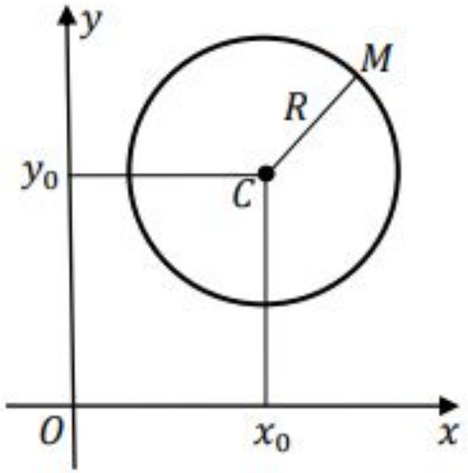
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ПРАКТИКА

. Окружность

Определение окружности

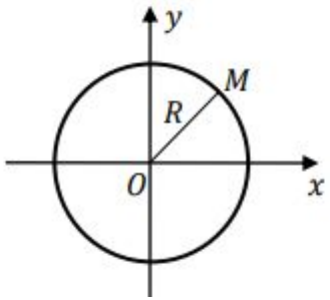
Окружностью называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой её центром. Пусть точка $C(x_0; y_0)$ – центр окружности, R – расстояние от любой точки окружности до её центра (это расстояние называют радиусом окружности), $M(x; y)$ – произвольная точка окружности.



. Каноническое уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

уравнение называется ***нормальным уравнением окруж ности.***



Если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и называется ***каноническим (простейшим) уравнением окружности***

<u>Пример. 1</u>

Построить окружность $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.

Решение. Для того, чтобы построить окружность, нужно знать координаты ее центра и радиус. Приведем уравнение окружности к виду (1). Для этого сгруппируем слагаемые, содержащие *x*, и отдельно слагаемые, содержащие *y*:

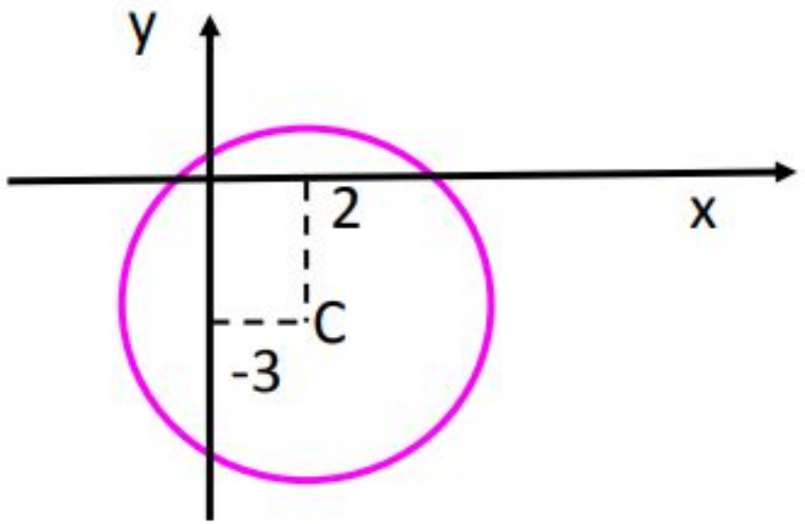
$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + 4 = 0$$

Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 4 = 0.$$

Тогда уравнение окружности получим в виде:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2.$$



Отсюда координаты центра C(2; -3) и радиус R = 3 окружности; построим окружность

Пример 1. Составить каноническое или нормальное уравнение окружности с центром в точке C радиуса R: $C(0;0)$, $R = 2$;

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением окружности радиуса R: $x^2 + y^2 = R^2$. В условиях примера $R = 2$. Подставляем это значение в каноническое уравнение окружности. Получаем: $x^2 + y^2 = 2^2$. Преобразуем: $x^2 + y^2 = 4$.

Пример. 2. Дано каноническое или нормальное уравнение окружности Определить координаты её центра и радиус:

1) $x^2 + y^2 = 49$; 2) $(x+4)^2 + (y+8)^2 = \frac{12}{7}$;

Решение.

1) Сравним данное уравнение с каноническим уравнением окружности радиуса R: $x^2 + y^2 = R^2$. Преобразуем данное уравнение: $x^2 + y^2 = 7^2$. Центр окружности находится в точке $C(0;0)$, радиус $R = 7$.

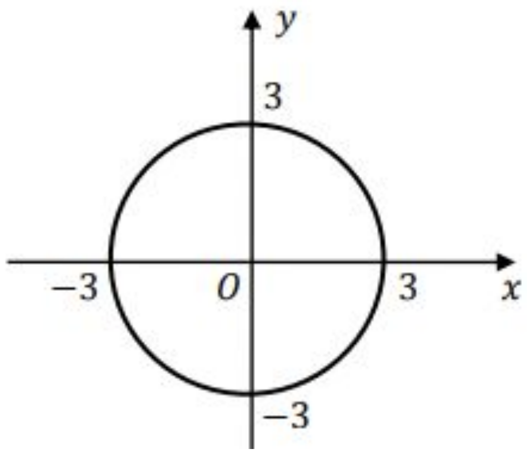
2) Сравним данное уравнение с нормальным уравнением окружности с центром в точке $C(x_0; y_0)$ радиуса R: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Преобразуем данное уравнение: $(x-(-4))^2 + (y-(-8))^2 = \left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right)^2$. Центр окружности находится в точке $C(-4;-8)$, радиус $R = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Пример.3. Построить окружность по её каноническому или нормальному уравнению:

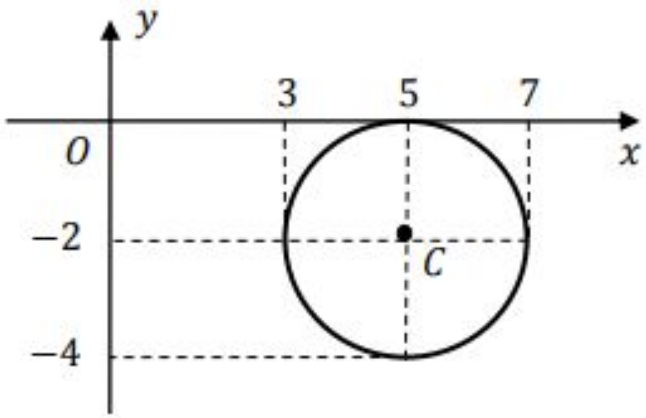
1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$;

Решение.

1) $x^2 + y^2 = 9$. Преобразуем уравнение: $x^2 + y^2 = 3^2$. Центр окружности находится в точке $C(0;0)$, радиус $R = 3$ (рис. 1.4).



2) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 4$. Преобразуем уравнение: $(x-5)^2 + \left(y-(-2)\right)^2 = 2^2$. Центр окружности находится в точке $C(5;-2)$, радиус $R = 2$



Пример 4. Среди приведённых уравнений указать уравнения окружности, найти центр и радиус каждой из них:

1) $x^2 + y^2 = 4;$ 2) $y = -4x + 1;$

3) $x^2 - y^2 = 4;$ 4) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 1;$

5) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 0;$ 6) $x = -5;$

7) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = -2;$ 8) $x^2 + (y+7)^2 = 5;$

9) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 11 = 0;$ 10) $y^2 = 7x - 2;$

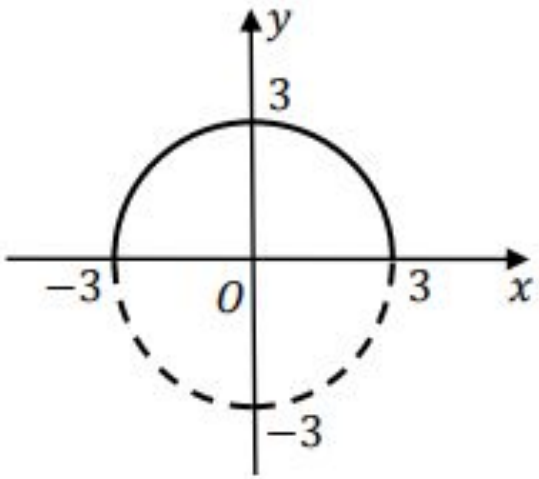
11) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0;$ 12) $x^2 + y^2 + 8y + 16 = 0;$

<u>Пример.5.</u> Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

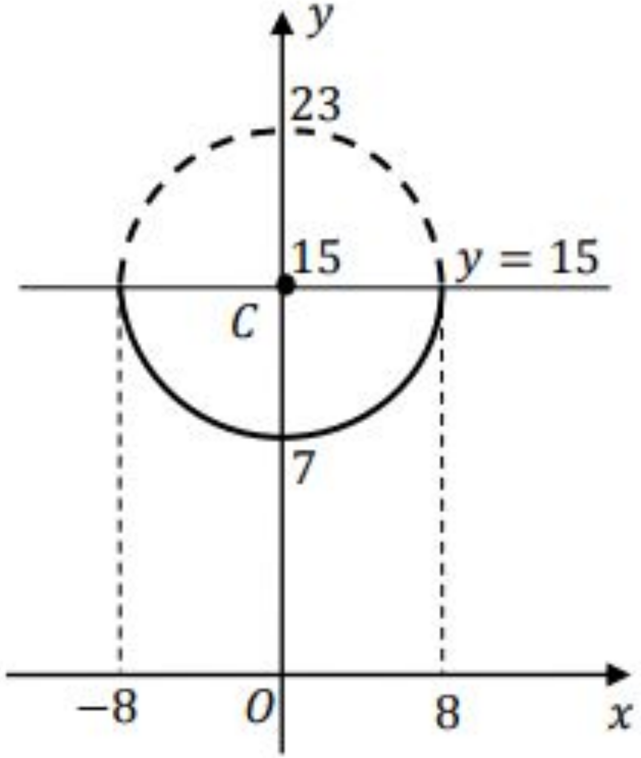
1) $y = \sqrt{9 - x^2}$;

<u>Решение.</u>

1) $y = \sqrt{9 - x^2}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} y \geq 0, \\ 9 - x^2 \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \geq 0, \\ x \in [-3; 3]. \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $y^2 = 9 - x^2$. Преобразуем: $x^2 + y^2 = 9$. Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке $C(0; 0)$ радиуса $R = 3$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет верхнюю половину окружности



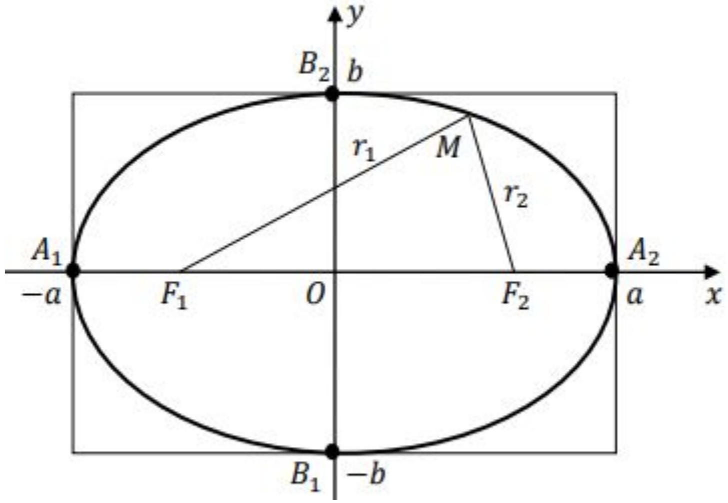
2) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$. Преобразуем: $y - 15 = -\sqrt{64 - x^2}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} y - 15 \le 0, \\ 64 - x^2 \ge 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \le 15, \\ x \in [-8; 8]. \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $(y - 15)^2 = 64 - x^2$. Преобразуем: $x^2 + (y - 15)^2 = 64$. Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке $C(0; 15)$ радиуса $R = 8$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет нижнюю половину окружности (рис. 1.16).



Эллипс

Каноническое уравнение эллипса

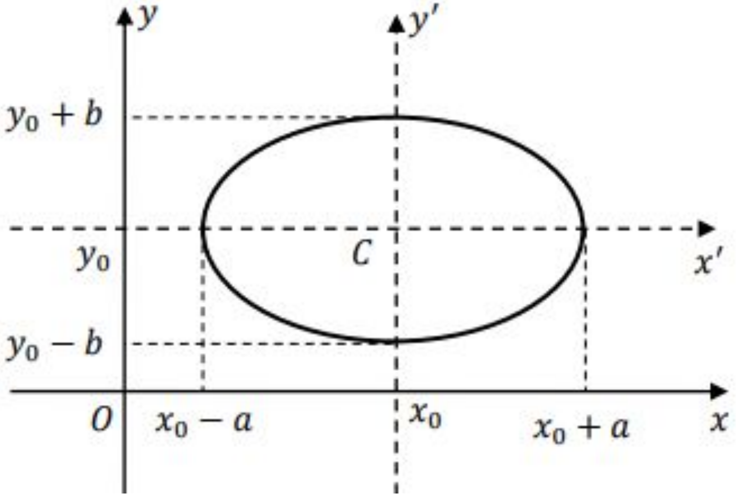
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Уравнение эллипса, записанное в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

называют *нормальным уравнением эллипса*. Оно представляет эллипс со смещённым центром и осями, параллельными координатным осям.



Пример 1. Составить каноническое или нормальное уравнение эллипса с центром в точке C, полуосями a и b, если фокусы эллипса лежат на оси абсцисс (ординат) или на прямой, параллельной этой оси, симметрично относительно точки C:

1) $C(0;0)$, $a = 8$, $b = 3$;

Решение.

1) Воспользуемся каноническим уравнением эллипса с полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. В условиях примера $a = 8$, $b = 3$. Подставляем эти значения в каноническое уравнение эллипса. Получаем: $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Преобразуем:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) $C\left(-\frac{11}{5};0\right)$, $a = \frac{7}{4}$, $b = \frac{2}{5}$.

