайт

Способ распространения: freeware





Программы генерации фракталов

Fractal Extreme 2.04

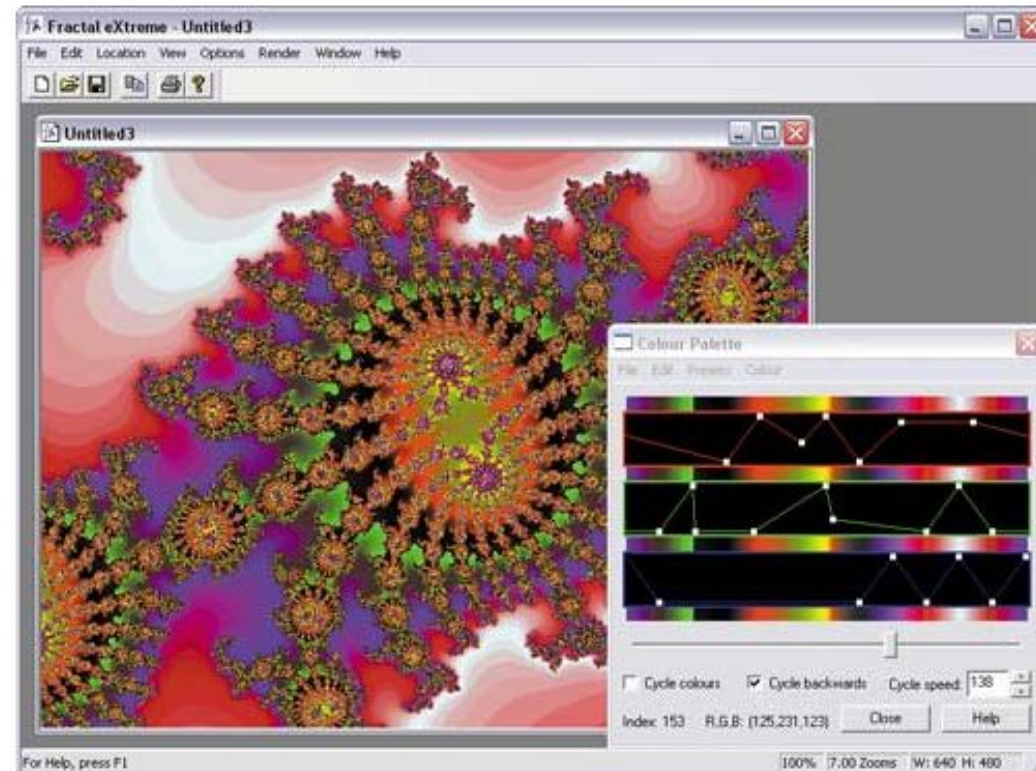
Разработчик: Cygnus Software

Сайт

программы: <http://www.cygnus-software.com/>

Размер дистрибутива: 32-битная версия —
12 Мбайт; 64-битная версия — 10,63
Мбайт

Способ распространения: shareware (15-
дневная демо-версия)





