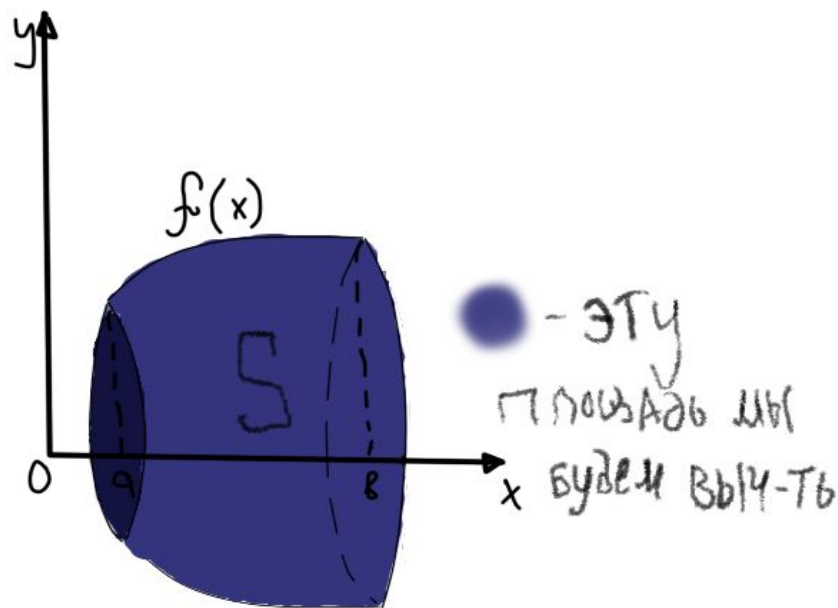


П Л О Щ А Д Ъ  
П О В Е Р Х Н О С Т И  
В Р А Щ Е Н И Я

ВЫПОЛНИЛА ДУБИНИНА В. А.

# ПОВЕРХНОСТЬ ВРАЩЕНИЯ



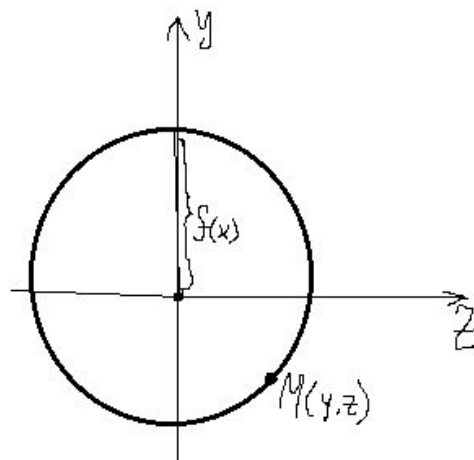
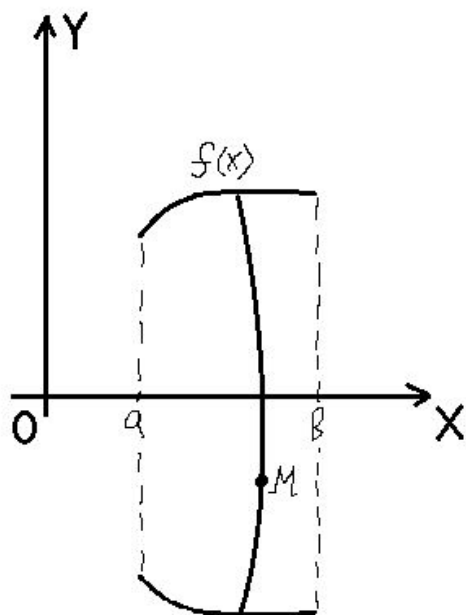
**Поверхность вращения** — поверхность, образуемая при вращении вокруг прямой (оси поверхности) произвольной линии (прямой, плоской или пространственной кривой).

Для того, чтобы вычислить данную площадь, необходимо воспользоваться формулой :

$$S = 2\pi * \int_a^b f(x) * \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Как её вывести?