Воспользуемся нормальным уравнением эллипса с центром в точке $C(x_0;y_0)$ полуосями a и b: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. В условиях примера $x_0 = -\frac{11}{5}$, $y_0 = 0$, $a = \frac{7}{4}$, $b = \frac{2}{5}$. Подставляем эти значения в нормальное уравнение эллипса. Получаем: $\frac{\left(x-\left(-\frac{11}{5}\right)\right)^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = 1$. Преобразуем:

$$\frac{\left(x+\frac{11}{5}\right)^2}{\frac{49}{16}} + \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1.$$

Пример 2. Определить координаты центра и полуоси эллипса по его каноническому или нормальному уравнению:

1) $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{64}=1$;

Решение.

1) Сравним данное уравнение с каноническим уравнением эллипса с полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Преобразуем данное уравнение: $\frac{x^2}{11^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$. Центр эллипса находится в точке $C(0;0)$, полуоси $a=11$, $b=8$.

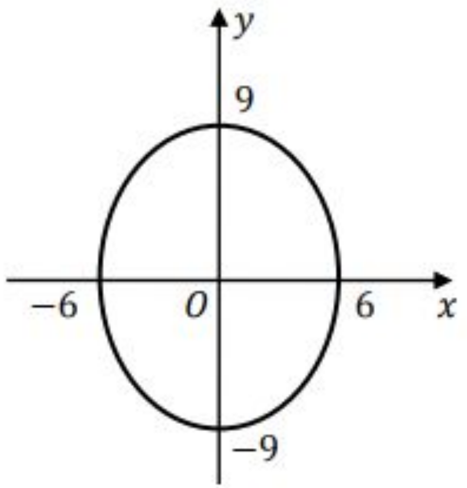
2) $\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{64}=1$;

5) Сравним данное уравнение с нормальным уравнением эллипса с центром в точке $C(x_0;\, y_0)$ полуосями a и b: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Преобразуем данное уравнение: $\frac{(x-5)^2}{3^2}+\frac{\left(y-(-3)\right)^2}{8^2}=1$. Центр эллипса находится в точке $C(5;\, -3)$, полуоси $a=3$, $b=8$.

Пример.3. Построить эллипс по его каноническому или нормальному уравнению:

1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{81}=1$;

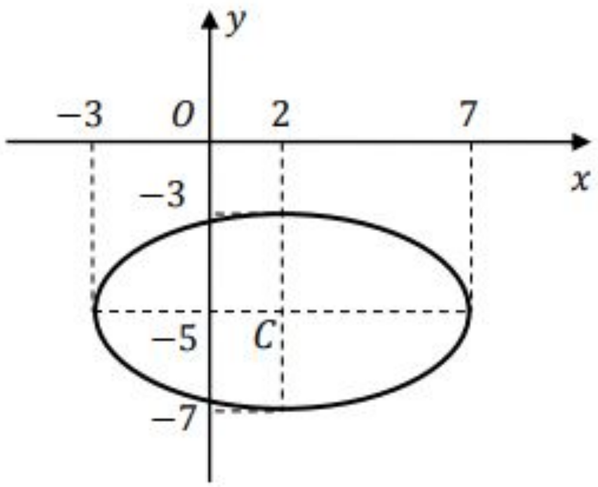
Преобразуем уравнение: $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{9^2}=1$ Центр эллипса находится в точке $C(0;0)$, полуоси $a=6$, $b=9$



2) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+5)^2}{4}=1$;

Преобразуем уравнение: $\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{\left(y-(-5)\right)^2}{2^2}=1$.

Центр эллипса находится в точке $C(2;-5)$, полуоси $a=5$, $b=2$ (рис. 2.8).



Пример.4. Среди приведённых уравнений указать уравнения эллипса, наитй полуоси каждого из них:

1) $y = -\frac{1}{3}x + 2$; 2) $x^2 - y^2 = 1$;

3) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $y^2 = -x + 2$;

5) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 6) $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{7} = 1$;

7) $y = 4$; 8) $3x^2 + 4y^2 = 12$.

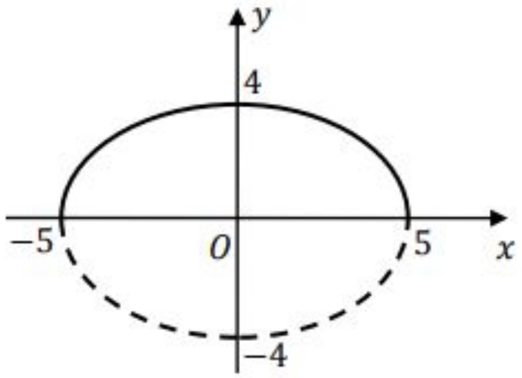
9) $16x^2 + 25y^2 = 81$; 10) $9x^2 + 4y^2 = 1$.

Пример. 5. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

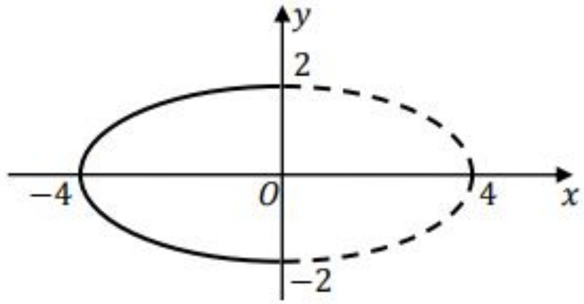
1) $y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$;

Решение.

1) $y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}$; Запишем ограничения: $\begin{cases} y \geq 0, \\ 25 - x^2 \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \geq 0, \\ -5 \leq x \leq 5. \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $y^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2)$. Преобразуем: $y^2 = 16 - \frac{16}{25}x^2$, $\frac{16}{25}x^2 + y^2 = 16$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(0;0)$ и полуосями $a = 5$, $b = 4$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет верхнюю половину эллипса



2) $x = -2\sqrt{4 - y^2}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} x \leq 0, \\ 4 - y^2 \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} x \leq 0, \\ -2 \leq y \leq 2. \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $x^2 = 4(4 - y^2)$. Преобразуем: $x^2 = 16 - 4y^2$, $x^2 + 4y^2 = 16$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(0;0)$ и полуосями $a = 4$, $b = 2$. Учитывая полученные выше ограничения. заключаем, что исходное уравнение определяет левую половину эллипса



3) $y = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{60 - 4x - x^2}$. Преобразуем: $y - 3 = -\frac{1}{2}\sqrt{60 - 4x - x^2}$.

Запишем ограничения: $\begin{cases} y - 3 \le 0, \\ 60 - 4x - x^2 \ge 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \le 3, \\ -10 \le x \le 6. \end{cases}$

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$(y - 3)^2 = \frac{1}{4}(60 - 4x - x^2)$.

Преобразуем:

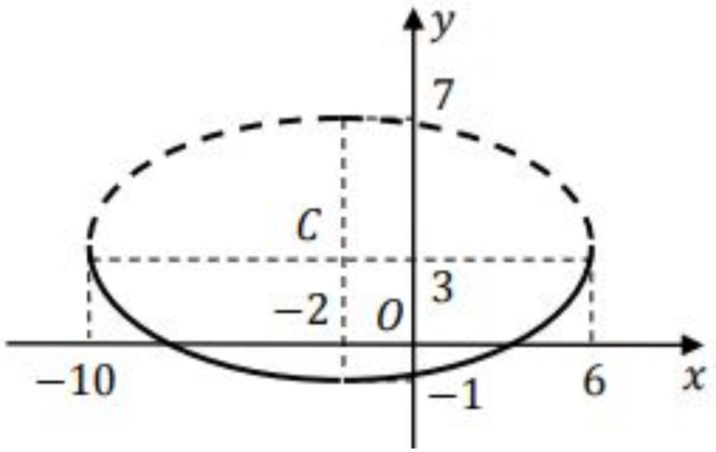
$4(y - 3)^2 = -(x^2 + 4x - 60)$,

$4(y - 3)^2 = -[(x + 2)^2 - 64]$,

$(x + 2)^2 + 4(y - 3)^2 = 64$,

$\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.

Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке $C(-2; 3)$ и полуосями $a = 8$, $b = 4$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет нижнюю половину эллипса



Эксцентриситет эллипса

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большой оси. Эксцентриситет принято обозначать буквой e. Можно записать: $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Таким образом, *формула для нахождения эксцентриситета*:

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}.$$

При выводе канонического уравнения эллипса было показано, что $c < a$, поэтому $e < 1$.

Фокальные радиусы эллипса

Учитывая также, что $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = r_2$, получаем *формулу для нахождения фокального радиуса, проведённого из правого фокуса*:

$$\boldsymbol{r_2 = a - ex}.$$

Из равенства $r_1 + r_2 = 2a$ выразим r_1:

$r_1 = 2a - r_2 = 2a - (a - ex) = a + ex$.

Формула для нахождения фокального радиуса, проведённого из левого фокуса:

$$\boldsymbol{r_1 = a + ex}.$$

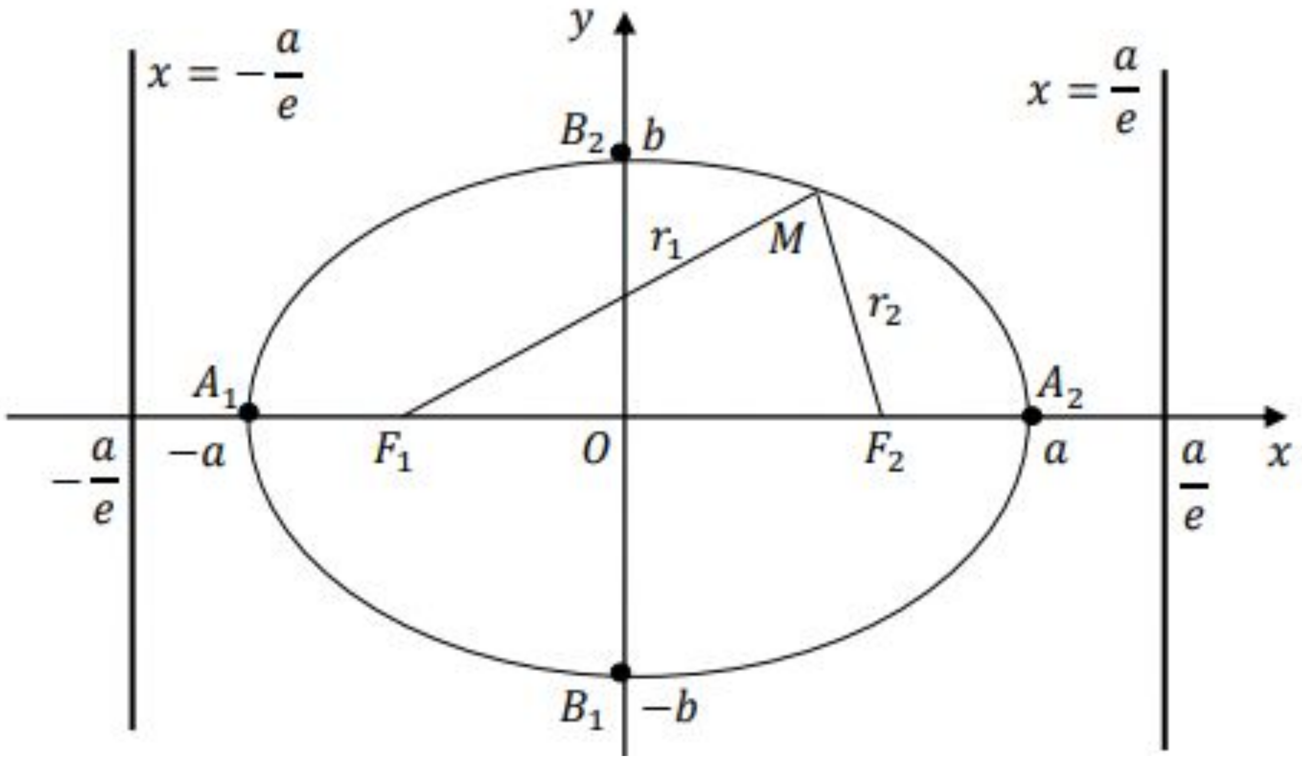
Директрисы эллипса

Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{e}$ от него, называются *директрисами* эллипса.

Уравнения директрис имеют вид:

$$x = \pm\frac{a}{e}.$$

Так как для эллипса $e < 1$, то $\frac{a}{e} > a$ и, следовательно, директрисы расположены вне эллипса



Пример.5. Дан эллипс $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$. Найти: 1) его полуоси; 2) фоку сы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Исходя из канонического уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ запишем квадраты полуосей эллипса: $a^2=64$, $a=8$ и $b^2=36$, $b=6$.

2) Фокусы эллипса представляют точки $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. При выводе канонического уравнения эллипса была получена формула $a^2-c^2=b^2$

. Отсюда $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Подставляем значения квадратов полуосей: $c=\sqrt{64-36}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$. Тогда фокусы эллипса: $F_1(-2\sqrt{7};0)$, $F_2(2\sqrt{7};0)$.

3) Эксцентриситет эллипса находят по формуле: $e=\frac{c}{a}$. Подставляем числовые значения: $e=\frac{2\sqrt{7}}{8}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

4) Уравнения директрис имеют вид: $x=\pm\frac{a}{e}$. Подставляем числовые значения: $x=\pm\frac{8}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=\pm\frac{32}{\sqrt{7}}=\pm\frac{32\sqrt{7}}{7}$.

Ответ: 1) $a=8$, $b=6$; 2) $F_1(-2\sqrt{7};0)$, $F_2(2\sqrt{7};0)$; 3) $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$; 4) $x=\pm\frac{32\sqrt{7}}{7}$.

