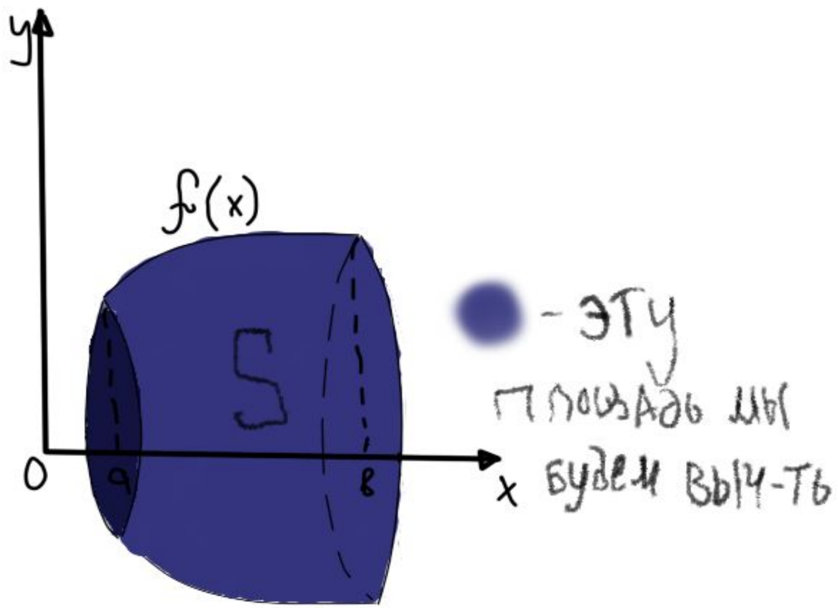
ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

ВЫПОЛНИЛА ДУБИНИНА В. А.

ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ

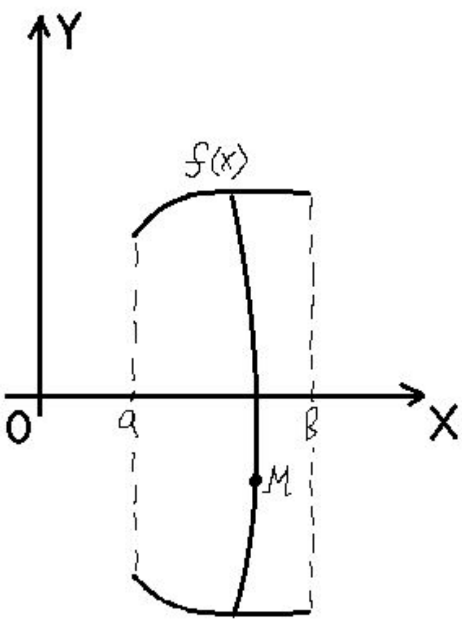


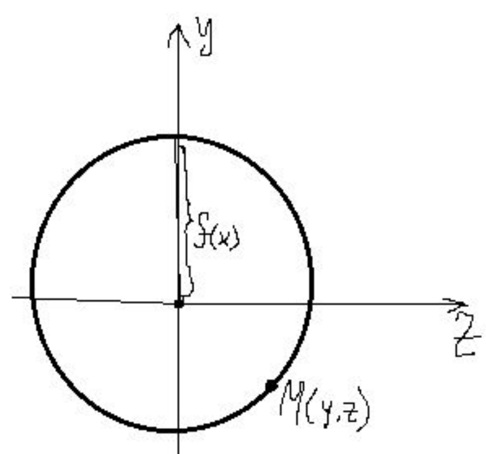
Поверхность вращения — поверхность, образуемая при вращении вокруг прямой (оси поверхности) произвольной линии (прямой, плоской или пространственной кривой).