Я рада, что вы спросили. Для начала зададим плоскость вращения:



Поперечный разрез  
фигуры

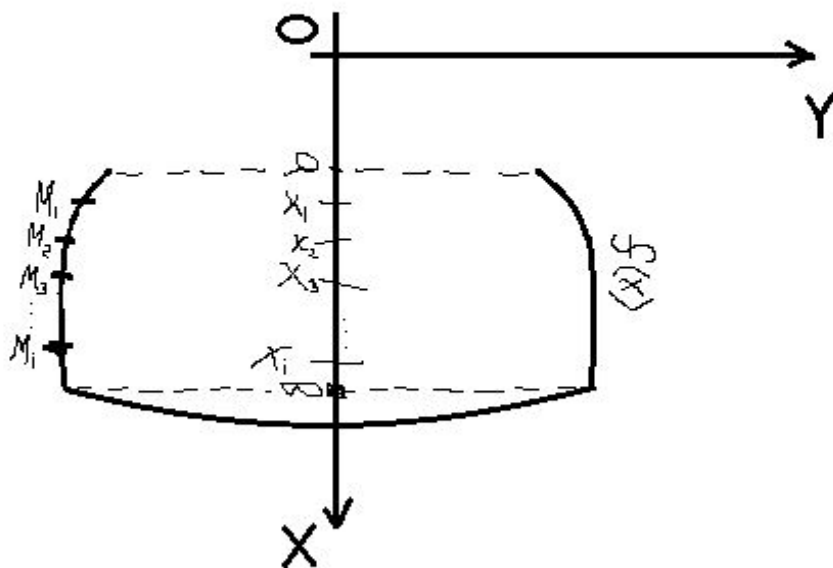
Из уравнения  
окружности:

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)|$$

Плоскость задана.

Отметим на оси вращения точки:

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_i < b$$



Введём некоторые обозначения:

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

$$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i\}$$

При очень большом приближении (и частом делении), части, на которые мы поделили фигуру становятся усеченными конусами. Из суммы боковых поверхностей эти конусов и складывается площадь поверхности нашей фигуры.

Это записывается как:

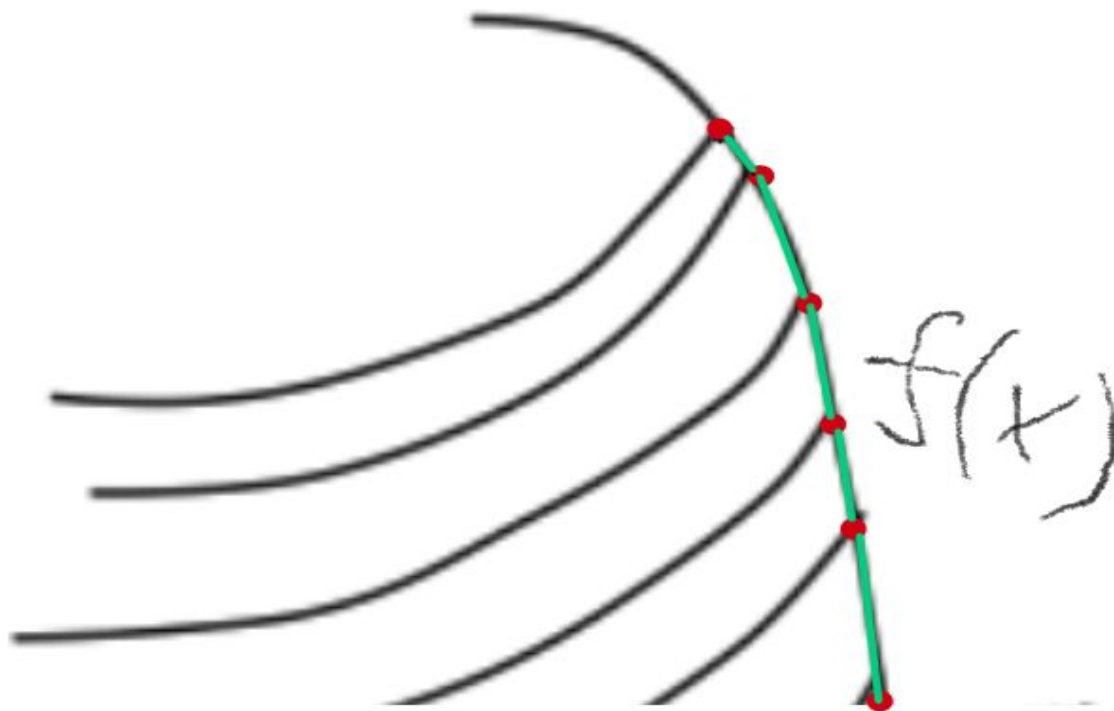
$$S = \sum_{i=1}^n S_i \approx \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