Пример. 6. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) полуоси равны 5 и 3;

2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;

3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен $\frac{4}{5}$;

4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) большая полуось равна 4 и расстояние между директрисами равно $\frac{16\sqrt{6}}{3}$.

Решение.

1) Подставим значение полуосей в каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Получаем: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

2) Так как расстояние между фокусами равно 6, то есть $2c=6$, то $c=3$. Далее используем формулу, связывающую a, b и c: $a^2-c^2=b^2$. Выразим b: $b=\sqrt{a^2-c^2}$. Подставляем числовые значения: $b=\sqrt{5^2-3^2}=$ $=4$. Составляем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

3) Воспользуемся формулой эксцентриситета $e=\frac{c}{a}$. Выразим отсюда c: $c=ae$. Подставляем $a=10$, $e=\frac{4}{5}$. Получаем: $c=10\cdot\frac{4}{5}=8$. Тогда $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$. Составляем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1.$$

4) Воспользуемся формулой эксцентриситета $e = \frac{c}{a}$ и формулой, связывающую a, b и c: $a^2 - c^2 = b^2$. Получаем: $e = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$. Подставляем $b = 3$, $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{\sqrt{3^2+c^2}}$. Отсюда найдём c. Возведём обе части равенства в квадрат: $\frac{1}{2} = \frac{c^2}{9+c^2}$. Преобразуем: $9 + c^2 = 2c^2$, $c^2 = 9$, $c = 3$. Тогда $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$. Составляем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$.

5) Так как директрисы задаются уравнениями $x = \pm\frac{a}{e}$, то расстояние между директрисами равно $\frac{2a}{e}$. Учитывая, что по условию расстояние между директрисами равно $\frac{16\sqrt{6}}{3}$ и $a = 4$, получаем: $\frac{16\sqrt{6}}{3} = \frac{2\cdot4}{e}$. Отсюда $e = \frac{3\cdot8}{16\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Далее, учитывая, что $e = \frac{c}{a}$, запишем выражение для c: $c = ae$.

Подставляем: $c = 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}$. Тогда $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{10}$.

Составляем каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$.

Пример 7. Эксцентриситет эллипса равен $\frac{2}{3}$, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

Решение. Воспользуемся формулой $\frac{r}{d} = e$, где r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-либо фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директри
e – эксцентриситет.

Из этой формулы $d = \frac{r}{e}$. В условиях примера $r = 10$, $e = \frac{2}{3}$. Подставляем: $d = \frac{10}{\frac{2}{3}} = 15$.

Пример 8. Точка $M(-4; 2{,}4)$ лежит на эллипсе $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Найти фокальные радиусы точки M.

Решение. Используем формулы фокальных радиусов точки эллипса: $r_1 = a + ex$, $r_2 = a - ex$, где a – большая полуось эллипса, e – эксцентриситет эллипса, x – абсцисса точки M эллипса. Из канонического уравнения эллипса записываем: $a^2 = 25$, $a = 5$. Абсцисса точки M равна -4, то есть $x = -4$. Для нахождения e используем формулу $e = \frac{c}{a}$. Для нахождения c используем формулу $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Из канонического уравнения эллипса $a^2 = 25$, $b^2 = 16$. Подставляем: $c = \sqrt{25 - 16} = 3$, $e = \frac{3}{5}$.

Находим фокальные радиусы точки M:

$r_1 = 5 + \frac{3}{5} \cdot (-4) = 5 - \frac{12}{5} = \frac{13}{5}$, $r_2 = 5 - \frac{3}{5} \cdot (-4) = 5 + \frac{12}{5} = \frac{37}{5}$.

Ответ: $r_1 = \frac{13}{5}$, $r_2 = \frac{37}{5}$.

З **Пример 9.**

Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение расстояния до точки $A(\sqrt{5};0)$ к расстоянию до прямой $d:\sqrt{5}x-9=0$ постоянно и равно $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Сделать чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет, асимптоты и директрисы (если они существуют).

Решение: пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомому множеству точек. В задаче говорится о расстоянии:

$$|AM|=\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2},$$

а также о **расстоянии от точки до прямой**, которое вычисляется по формуле $\rho(M;d)=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, где A,B,C – соответствующие коэффициенты **общего уравнения прямой** «дэ», $(x;y)$ – координаты точки «эм».

В данном случае:

$$\rho(M;d)=\frac{|\sqrt{5}\cdot x+0\cdot y-9|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+0^2}}=\frac{|\sqrt{5}x-9|}{\sqrt{5}}.$$

По условию для каждой точки $M(x;y)$ **отношение** расстояния $|AM|$ к расстоянию $\rho(M;d)$ должно быть равно $\frac{\sqrt{5}}{3}$. А что такое отношение? Отношение – это пропорция, или попросту дробь:

$$\frac{|AM|}{\rho(M;d)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}}{\frac{|\sqrt{5}x-9|}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Уравнение составлено, избавимся от **трёхэтажной дроби** .

Для этого знаменатель левой части (дробь) перекинем направо:

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{|\sqrt{5}x-9|}{\sqrt{5}}$$

Сократим на $\sqrt{5}$:

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}=\frac{1}{3}\cdot|\sqrt{5}x-9|$$

$$3\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}=|\sqrt{5}x-9|$$

Возводим обе части в квадрат и раскрываем скобки:

$$\left(3\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}\right)^2=|\sqrt{5}x-9|^2$$

$$9((x-\sqrt{5})^2+y^2)=5x^2-18\sqrt{5}x+81$$

$$9(x^2-2\sqrt{5}x+5+y^2)=5x^2-18\sqrt{5}x+81$$

$$9x^2-18\sqrt{5}x+45+9y^2=5x^2-18\sqrt{5}x+81$$

Перенесём всё налево

$$9x^2-18\sqrt{5}x+45+9y^2=5x^2-18\sqrt{5}x+81$$

$$9x^2-18\sqrt{5}x+45+9y^2-5x^2+18\sqrt{5}x-81=0$$

$$4x^2+9y^2-36=0$$

Разделим обе части на 36:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{4}} + \frac{y^2}{\frac{36}{9}} = 1$$

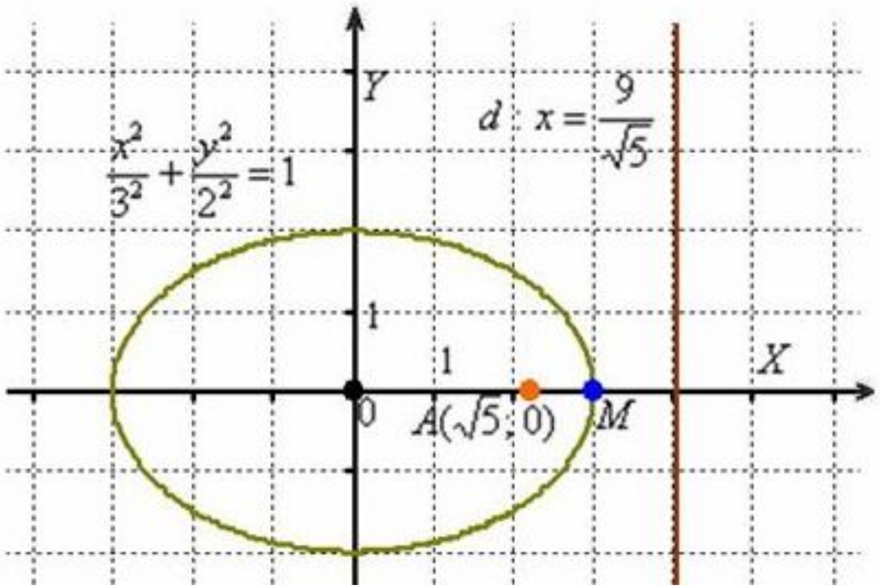
И выполним деление:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

В результате:

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ – **эллипс** с центром в начале координат, полуосями $a = 3, b = 2$.

Изобразим на чертеже найденный эллипс, точку $A(\sqrt{5}; 0)$ и прямую $d : x = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4{,}02$:



Вычислим $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ и запишем **фокусы эллипса**:

$$F_1(c;0),\ F_2(-c;0)$$
$$\Downarrow$$
$$F_1(\sqrt{5};0),\ F_2(-\sqrt{5};0)$$

Первый фокус совпал с точкой $A(\sqrt{5};0)$.

Найдём эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. По ещё одному странному совпадению эксцентриситет

оказался равен отношению $\frac{|AM|}{\rho(M;d)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Эллипс имеет две директрисы, и в каноническом положении $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ они задаются

уравнениями $d_1 : x - \frac{a}{\varepsilon} = 0, \quad d_2 : x + \frac{a}{\varepsilon} = 0$, где «эпсилон» – эксцентриситет данного эллипса.

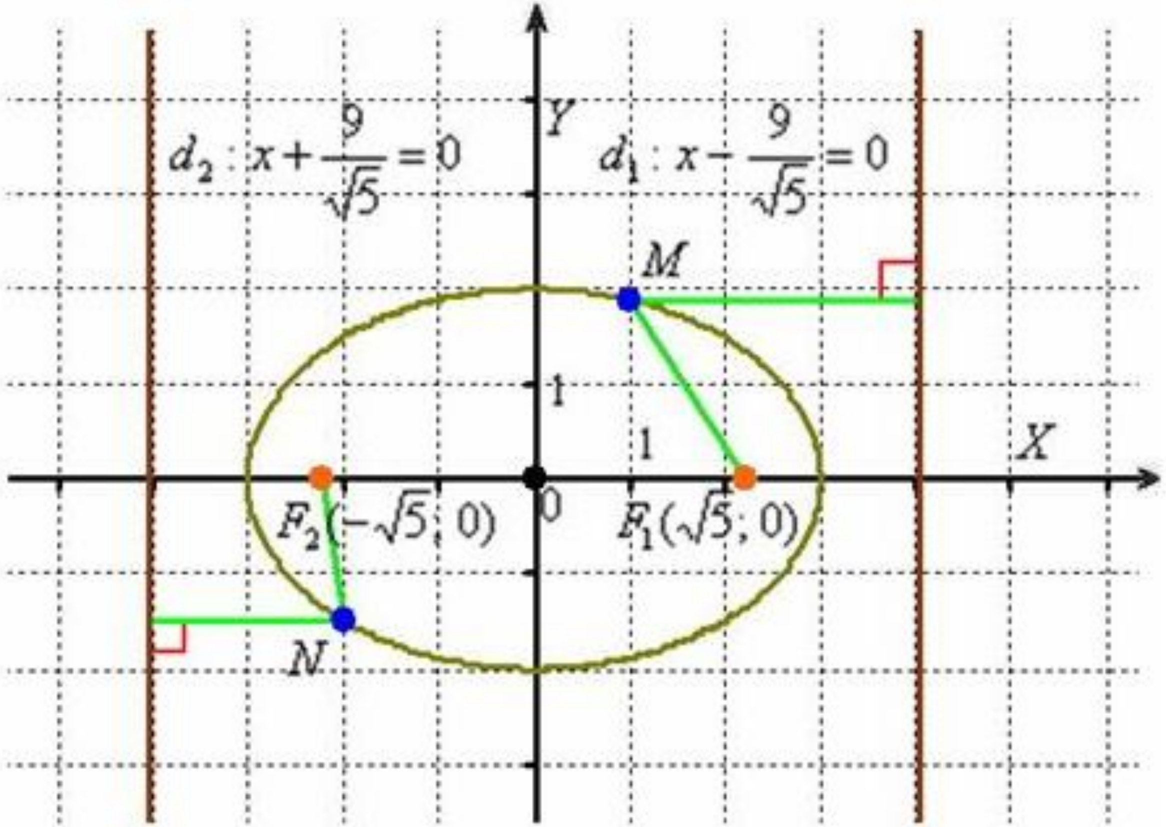
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1:$$

$$d_1 : x - \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 0, \quad d_2 : x + \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 0$$

$$d_1 : x - \frac{9}{\sqrt{5}} = 0, \quad d_2 : x + \frac{9}{\sqrt{5}} = 0$$

$$d_1 : \sqrt{5}x - 9 = 0, \quad d_2 : \sqrt{5}x + 9 = 0$$

Эллипс – есть множество всех точек плоскости, таких, что **отношение** расстояния до каждой точки от фокуса к расстоянию от неё до соответствующей (ближайшей) директрисы равно эксцентриситету:



Ответ: искомое геометрическое место точек представляет собой эллипс $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$ с фокусами $F_1(\sqrt{5};\,0), F_2(-\sqrt{5};\,0)$ и эксцентриситетом $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Уравнения директрис:

$d_1 : \sqrt{5}x-9=0, \quad d_2 : \sqrt{5}x+9=0$.

Пример **10.** Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$.

Решение.

По условию $2c = 8$, т.е. $c = 4, b = 3$.

Мы знаем, что $b^2 = a^2 - c^2$, отсюда $a^2 = b^2 + c^2$, т.е. $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ или $a = 5$.

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Пример **11.** Определить тип кривой, заданной уравнением, $3x^2 + y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ и построить ее.