Для того, чтобы вычислить данную площадь, необходимо воспользоваться формулой：

$$S = 2\pi \, * \, \int_a^b f(x) * \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{dx}$$

Как её вывести?
Я рада, что вы спросили. Для начала зададим плоскость вращения:





Поперечный разрез фигуры

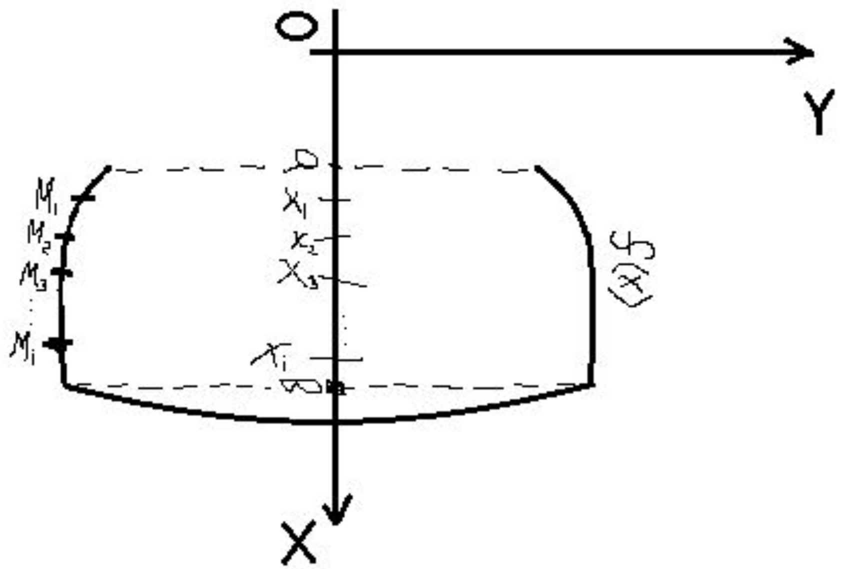
Из уравнения окружности:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)|$$

Плоскость задана.

Отметим на оси вращения точки:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < b$$



Введём некоторые обозначения:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i\}$$

При очень большом приближении (и частом делении), части, на которые мы поделили фигуру становятся усеченными конусами. Из суммы боковых поверхностей эти конусов и складывается площадь поверхности нашей фигуры.

Это записывается как:

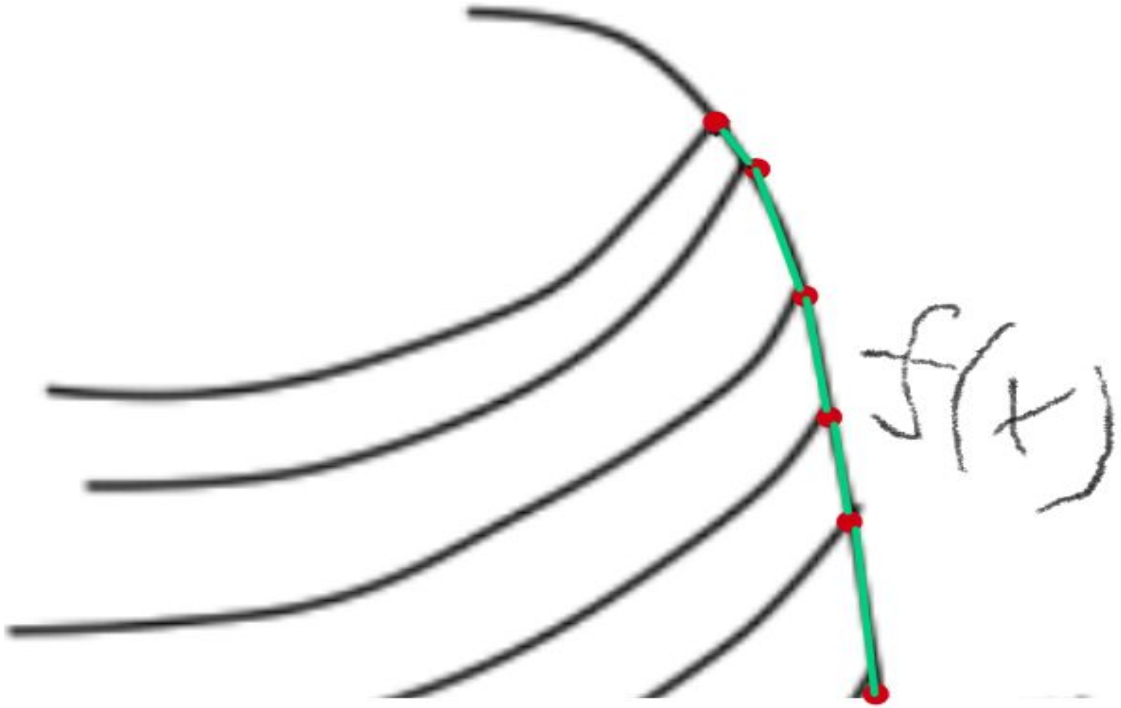
$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$$