Программы генерации фракталов

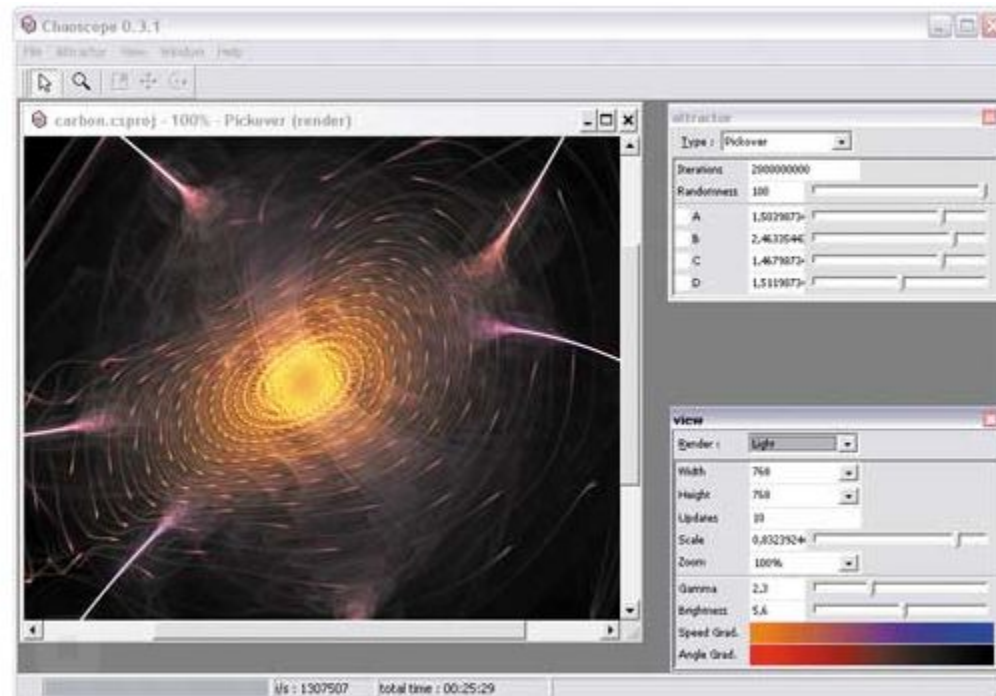
Chaoscope 0.3.1

Разработчик: Chaoscope Team

Сайт программы: <http://www.chaoscope.org/>

Размер дистрибутива: 2,5 Мбайт

Способ распространения: freeware





Программы генерации фракталов

ХаoS 3.5

Разработчик: GNU ХаoS Contributors

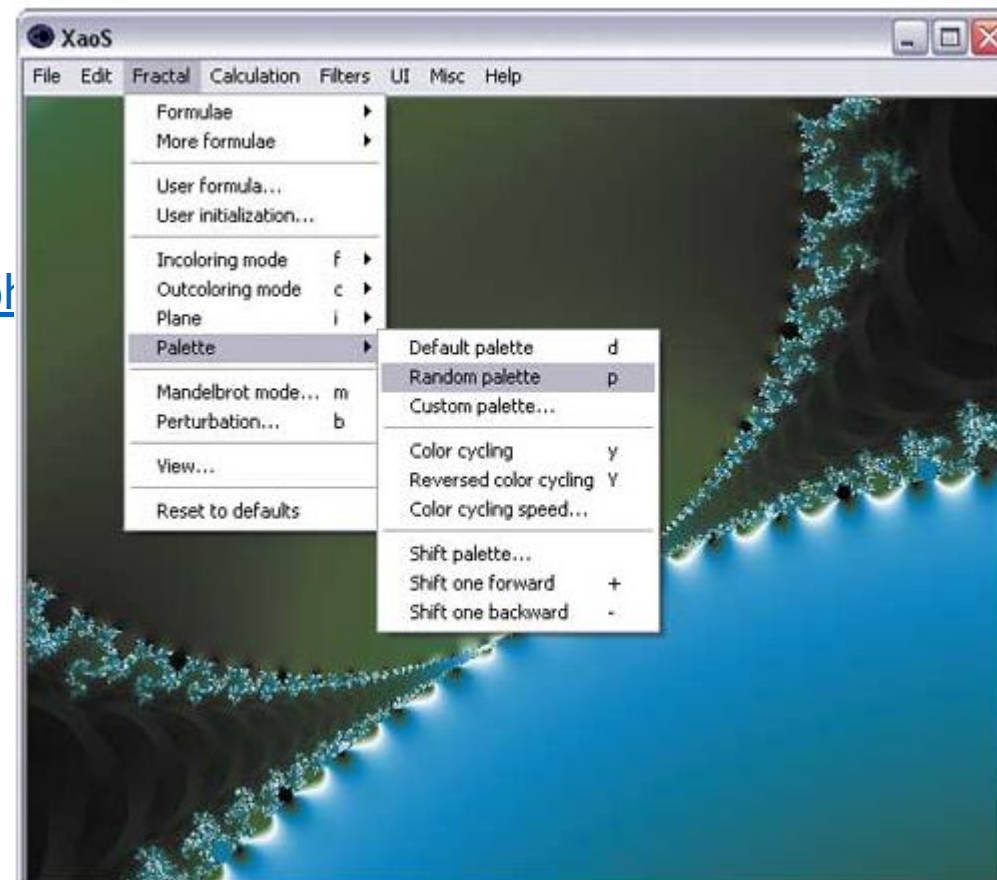
Сайт

программы: <http://wmi.math.u-szeged.hu/xaos/doku.pl>

Размер дистрибутива: 1,46 Мбайт

Способ распространения: GPL/freeware

Цена: бесплатно





Контрольные вопросы

Вопрос	
Определение Кривой Коха	Бассейн Ньютона
Основные свойства кривой Коха	Множество Мендельброта.
Системы Линдемайера	Фрактал Жюлиа
Треугольник Серпинского	Примеры фрактальных изображений
Ветвь папортника.	Программы генерации фракталов
Примеры биоморфов	