Решение. Чтобы привести уравнение заданной кривой к каноническому виду, выделим в нем полные квадраты по переменным x и y.

$$3(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) = 5,$$

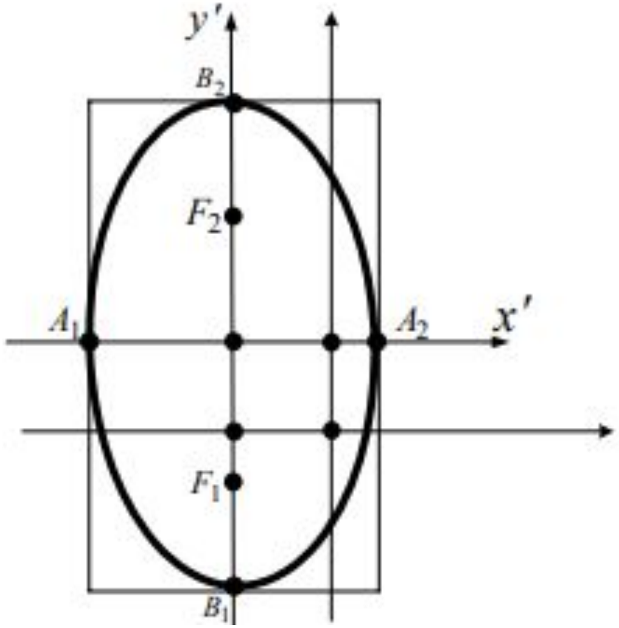
$$3(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 5 + 4,$$

$$3(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9,$$

$$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

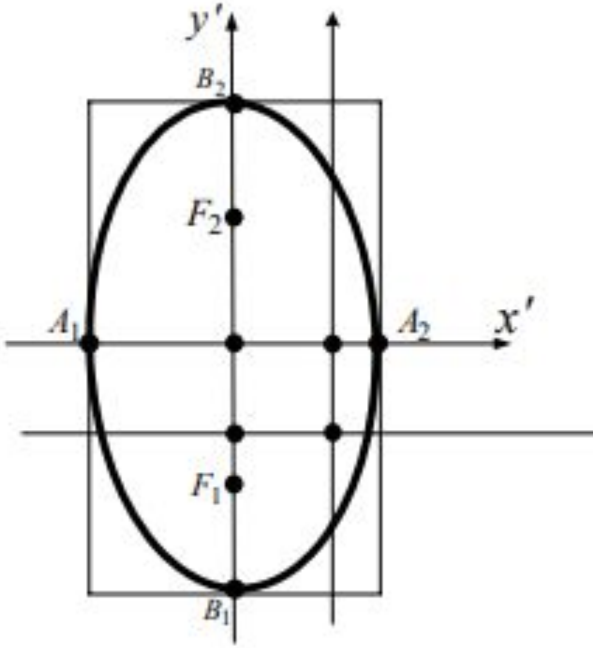
Полученное уравнение – уравнение эллипса с центром симметрии в точке $O'(-1;1)$ (см. формулу (1.2.1)) и полуосями $a = \sqrt{3}$ и $b = 3$. Сделав замену $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$, получим уравнение эллипса относительно переменных x' и y' (в системе координат $x'Oy'$):

$$\frac{(x')^2}{3} + \frac{(y')^2}{9} = 1.$$



Вершины эллипса – точки $A_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $A_2\left(\sqrt{3};0\right)$, $B_1(0;-3)$ и $B_2(0;3)$, координаты которых указаны в системе $x'Oy'$. В системе координат xOy: $A_1\left(-\sqrt{3}-1;1\right)$, $A_2\left(\sqrt{3}-1;1\right)$, $B_1(-1;-2)$ и $B_2(-1;2)$.

Поскольку $b>a$, то эллипс вытянут вдоль оси Oy' и его фокусы находятся на этой оси. Чтобы найти координаты фокусов. Вычислим параметр c (см. 1.1.2) из формулы $c^2=b^2-a^2$ ($b>a$). Поскольку $b^2=9$ и $a^2=3$, то $c=\sqrt{6}$. Значит координаты фокусов F_1 и F_2 в системе координат $x'Oy'$: $F_1\left(0,-\sqrt{6}\right)$ и $F_2\left(0,\sqrt{6}\right)$, а в системе координат xOy: $F_1\left(-1,1-\sqrt{6}\right)$ и $F_2\left(-1,1+\sqrt{6}\right)$ (см. рис. 8). Эксцентриситет эллипса по формуле (1.1.4) равен: $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ($b>a$).



Для построения кривой введем систему координат xOy и отметим в ней центр симметрии эллипса – точку $O'(-1;1)$ и проведем через нее новые оси координат Ox' и Oy'. На новых осях Ox' и Oy' отложим полуоси $a=\sqrt{3}$ и $b=3$ соответственно, отметим вершины эллипса $A_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $A_2\left(\sqrt{3};0\right)$, $B_1(0;-3)$ и $B_2(0;3)$, а затем построим прямоугольник, проводя через вершины эллипса прямые, параллельные Ox' и Oy'. Через вершины проведем симметричную кривую так, чтобы в этих точках она касалась сторон прямоугольника. Отметим фокусы эллипса.

<u>Пример</u> 12. Построить кривую $4x^2+25y^2=100$. Найти расстояние между ее фокусами, эксцентриситет и фокальные радиусы от точки М(3;1,6).

Решение:

Обе части уравнения кривой $4x^2+25y^2=100$ делим на 100, получим $\frac{4x^2}{100}+\frac{25y^2}{100}=1$ или $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ или $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, где a = 5, b = 2.

Тогда так как $a>b$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

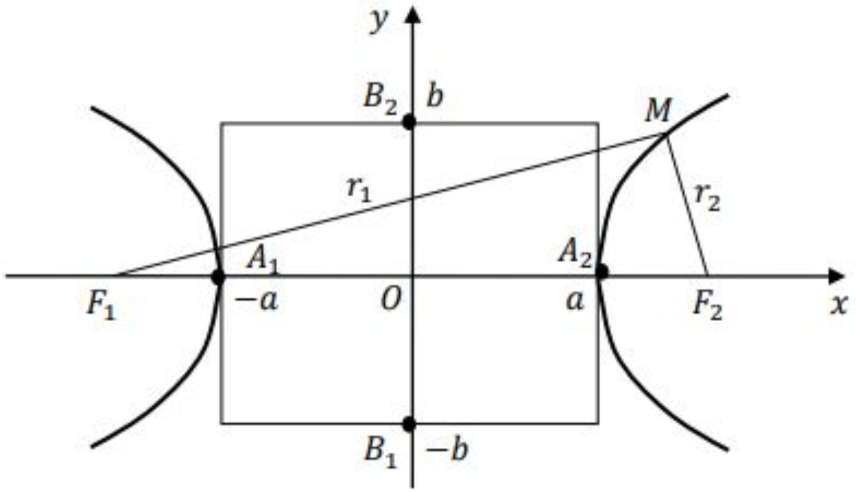
Фокальные радиусы – есть расстояние от точки М(3;1,6) до фокусов точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Фокусы расположены в точках $F_1(-\sqrt{21};0), F_2(\sqrt{21};0)$.

Фокальные радиусы равны: $r_1=a-\varepsilon x=5-\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot 3;\ r_2=a+\varepsilon x=5+\frac{\sqrt{21}}{5}\cdot 3$

Гипербола

Определение гиперболы

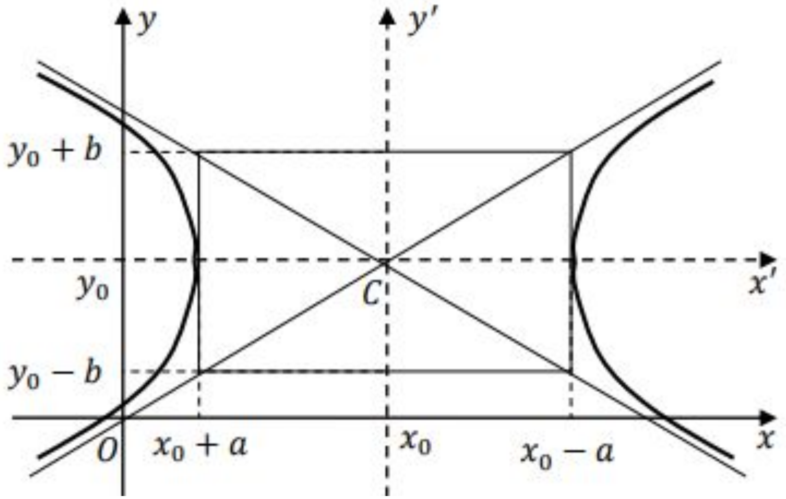
Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$. Требуется, чтобы эта постоянная была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля. Указанная разность берётся по абсолютной величине.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a^2 + b^2 = c^2.$$

Величины a и b называются полуосями гиперболы. Если полуоси гиперболы равны, то есть $a = b$, то такая гипербола называется *равносто ронней*.

Каноническое уравнение равносторонней гиперболы принимает вид: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, $x^2 - y^2 = a^2$.



Уравнение гиперболы, записанное в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

называют *нормальным уравнением гиперболы*. Оно представляет гиперболу со смещённым центром и осями, параллельными координатным осям.

Эксцентриситет гиперболы

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к расстоянию между её вершинами. Эксцентриситет гиперболы, как и для эллипса, принято обозначать буквой e. Можно записать: $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$.

Таким образом, *формула для нахождения эксцентриситета гиперболы* такая же как и для эллипса:

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a}}.$$

При выводе канонического уравнения гиперболы было показано, что $c > a$, поэтому $e > 1$.

Фокальные радиусы гиперболы

формулы для нахождения фокальных радиусов точек правой ветви гиперболы:

$$\boldsymbol{r_1 = ex + a, r_2 = ex - a.}$$

Формулы для нахождения фокальных радиусов точек левой ветви гиперболы: $\boldsymbol{r_1 = -(ex + a), r_2 = -(ex - a).}$

. Директрисы гиперболы

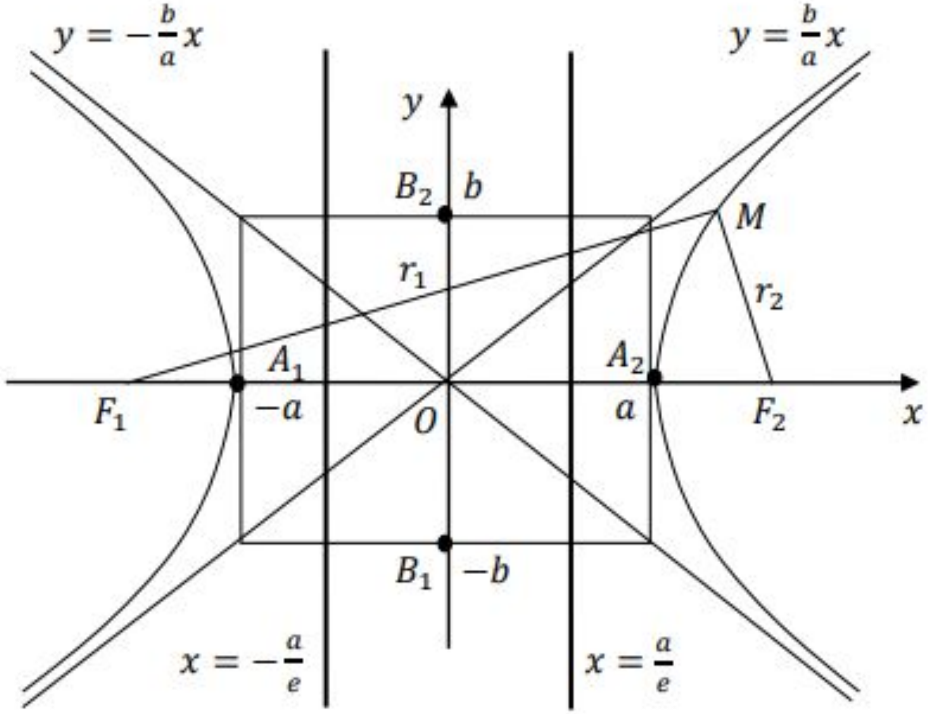
Уравнения директрис имеют вид:

$$\boldsymbol{x = \pm \frac{a}{e}}.$$

. Директрисы гиперболы

Уравнения директрис имеют вид:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$



Пример 1. Составить каноническое или нормальное уравнение гиперболы с центром в точке C, полуосями a и b, если фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс или на прямой, параллельной этой оси, симметрично относительно точки C:

1) $C(0; 0)$, $a = 7$, $b = 4$;

Решение.

1) Воспользуемся каноническим уравнением гиперболы с полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. В условиях примера $a = 7$, $b = 4$. Подставляем эти значения в каноническое уравнение гиперболы. Получаем: $\frac{x^2}{7^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$. Преоб разуем:

2)

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

10) $C\left(\frac{5}{4}; 0\right)$, $a = \frac{9}{4}$, $b = \frac{7}{4}$.

2) Воспользуемся нормальным уравнением гиперболы с центром в точке $C(x_0; y_0)$ полуосями a и b: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. В условиях примера $x_0 = \frac{5}{4}$, $y_0 = 0$, $a = \frac{9}{4}$, $b = \frac{7}{4}$. Подставляем эти значения в нормальное уравнение гиперболы. Получаем: $\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} - \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} = 1$. Преобразуем: $\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}{\frac{81}{16}} - \frac{y^2}{\frac{49}{16}} = 1$.

Пример 2. Определить координаты центра и полуоси гиперболы по её каноническому или нормальному уравнению:

Решение. 1) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1$;

Сравним данное уравнение с каноническим уравнением гиперболы с полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Преобразуем данное уравнение: $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1$.

Центр гиперболы находится в точке $C(0; 0)$, полуоси $a = 12$, $b = 9$.

$$\frac{x^2}{5} - y^2 = 1;$$

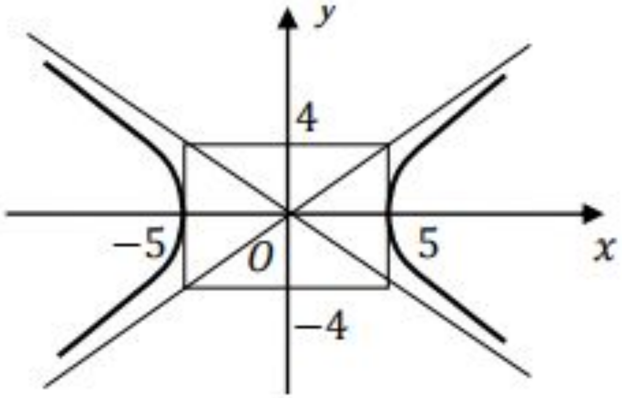
3) $\frac{(x-4)^2}{100} - \frac{(y-2)^2}{49} = 1$;

2) Сравним данное уравнение с нормальным уравнением гиперболы с центром в точке $C(x_0; y_0)$ полуосями a и b: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. Преобра зуем данное уравнение: $\frac{(x-4)^2}{10^2} - \frac{(y-2)^2}{7^2} = 1$.