Так как делим мы на очень маленькие кусочки, то второе выражение правильнее записать в виде предела:

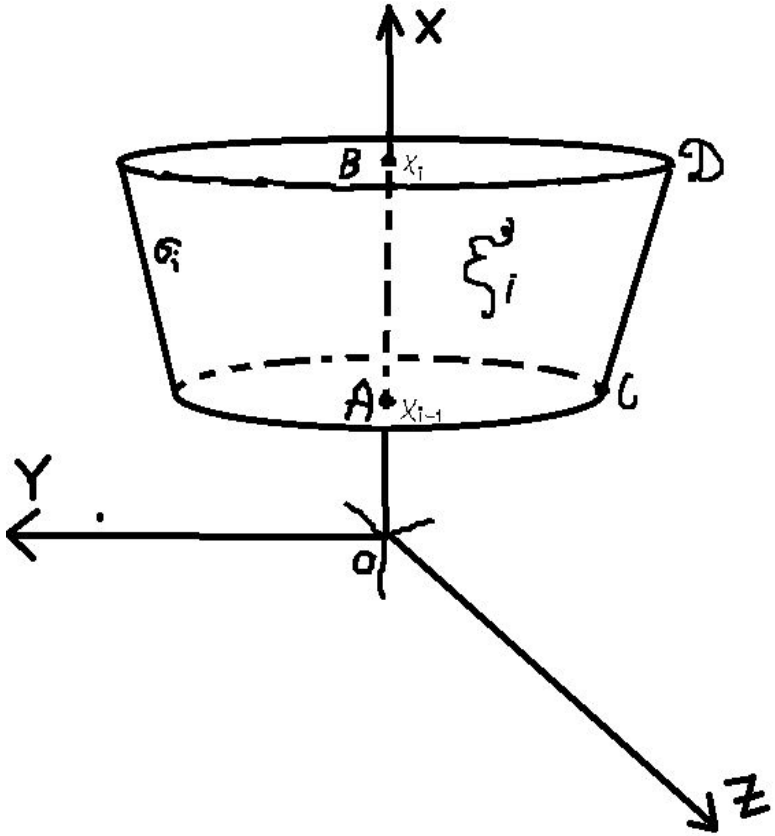
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$$

Зачем нам лямбда? Для математического обоснования наших дей ствий , в конце станет понятнее (может быть).

На этом слай де показано приближение сегментированной линии заданной нашей функцией .



Далее рассмотрим один из усечённых конусов и распишем σ_i по формуле для боковой поверхности усечённого конуса.



$$AC = f(x_{i-1}) \quad BD = f(x_i)$$
$$AB = x_i - x_{i-1}$$

Тогда по формуле из геометрии:

$$\sigma_i = \frac{1}{2}(2\pi * AC + 2\pi * BD) * DC$$

$$DC = \sqrt{(BD - AC)^2 + AB^2} =$$
$$= \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + \Delta x}$$

$$\sigma_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \sqrt{\Delta y_i{}^2 + \Delta x_i{}^2}$$

По отношению к $\Delta {y_i}^2$ скажем, что на отрезке AB най дется такая $\boldsymbol{\xi_i}$ что вышеуказанное выражение принимает вид:

$$\sigma_i = 2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \sqrt{(f'(\xi_i))^2+1}\, \Delta x_i$$