Так как делим мы на очень маленькие кусочки, то второе выражение правильнее записать в виде предела:

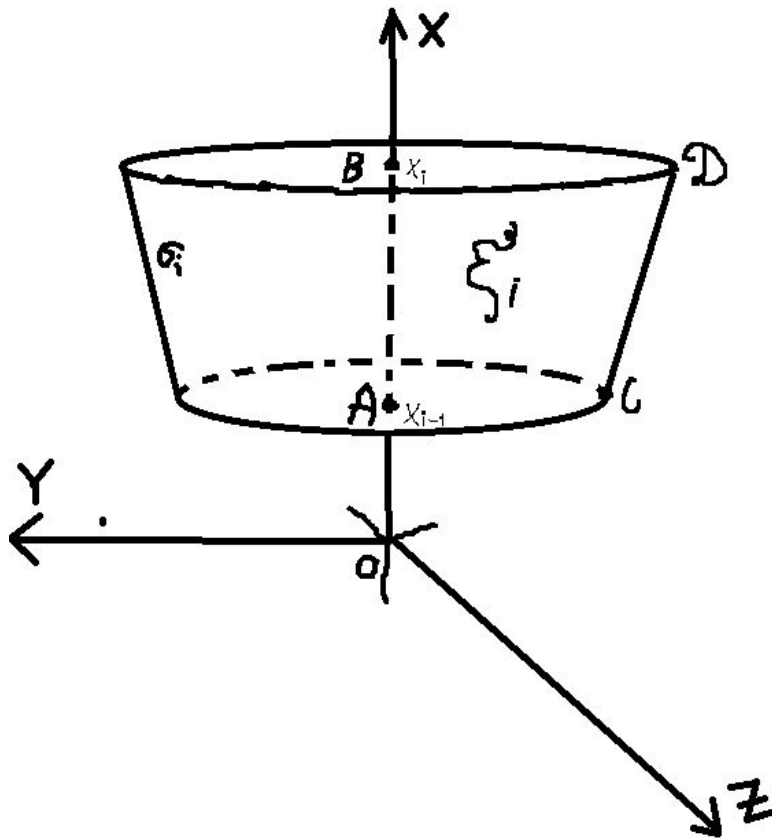
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

Зачем нам лямбда? Для математического обоснования наших действий, в конце станет понятнее (может быть).

На этом слайде показано приближение сегментированной линии заданной нашей функцией.



Далее рассмотрим один из усечённых конусов и распишем  $\sigma_i$  по формуле для боковой поверхности усечённого конуса.



$$AC = f(x_{i-1}) \quad BD = f(x_i)$$

$$AB = x_i - x_{i-1}$$

Тогда по формуле из геометрии:

$$\sigma_i = \frac{1}{2} (2\pi * AC + 2\pi * BD) * DC$$

$$DC = \sqrt{(BD - AC)^2 + AB^2} =$$

$$= \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + \Delta x^2}$$

$$\sigma_i = 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$$

По отношению к  $\Delta y_i^2$  скажем, что на отрезке АВ най дется такая  $\xi_i$  что вышеуказанное выражение принимает вид:

$$\sigma_i = 2\pi \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \sqrt{(f'(\xi_i))^2+1} \Delta x_i$$