Центр гиперболы находится в точке $C(4; 2)$, полуоси $a = 10$, $b = 7$.

Пример. 3. Построить гиперболу по её каноническому или нормальному уравнению:

1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$;

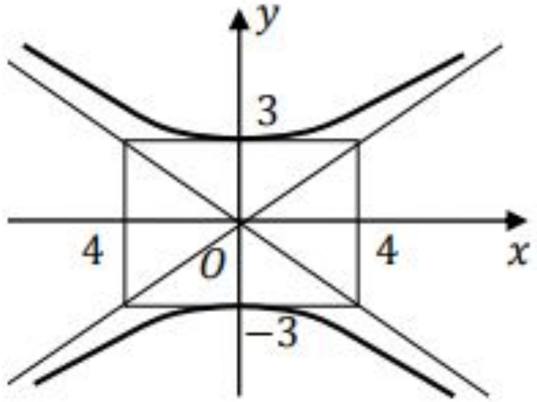


Решение.

1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Преобразуем уравнение: $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$. Центр гиперболы находится в точке $C(0;0)$, полуоси $a = 5$, $b = 4$

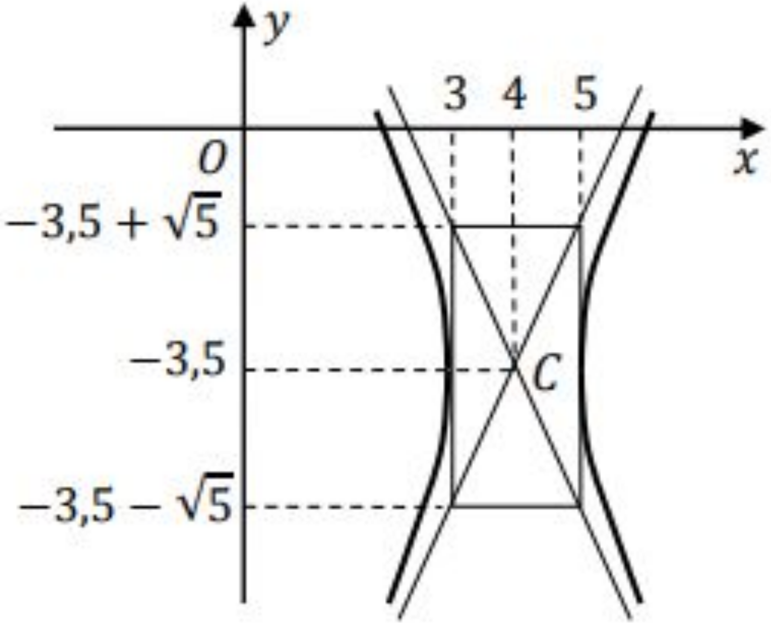
2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$;

Преобразуем уравнение: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$. Центр гиперболы находится в точке $C(0;0)$, полуоси $a = 4$, $b = 3$



3) $(x-4)^2-\frac{\left(y+\frac{7}{2}\right)^2}{5}=1$. Преобразуем уравнение: $\frac{(x-4)^2}{1^2}-\frac{\left(y-\left(-\frac{7}{2}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$.

Центр гиперболы находится в точке $C\left(4;-\frac{7}{2}\right)$, полуоси $a=1$, $b=\sqrt{5}$



Пример. 4. Среди приведённых уравнений указать уравнения ги·перболы, найти полуоси каждой из них:

1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1;$ 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1;$

3) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{24}=-1;$ 4) $4x^2-9y^2=25;$

5) $x^2+y^2=1;$ 6) $x^2-\frac{y^2}{5}=1;$

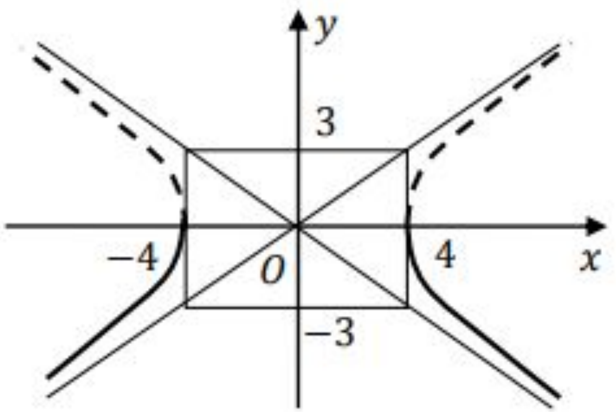
7) $4x^2-7y^2=1;$ 8) $x^2=3y-6;$

9) $3x-2y+4=0;$ 10) $y-5=0.$

Пример. .5. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

Решение.

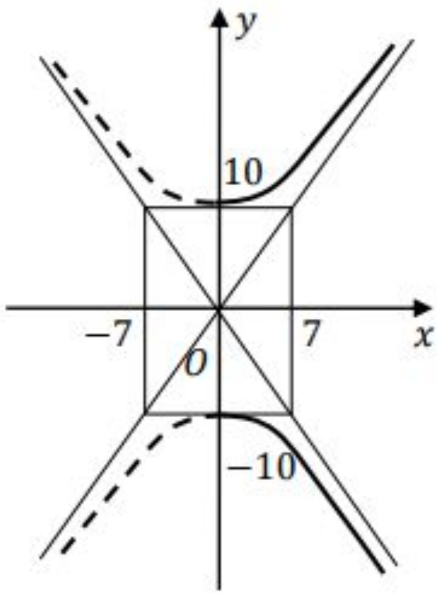
1) $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} y \le 0, \\ x^2 - 16 \ge 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \le 0, \\ x \in (-\infty; -4] \cup [4; \infty). \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $y^2 = \frac{9}{16}(x^2 - 16)$. Преобразуем: $y^2 = \frac{9}{16}x^2 - 9$, $\frac{9}{16}x^2 - y^2 = 9$, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $C(0; 0)$ и полуосями $a = 4$, $b = 3$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенной в нижней полуплоскости



2) $x = \frac{7}{10}\sqrt{y^2 - 100}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y^2 - 100 \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \in (-\infty;\ -10] \cup [10;\ \infty). \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $x^2 = \frac{49}{100}(y^2 - 100)$.

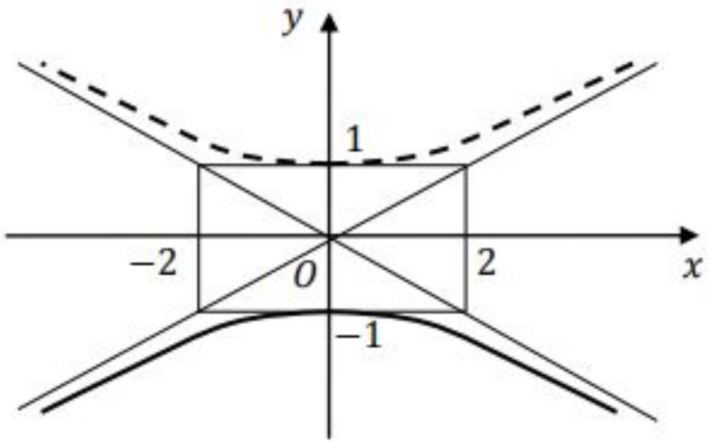
Преобразуем: $x^2 = \frac{49}{100}y^2 - 49$, $x^2 - \frac{49}{100}y^2 = -49$, $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{100} = -1$.

Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке $C(0; 0)$ и полуосями $a = 7$, $b = 10$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенной в правой полуплоскости



3) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} y \leq 0, \\ x^2 + 4 \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \leq 0, \\ x \in (-\infty;\ \infty). \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 4)$.

Преобразуем: $y^2 = \frac{1}{4}x^2 + 1$, $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = -1$, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = -1$. Полученное уравнение определяет гиперболу с полуосями $a = 2$, $b = 1$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенной в нижней полуплоскости



Пример. 6. Дана гипербола $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$. Найти: 1) полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис; 5) уравнения асимптот.

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Исходя из канонического уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ запишем квадраты полуосей гиперболы: $a^2 = 81$, $a = 9$ и $b^2 = 36$, $b = 6$.

2) Фокусы гиперболы представляют точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. При выводе канонического уравнения гиперболы была получена формула $a^2 + b^2 = c^2$. Отсюда $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Подставляем значения квадратов полуосей: $c = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$. И тогда фокусы гиперболы: $F_1\left(-3\sqrt{13}; 0\right)$, $F_2\left(3\sqrt{13}; 0\right)$.

3) Эксцентриситет гиперболы находят по формуле: $e = \frac{c}{a}$. Подставляем числовые значения: $e = \frac{3\sqrt{13}}{9} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

4) Уравнения директрис имеют вид: $x = \pm\frac{a}{e}$. Подставляем числовые значения: $x = \pm\frac{9}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \pm\frac{27}{\sqrt{13}} = \pm\frac{27\sqrt{13}}{13}$.

5) Уравнения асимптот имеют вид: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Подставляем числовые значения: $y = \pm\frac{6}{9}x = \pm\frac{2}{3}x$.

Ответ: 1) $a = 9$, $b = 6$; 2) $F_1(-3\sqrt{13}; 0)$, $F_2(3\sqrt{13}; 0)$; 3) $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; 4) $x = \pm\frac{27\sqrt{13}}{13}$; 5) $y = \pm\frac{2}{3}x$.

Пример 7. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) полуоси равны 7 и 5;

2) расстояние между фокусами равно 12 и малая полуось равна 4;

3) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$ и эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{13}}{3}$;

4) большая полуось равна 9 и эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{131}}{9}$;

5) малая полуось равна 1 и расстояние между директрисами равно 3.

6) уравнения асимптот $y = \pm\frac{7}{12}x$ и расстояние между фокусами равно $2\sqrt{193}$.

Решение.

1) Подставим значение полуосей в каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Получаем: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$.

2) Так как расстояние между фокусами равно 12, то есть $2c = 12$, то $c = 6$. Далее используем формулу, связывающую a, b и c: $a^2 + b^2 = c^2$. Выразим a: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Подставляем числовые значения: $a = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Составляем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$.

3) Так как расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, то есть $2c = 2\sqrt{13}$, то $c = \sqrt{13}$. Воспользуемся формулой эксцентриситета $e = \frac{c}{a}$. Выразим отсюда a: $a = \frac{c}{e}$. Подставляем $c = \sqrt{13}$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Получаем: $a = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = 3$. Воспользуемся формулой, связывающей a, b и c: $a^2 + b^2 = c^2$. Выразим b: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - 3^2} = 2$. Составляем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

4) Воспользуемся формулой эксцентриситета $e = \frac{c}{a}$. Выразим отсюда c: $c = ae$. По условию $a = 9$, $e = \frac{\sqrt{131}}{9}$. Подставляем: $c = 9 \cdot \frac{\sqrt{131}}{9} = \sqrt{131}$. Воспользуемся формулой, связывающей a, b и c: $a^2 + b^2 = c^2$. Выразим b: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\left(\sqrt{131}\right)^2 - 9^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Составляем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{50} = 1$.

5) Так как директрисы задаются уравнениями $x = \pm\frac{a}{e}$, то расстояние между директрисами равно $\frac{2a}{e}$. Учитывая, что по условию расстояние между директрисами равно 3, получаем: $3 = \frac{2a}{e}$. Воспользуемся формулой эксцентриситета $e = \frac{c}{a}$. Получаем: $3 = \frac{2a}{\frac{c}{a}} = \frac{2a^2}{c}$. Далее воспользуемся формулой $a^2 = c^2 - b^2$. Получаем: $3 = \frac{2(c^2-b^2)}{c}$. По условию $b = 1$. Подставляем: $3 = \frac{2(c^2-1)}{c}$. Решим полученное уравнение. Преобразуем: $3c = 2c^2 - 2$, $2c^2 - 3c - 2 = 0$, $c = 2$ и $c = -\frac{1}{2}$. Учитывая, что c – расстояние от начала координат до фокуса, берём положительное значение $c = 2$. Далее находим $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Составляем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$.

6) Асимптоты гиперболы задаются уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$. Учитывая, что по условию уравнения асимптот имеют вид $y = \pm\frac{7}{12}x$, получаем $\frac{b}{a} = \frac{7}{12}$ и $a = \frac{12}{7}b$. Так как по условию расстояние между фокусами равно $2\sqrt{193}$ то есть $2c = 2\sqrt{193}$, то $c = \sqrt{193}$. Далее воспользуемся формулой, $a^2 + b^2 = c^2$. Подставляем $a = \frac{12}{7}b$, $c = \sqrt{193}$. Получаем $\left(\frac{12}{7}b\right)^2 + b^2 = \left(\sqrt{193}\right)^2$.

Преобразуем: $\frac{144}{49}b^2 + b^2 = 193$, $\frac{193b^2}{49} = 193$, $b^2 = 49$, $b = 7$. Тогда $a = \frac{12}{7}\cdot 7 = 12$. Составляем каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{49} = 1$.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 4) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{50} = 1$; 5) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$; 6) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{49} = 1$.

<u>Пример.</u> **8.** Эксцентриситет гиперболы равен 2, фокальный радиус её точки M, проведённый из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

<u>Решение.</u> Воспользуемся формулой $\frac{r}{d} = e$, где r – расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-либо фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, e – эксцентриситет. Из этой формулы $d = \frac{r}{e}$. В условиях примера $r = 16$, $e = 2$. Подставляем: $d = \frac{16}{2} = 8$.