Далее прибавляем и вычитаем $f(\xi_i)$, группируем с дробной частью, и путем несложных преобразований получаем:

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(\frac{f(x_i)-f(\xi_i)}{2} + \frac{f(x_{i-1})-f(\xi_i)}{2}\right)\sqrt{(f'(\xi_i))^2+1} * \Delta x_i$$
$$+ \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i) * \sqrt{(f'(\xi_i))^2+1} * \Delta x_i$$

Вторая часть этого выражения это определённый интеграл:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{(f'(x))^2+1}dx$$

А первое слагаемое после использования свой ства непрерывной функции приводится к виду:

$$|S - A| = 2\pi\varepsilon \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(f'(\xi_i))^2 + 1} * \Delta x_i$$

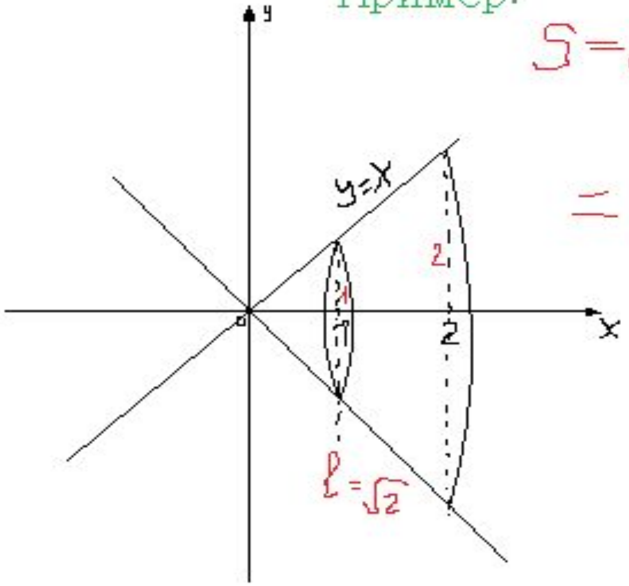
А вот это сумма всех образующих, т.е. длина линии

$$|S - A| \leq 2\pi\varepsilon L$$

По определению ε – это сколь угодно малое число, следовательно:

$$S = A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{(f'(x))^2 + 1}dx$$

Пример:



$$S=2\pi\int_1^2 x\cdot\sqrt{1+1^2}\,dx=2\pi\left(\sqrt{2}\int_1^2 x\,dx\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\pi\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1^2}{2}\right)=\pi\cdot3\cdot\sqrt{2}$$

Найдем то же самое геометрически:

$$S=\pi\cdot(r_1+r_2)\cdot l=\pi(1+2)\cdot\sqrt{2}=$$

$$=\pi\cdot3\cdot\sqrt{2}$$

А ТЕПЕРЬ ДАВАЙТЕ ДОКАЖЕМ РАЗЛИЧНЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ, ЭТО ЖЕ ТАК КРУТО

(Можно ненадо я хочу спать)

ДРУГИЕ СЛУЧАИ

1. Функция задана параметрически

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то площадь поверхности, полученной вращением данной кривой вокруг оси , рассчитывается по формуле.

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) * \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

2. Если линия задана в полярной системе координат

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$, и функция $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную $r'(\varphi)$ на данном промежутке, то площадь поверхности, полученной вращением данной кривой вокруг полярной оси, рассчитывается по формуле:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r * \sin\varphi * \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

α и β – угловые значения, соответствующие концам кривой

3. Если кривая вращается вокруг произвольной оси

При вращении дуги кривой вокруг произвольной оси, то площадь поверхности вращения будет выражаться интегралом:

$$S = 2\pi \int_{A}^{B} R dl$$

Где $R-$ расстояние от точки на кривой до оси вращения, $dl-$ дифференциал кривой, A и $B-$ пределы интегрирования, соответствующие концам кривой.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

«Кто понял тот молодец а кто не понял тот не понял…»