Далее прибавляем и вычитаем  $f(\xi_i)$  , группируем с дробной частью, и путем несложных преобразований получаем:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi \left( \frac{f(x_i) - f(\xi_i)}{2} + \frac{f(x_{i-1}) - f(\xi_i)}{2} \right) \sqrt{(f'(\xi_i))^2+1} * \Delta x_i \\ + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) * \sqrt{(f'(\xi_i))^2+1} * \Delta x_i$$

Вторая часть этого выражения это определённый интеграл:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{(f'(x))^2+1} dx$$



А первое слагаемое после использования свойства непрерывной функции приводится к виду:

$$|S - A| = 2\pi\epsilon \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(f'(\xi_i))^2 + 1} * \Delta x_i$$

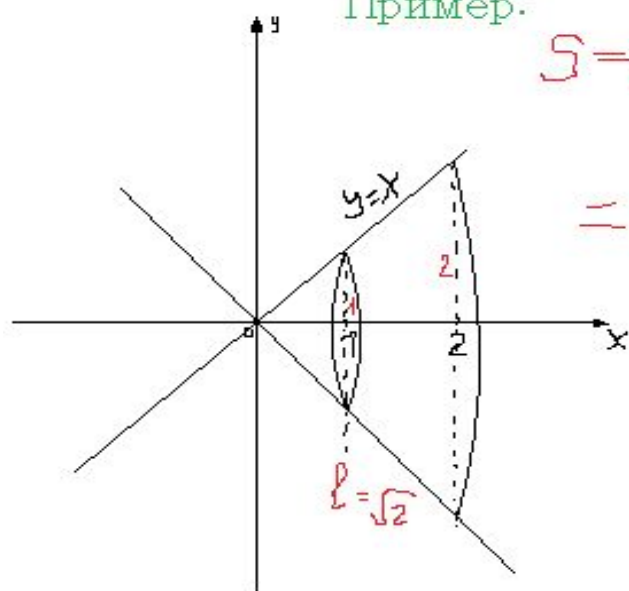
А вот это сумма всех образующих, т.е. длина линии

$$|S - A| \leq 2\pi\epsilon L$$

По определению  $\epsilon$  - это сколь угодно малое число, следовательно:

$$S = A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{(f'(x))^2 + 1} dx$$

Пример:



$$S = 2\pi \int_1^2 x \cdot \sqrt{1+1^2} dx = 2\pi \left( \sqrt{2} \int_1^2 x dx \right) =$$
$$= 2\sqrt{2} \pi \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$$

Найдем то же самое геометрически:

$$S = \pi (r_1 + r_2) \cdot l = \pi (1+2) \cdot \sqrt{2} =$$
$$= \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2}$$

А ТЕПЕРЬ ДАВАЙТЕ  
ДОКАЖЕМ  
РАЗЛИЧНЫЕ  
ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ,  
ЭТО ЖЕ ТАК КРУТО

(Можно ненадо я хочу спать)

# ДРУГИЕ СЛУЧАИ

1. Функция задана параметрически

Если кривая задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$ , то площадь поверхности, полученной вращением данной кривой вокруг оси, рассчитывается по формуле.

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) * \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

2. Если линия задана в полярной системе координат

Если кривая задана в полярных координатах уравнением  $r = r(\varphi)$  ( $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ), и функция  $r(\varphi)$  имеет непрерывную производную  $r'(\varphi)$  на данном промежутке, то площадь поверхности, полученной вращением данной кривой вокруг полярной оси, рассчитывается по формуле:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r * \sin \varphi * \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

$\alpha$  и  $\beta$  – угловые значения, соответствующие концам кривой

3. Если кривая вращается вокруг произвольной оси

При вращении дуги кривой вокруг произвольной оси, то площадь поверхности вращения будет выражаться интегралом:

$$S = 2\pi \int_A^B R dl$$

Где  $R$  – расстояние от точки на кривой до оси вращения,  $dl$  – дифференциал кривой,  $A$  и  $B$  – пределы интегрирования, соответствующие концам кривой.

СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ

«Кто понял тот молодец а кто не понял тот не понял...»