Ответ: 8.

<u>Пример.</u> **9.** Эксцентриситет гиперболы равен 2, центр её лежит в начале координат, один из фокусов $F(12; 0)$. Вычислить расстояние от точки M гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей заданному фокусу.

<u>Решение.</u> Так как фокус гиперболы $F(12; 0)$, то $c = 12$. Далее воспользуемся формулой эксцентриситета $e = \frac{c}{a}$. Выразим a: $a = \frac{c}{e}$. По условию $e = 2$, $c = 12$. Подставляем: $a = \frac{12}{2} = 6$.

Фокус $F(12;0)$ является правым фокусом гиперболы. Так как абсцисса точки M равна 13, то расстояние от точки M до фокуса F является правым фокальным радиусом точки правой ветви гиперболы. Для его нахождения воспользуемся формулой: $r = ex - a$. Подставляем $e = 2$, $x = 13$, $a = 6$.

Получаем: $r = 2 \cdot 13 - 6 = 20$.

Для нахождения расстояния от точки M до директрисы, соответствующей заданному фокусу, применим формулу $d = \frac{r}{e}$. Подставляем: $d = \frac{20}{2} = 10$.

Ответ: 10.

Пример 10.

Составить уравнение линии, для каждой точки которой разность расстояний до точек $A(0;10)$ и $O(0;0)$ по модулю равна 8. Привести уравнение к каноническому виду и выполнить чертёж. Найти асимптоты, фокусы, эксцентриситет и директрисы, если они существуют.

Решение: пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомой линии. Тогда:

$$|AM| = \sqrt{(x-0)^2+(y-10)^2} = \sqrt{x^2+(y-10)^2}$$

$$|OM| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

По условию:

$$\big||AM|-|OM|\big| = 8$$

Или:

$$\left|\sqrt{x^2+(y-10)^2}-\sqrt{x^2+y^2}\right| = 8$$

От модуля избавляемся немедленно:

$$\sqrt{x^2+(y-10)^2}-\sqrt{x^2+y^2} = \pm 8$$

$$\sqrt{x^2+(y-10)^2} = \pm 8+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2+(y-10)^2}\right)^2 = \left(\pm 8+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+(y-10)^2 = (\pm 8)^2+2\cdot(\pm 8)\cdot\sqrt{x^2+y^2}+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+y^2-20y+100 = 64\pm 2\cdot 8\cdot\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$

Возводим в квадрат обе части ещё раз:

$$(9-5y)^2 = (\pm 4 \cdot \sqrt{x^2+y^2})^2$$

$$81-90y+25y^2 = 16(x^2+y^2)$$

$$81-90y+25y^2 = 16x^2+16y^2$$

$$0 = 16x^2+16y^2-25y^2+90y-81$$

$$16x^2-9y^2+90y-81=0$$

Получено **уравнение линии 2-го порядка в общем виде**. Выделяем полный квадрат

$$16x^2-9(y^2-10y)-81=0$$

Далее внутри скобки искусственно добавляем +25 (в целях применения формулы $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ на следующем шаге) и, чтобы уравнение не изменилось, за скобками нужно прибавить $9 \cdot 25$:

$$16x^2-9(y^2-10y+25)+9 \cdot 25-81=0$$

$$16x^2-9(y-5)^2+225-81=0$$

$$16x^2-9(y-5)^2+144=0$$

$$16x^2-9(y-5)^2=-144$$

Изменим знаки у обеих частей:

$$-16x^2+9(y-5)^2=144$$

Делим обе части на 144:

$$-\frac{16x^2}{144}+\frac{9(y-5)^2}{144}=1$$

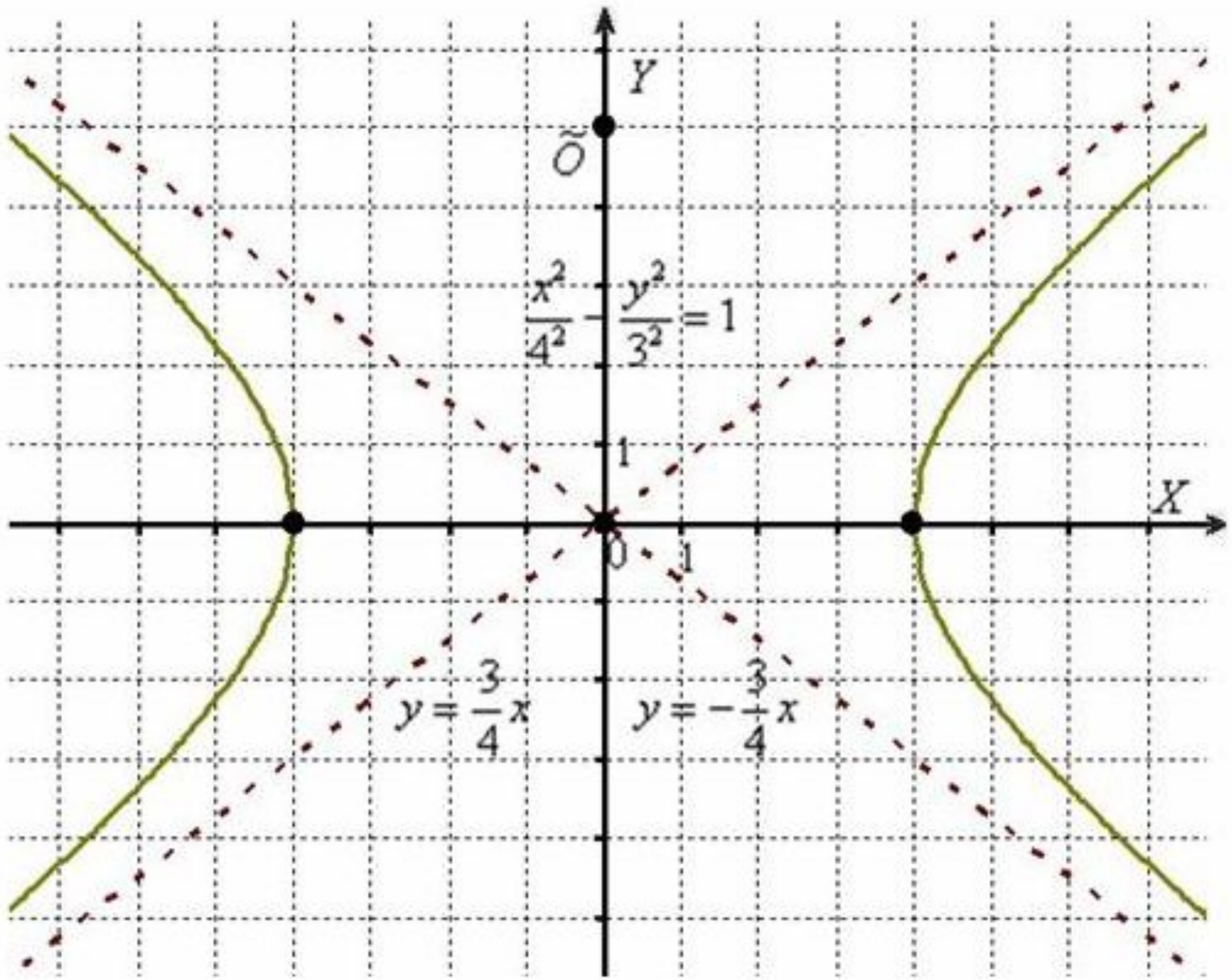
$$-\frac{x^2}{\frac{144}{16}}+\frac{(y-5)^2}{\frac{144}{9}}=1$$

$$-\frac{x^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

$$-\frac{x^2}{3^2}+\frac{(y-5)^2}{4^2}=1$$ – гипербола,

Вычислим эксцентриситет: $\varepsilon=\frac{5}{4}$

Не забывая про асимптоты $y=\frac{b}{a}x=\frac{3}{4}x$, $y=-\frac{b}{a}x=-\frac{3}{4}x$, выполним чертёж:



Директрисы гиперболы

У гиперболы, точно так же, как у эллипса, **две** директрисы. В каноническом случае $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ они расположены между ветвями гиперболы и задаются такими же уравнениями

$d_1: x-\frac{a}{\varepsilon}=0,\quad d_2: x+\frac{a}{\varepsilon}=0$, где «эпсилон» эксцентриситет данной гиперболы.

В рассматриваемом примере:

$$d_1: x-\frac{4}{\frac{5}{4}}=0,\quad d_2: x+\frac{4}{\frac{5}{4}}=0$$

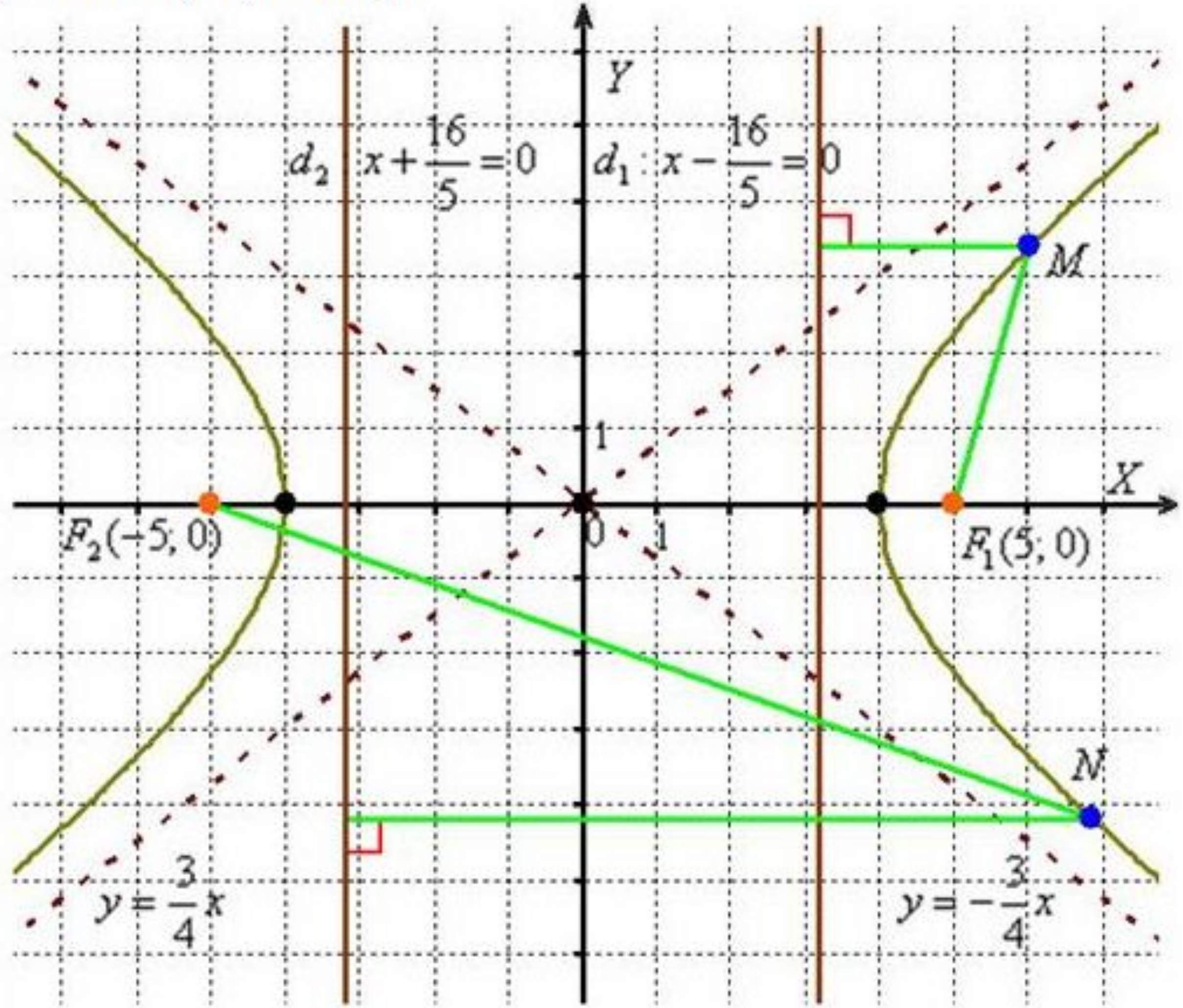
$$\Downarrow$$

$$d_1: x-\frac{16}{5}=0,\quad d_2: x+\frac{16}{5}=0$$

$$\Downarrow$$

$$d_1: 5x-16=0,\quad d_2: 5x+16=0$$

Гипербола – есть множество всех точек плоскости, таких, что **отношение** расстояния до каждой точки от фокуса к расстоянию от неё до соответствующей (ближайшей) директрисы равно эксцентриситету:



То есть, **для любой** точки M гиперболы отношение её расстояния от фокуса $|F_1M|$ к расстоянию от неё же до ближайшей директрисы $\rho(M; d_1)$ равно эксцентриситету:

$$\frac{|F_1M|}{\rho(M; d_1)} = \varepsilon = \frac{5}{4}.$$

Пример 4.

Фокусы гиперболы расположены на оси ОУ. Длина мнимой оси гиперболы равна 8, длина действительной оси равна 6. Написать каноническое уравнение гиперболы, найти ее эксцентриситет и асимптоты.

Решение:

Так как фокусы гиперболы расположены на оси ОУ, то гипербола с действительной полуосью $b = 6$, мнимой полуосью $a = 8$, и вершинами на оси ОУ имеет каноническое уравнение:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Прямые, являющиеся асимптотами гиперболы имеют вид $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{8}{6}x = \pm\frac{4}{3}x$.

Пример : 11.

Написать уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(\sqrt{6},0)$ и $B(-2\sqrt{2};1)$.

Решение.

Так как гипербола проходит через точки А и В, то подставляем в формулу координаты каждой из этих точек. Формула гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\begin{cases}\frac{6}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1\\ \frac{8}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=6\\ \frac{8}{6}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=6\\ \frac{1}{b^2}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=6\\ b^2=3\end{cases}$$

Тогда уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$$

Пример 12.

Фокусы гиперболы расположены на оси ОУ. Длина мнимой оси гиперболы равна 8, длина действительной оси равна 6. Написать каноническое уравнение гиперболы, найти ее эксцентриситет и асимптоты.

Решение:

Так как фокусы гиперболы расположены на оси ОУ, то гипербола с действительной полуосью $b = 6$, мнимой полуосью $a = 8$, и вершинами на оси ОУ имеет каноническое уравнение:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Прямые, являющиеся асимптотами гиперболы имеют вид

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{8}{6}x = \pm\frac{4}{3}x.$$

Пример 13. Найти координаты фокусов и вершин гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$. Написать уравнение её асимптот и вычислить эксцентриситет.

Решение.

Напишем каноническое уравнение гиперболы, для этого обе части уравнения поделим на 144. После сокращения получим:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Отсюда видно, что $a^2 = 9$, т.е. $a = 3$ и $b^2 = 16$, т.е. $b = 4$.

Для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, отсюда $c = 5$.

Теперь можем написать координаты вершин и фокусов гиперболы:

$$A_1(3,0),\ A_2(-3,0),\ F_1(5,0),\ F_2(-5,0).$$

Эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$, а уравнения асимптот имеют вид:

$$y = \frac{4}{3}x \text{ и } y = -\frac{4}{3}x.$$

То есть, **для любой** точки M гиперболы отношение её расстояния от фокуса $|F_1M|$ к расстоянию от неё же до ближайшей директрисы $\rho(M;d_1)$ равно эксцентриситету:

$$\frac{|F_1M|}{\rho(M;d_1)}=\varepsilon=\frac{5}{4}.$$

Для пары F_2, d_2 и **любой** точки N гиперболы отношение такое же: $\dfrac{|F_2N|}{\rho(N;d_2)}=\varepsilon=\dfrac{5}{4}$

Ответ: искомая линия представляет собой гиперболу $-\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{(y-5)^2}{4^2}=1$ с центром симметрии в точке $\tilde{O}(0;5)$ и повёрнутую на 90 градусов относительно своего канонического положения. Канонический вид уравнения: $\dfrac{x^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$, фокусы: $F_1(5;0), F_2(-5;0)$, эксцентриситет: $\varepsilon=\dfrac{5}{4}$, асимптоты: $y=\dfrac{3}{4}x$, $y=-\dfrac{3}{4}x$, директрисы: $d_1: 5x-16=0$, $d_2: 5x+16=0$.

Пример 14. Определить координаты фокусов, длину осей, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот гиперболы $24x^2 - 25y^2 = 600$.

Решение. Разделим обе части уравнения на 600, получим

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

Отсюда

$$a^2 = 25, \quad a = 5;$$

$$b^2 = 24, \quad b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 24 = 49, \; c = 7.$$

Фокусы расположены в точках $F_1(-7{,}0)$, $F_2(7{,}0)$.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{7}{5} = 1{,}4 > 1.$$

Уравнения директрис

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{5}{\frac{7}{5}} = \pm\frac{25}{7} = \pm 3\frac{4}{7}.$$

Уравнения асимптот

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}x.$$

Пример 15. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $A(9,-4)$, если ее действительная полуось $a=3$.

Решение. Поскольку точка A принадлежит гиперболе, ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы (9):

$$\frac{9^2}{a^2}-\frac{(-4)^2}{b^2}=1.$$

Подставим $a=3$, получим

$$\frac{81}{3^2}-\frac{16}{b^2}=1.$$

Из уравнения находим $b^2=2$. Окончательно получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1.$$

Пример 16. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{3}{4}x$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать уравнение гиперболы.

Решение. Исходя из уравнения асимптот, имеем $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Кроме того, $F_1F_2 = 2c = 20$, т.е. $c = 10$. Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, найдем значения a и b.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения b^2 через a^2 и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} b^2 = \frac{9a^2}{16}, \\ \frac{9a^2}{16} + b^2 = 100. \end{cases}$$

Из системы находим $a = 8$, $b = 6$.

Уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

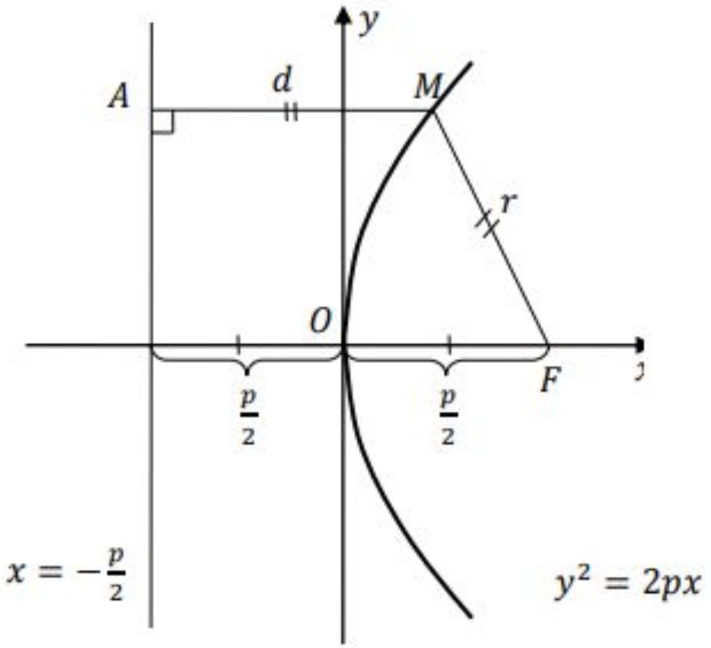
Парабола

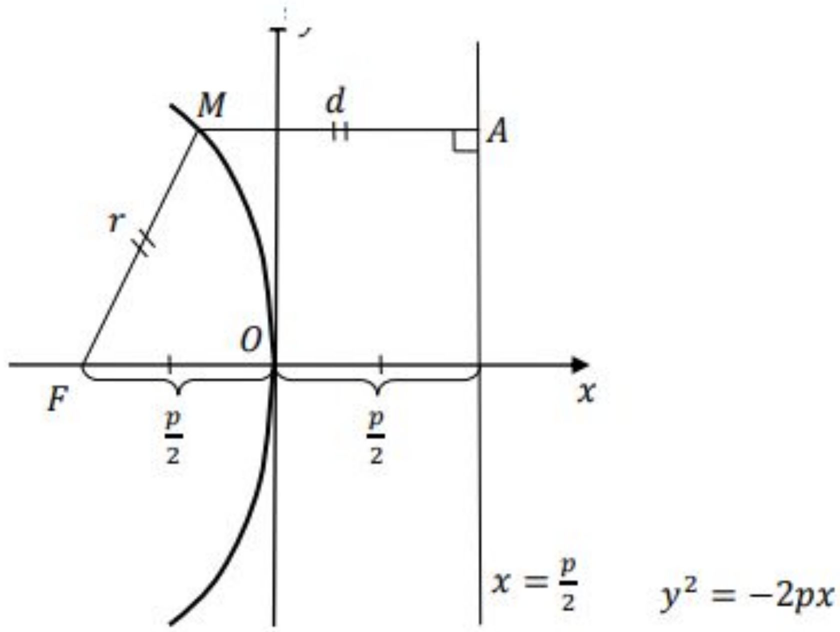
Определение параболы

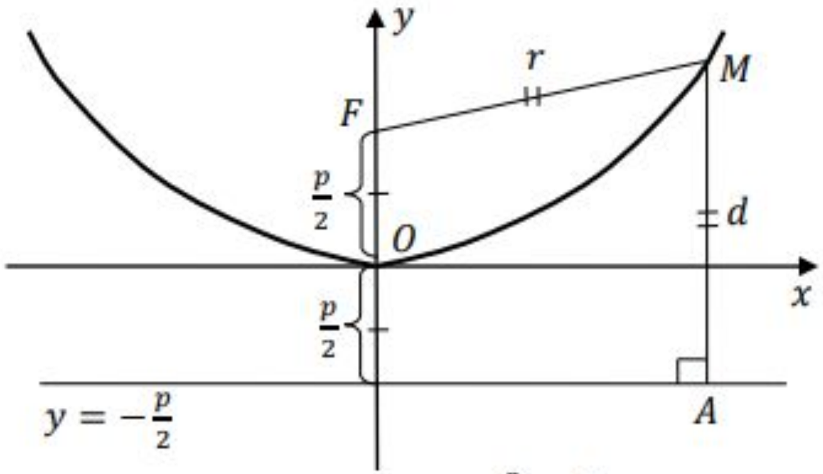
Параболой называется множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки F, называемой фокусом, равно расстоянию от этой же точки до фиксированной прямой, называемой директрисой. Расстояние между фокусом и директрисой называется *параметром* параболы и обозначается через p.

Каноническое уравнение параболы $\boldsymbol{y^2 = 2px}$. $\boldsymbol{y^2 = -2px}$ $\boldsymbol{x^2 = 2py}$ $\boldsymbol{x^2 = -2py}$

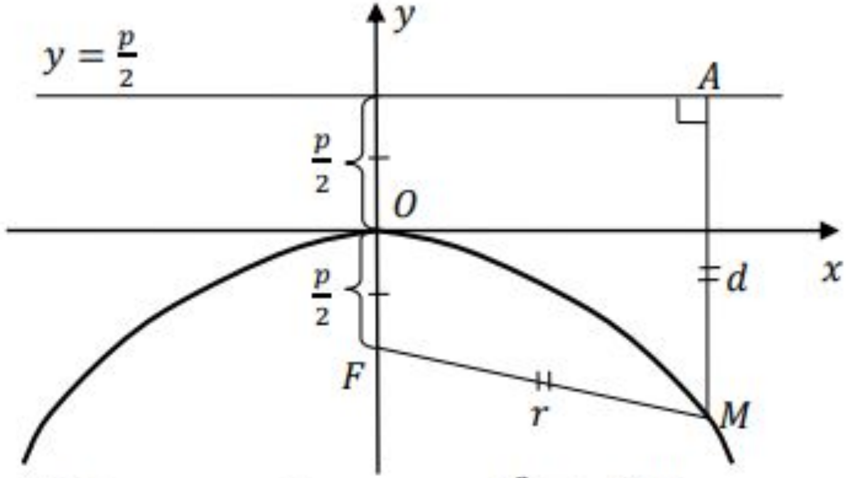
Форма параболы







$x^2 = 2py$



$x^2 = -2py$

Уравнение параболы, записанное в виде

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2 = \boldsymbol{2p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2,$$

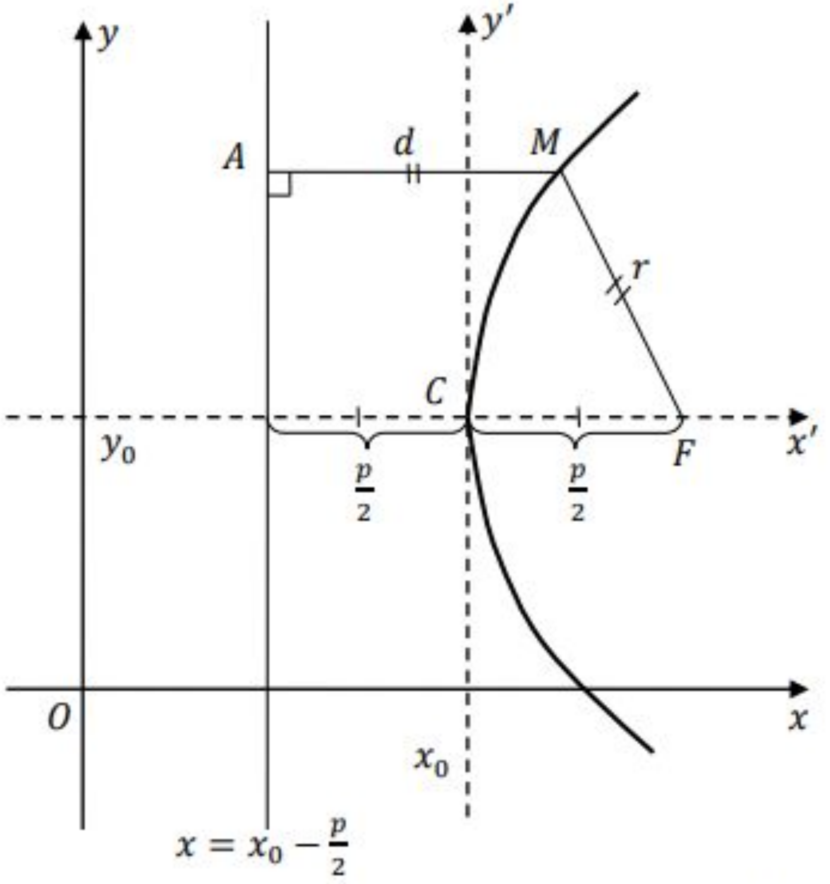
называют *нормальным уравнением параболы*. Оно представляет параболу с вершиной в точке $C(x_0;\ y_0)$, осью симметрии, параллельной оси абсцисс и ветвями, направленными вправо.

Аналогично можно записать остальные нормальные уравнения параболы:

$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2 = -\boldsymbol{2p}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2$ – парабола с вершиной в точке $C(x_0;\ y_0)$, осью симметрии, параллельной оси абсцисс и ветвями, направленными влево;

$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2 = \boldsymbol{2p}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2$ – парабола с вершиной в точке $C(x_0;\ y_0)$, осью симметрии, параллельной оси ординат и ветвями, направленными вверх;

$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2 = -\boldsymbol{2p}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2$ – парабола с вершиной в точке $C(x_0;\ y_0)$, осью симметрии, параллельной оси ординат и ветвями, направленными вниз.



Форма параболы, заданной уравнением $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

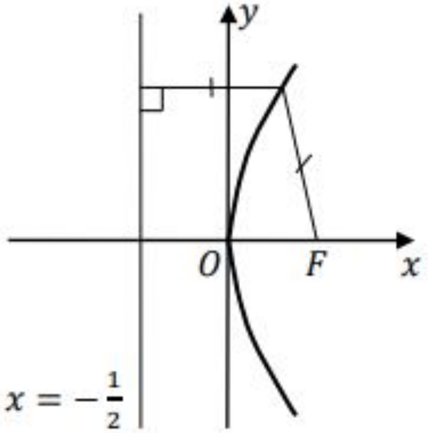
Эксцентриситет параболы *равен* 1: $e = 1$.

Так как для параболы отношение расстояния от произвольной точки до фокуса равно расстоянию от этой же точки до директрисы, то *эксцентриситет параболы равен* 1: $e = 1$.

Пример. 1. Построить параболу по её каноническому или нормальному уравнению:

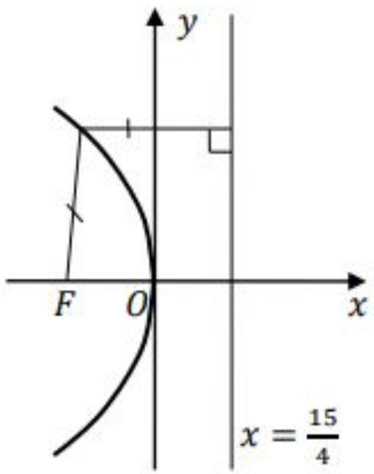
Решение.

1) $y^2 = 2x$. Преобразуем уравнение: $y^2 = 2 \cdot 1 \cdot x$. Вершина находится в точке $C(0;0)$, ветви направлены вправо, параметр $p = 1$, фокус $F\left(\frac{1}{2};0\right)$, директриса $x = -\frac{1}{2}$ (рис. 4.7).

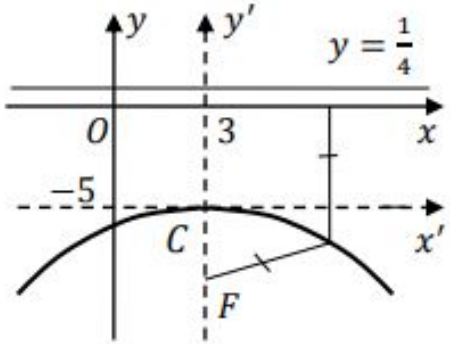


5

2) $y^2 = -15x$. Преобразуем уравнение: $y^2 = -2 \cdot \frac{15}{2} \cdot x$. Вершина находится в точке $C(0;0)$, ветви направлены влево, параметр $p = \frac{15}{2}$, фокус $F\left(-\frac{15}{4};0\right)$, директриса $x = \frac{15}{4}$ (рис. 4.8).



3) $(x-3)^2 = -21(y+5)$. Преобразуем уравнение: $(x-3)^2 = -2 \cdot \frac{21}{2} \cdot (y+5)$. Вершина параболы находится в точке $C(3;-5)$, ветви направлены вниз, параметр $p = \frac{21}{2}$, фокус $F\left(3;-\frac{41}{4}\right)$, директриса $y = \frac{1}{4}$



Пример 2 Составить уравнение параболы, вершина которой нахо дится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично отно сительно оси Ox и её параметр $p = 3$;

2) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично от носительно оси Oy и её параметр $p = 3$;

3) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и про ходит через точку $A(9; 6)$;

4) парабола расположена симметрично относительно оси Oy и про ходит через точку $A(4; -8)$;

5) фокус параболы $F(0; -3)$ и осью параболы служит ось Oy.

Решение.

1) Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. Подстав- ляем $p = 3$: $y^2 = 6x$.

2) Каноническое уравнение параболы имеет вид $x^2 = -2py$. Под ставляем $p = 3$: $x^2 = -6y$.

3) Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. Подстав ляем координаты точки A: $6^2 = 2p \cdot 9$. Отсюда параметр параболы $p = 2$ и уравнение параболы $y^2 = 4x$.

4) Каноническое уравнение параболы имеет вид $x^2 = -2py$. Под ставляем координаты точки A: $4^2 = -2p \cdot (-8$ Отсюда параметр параболы $p = 1$ и уравнение параболы $x^2 = -2y$.

5) Каноническое уравнение параболы имеет вид $x^2 = -2py$. Расстоя ние от вершины параболы до фокуса равно 3, поэтому $\frac{p}{2} = 3$ и $p = 6$. Урав нение параболы $x^2 = -12y$.

Пример 3 Среди приведённых уравнений указать уравнения пара болы, найти параметр каждой из них:

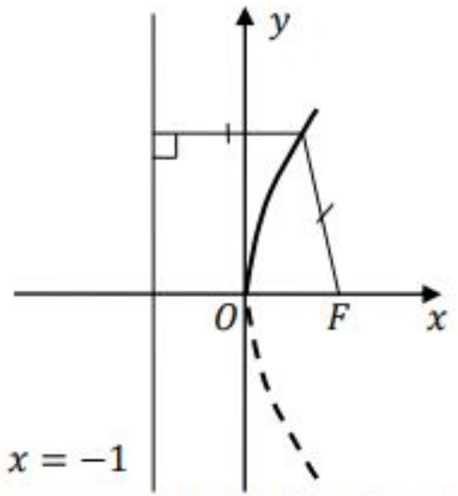
1) $5x - 2 = 0$;	2) $x^2 = 4y$;
3) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$;	4) $2x^2 + 7y^2 = 1$;
5) $y^2 = -x$;	6) $x^2 = -3y$;
7) $x^2 + y^2 = 2$;	8) $y^2 = \frac{1}{2}x$;
9) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$;	10) $x^2 = \frac{8}{3}y$.

Ответ: 2), $p = 2$; 5), $p = \frac{1}{2}$; 6), $p = \frac{3}{2}$; 8), $p = \frac{1}{4}$; 10), $p = \frac{4}{3}$.

Пример 4.6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

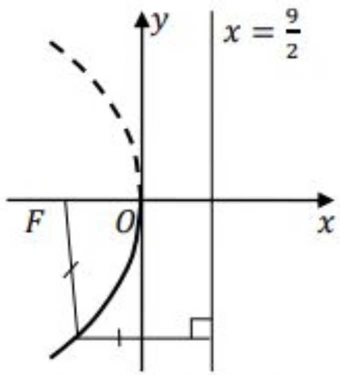
Решение.

1) $y = 2\sqrt{x}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} y \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $y^2 = 4x$. Преобразуем: $y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$. Полученное уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке $C(0;0)$, ветви направлены вправо, параметр $p = 2$, фокус $F(1;0)$, директриса $x = -1$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть параболы, расположенную в первом координатном углу (рис. 4.17).



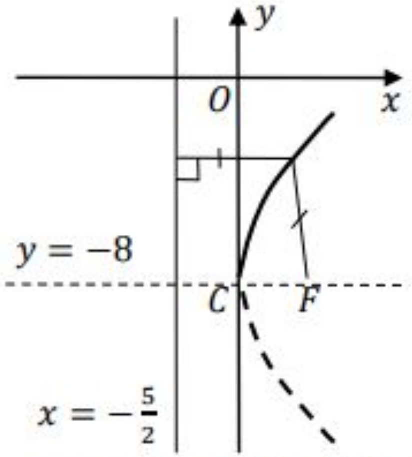
. Парабола с вершиной в точке $C(0;0)$ и параметром $p = 1$

2) $y = -3\sqrt{-2x}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} y \leq 0, \\ -2x \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \leq 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $y^2 = -18x$. Преобразуем: $y^2 = -2 \cdot 9 \cdot x$. Полученное уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке $C(0;0)$, ветви направлены влево, параметр $p = 9$, фокус $F\left(-\frac{9}{2};0\right)$, директриса $x = \frac{9}{2}$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть параболы, расположенную в третьем координатном углу (рис. 4.18).



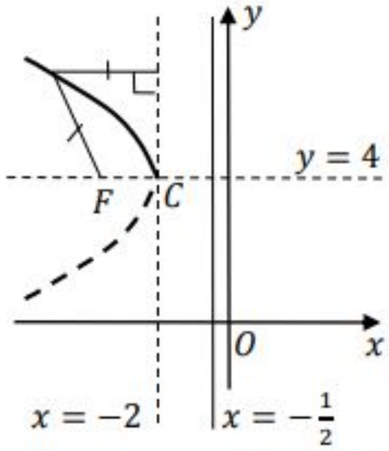
Парабола с вершиной в точке $C(0;0)$ и параметром $p = \frac{9}{2}$

3) $y = -8 + \sqrt{10x}$. Перепишем уравнение в виде: $y + 8 = \sqrt{10x}$. За пишем ограничения: $\begin{cases} y + 8 \geq 0, \\ 10x \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \geq -8, \\ x \geq 0. \end{cases}$ Возведём обе част уравнения в квадрат: $(y+8)^2 = 10x$. Преобразуем: $\left(y - (-8)\right)^2 =$ $= 2 \cdot 5(x - 0)$. Полученное уравнение определяет параболу. Вершина пара болы находится в точке $C(0; -8)$, ветви направлены вправо, параметр $p =$ $= 5$, фокус $F\left(\frac{5}{2}; -8\right)$, директриса $x = -\frac{5}{2}$. Учитывая полученные выш ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть парабо лы, расположенной выше прямой $y = -8$ (рис. 4.21).



Парабола с вершиной в точке $C(0; -8)$ и параметром $p = 5$

4) $y = 4 + \sqrt{-6x - 12}$. Перепишем уравнение в виде: $y - 4 =$ $= \sqrt{-6(x+2)}$. Запишем ограничения: $\begin{cases} y - 4 \geq 0, \\ -6(x+2) \geq 0. \end{cases}$ Отсюда: $\begin{cases} y \geq 4, \\ x \leq -2. \end{cases}$ Возведём обе части уравнения в квадрат: $(y-4)^2 = -6(x+2)$. Преобразуем: $(y-4)^2 = -2 \cdot 3\left(x - (-2)\right)$. Полученное уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке $C(-2; 4)$, ветви направлены влево, параметр $p = 3$, фокус $F\left(-\frac{7}{2}; 4\right)$, директриса $x = -\frac{1}{2}$. Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть параболы, расположенной выше прямой $y = 4$



Парабола с вершиной в точке $C(-2; 4)$ и параметром $p = 3$

Пример5. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что фокус параболы $F\left(\frac{9}{4};0\right)$ и уравнение директрисы $4x+9=0$.

Решение. Фокус расположен на положительной части оси Ox на расстоянии $\frac{9}{4}$ от начала координат. Директриса пересекает отрицательную часть оси Ox, параллельна оси Oy и расположена на таком же расстоянии от начала координат, что и фокус. Поэтому ветви параболы направлены вправо, её уравнение имеет вид $y^2=2px$, где $\frac{p}{2}=\frac{9}{4}$, $p=\frac{9}{2}$. Составляем уравнение параболы: $y^2=2\cdot\frac{9}{2}\cdot x=9x$.

Ответ: $y^2=9x$.

Пример6. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2=20x$, если абсцисса точки M равна 7.

Решение. Обозначим ординату точки M через y_0. Тогда $M(7;\,y_0)$. Преобразуем уравнение параболы: $y^2=2\cdot 10\cdot x$. Параметр параболы $p=10$, фокус $F(5;0)$. Найдём y_0. Для этого подставим координаты точки M в уравнение параболы: ${y_0}^2=20\cdot 7$, $y_0=\pm\sqrt{140}$. Получаем две точки: $M_1(7;\,\sqrt{140})$, $M_2(7;\,-\sqrt{140})$.

Вычислим фокальный радиус точки M, то есть расстояние $r=FM_1$ или $r=FM_2$. Получаем:

$$r=FM_1=\sqrt{(5-7)^2+\left(0-\sqrt{140}\right)^2}=\sqrt{4+140}=12.$$

Пример **7.**

Составить уравнение множества точек, для каждой из которых квадрат расстояния до точки $K(2;0)$ на 16 больше квадрата расстояния до оси ординат.

Решение: Пусть точка $M(x;y)$ принадлежит искомому множеству. Тогда:

$$|KM| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

По условию $|KM|^2$ **на 16 больше**, чем $(\rho(M;OY))^2$, следовательно, справедливо следующее равенство:

$$|KM|^2 - 16 = (\rho(M;\,OY))^2$$

(либо $|KM|^2 = (\rho(M;\,OY))^2 + 16$*)*

Таким образом:

$$(\sqrt{(x-2)^2 + y^2})^2 - 16 = |x|^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 - 16 = x^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16 = x^2$$

очевидно, уравнение нужно максимально приблизить к каноническому виду $y^2 = 2px$:

$$-4x + y^2 - 12 = 0$$

$$y^2 = 4x + 12$$

$y^2 = 4(x+3)$ – **парабола** с вершиной в точке $\tilde{O}(-3;0)$, фокальным параметром $p = 2$.

Ответ: искомое множество точек представляет собой параболу $y^2 = 4(x+3)$

Пример 8. Составить уравнение параболы и её директрисы, зная, что она симметрична относительно оси OY, фокус находится в точке $F(0;2)$, вершина совпадает с началом координат.

Решение.

Будем искать уравнение параболы в виде $x^2 = 2py$. По условию $\frac{p}{2} = 2$, а значит $p = 4$. Итак, искомое уравнение имеет вид: $x^2 = 8y$, уравнение её директрисы: $y = -2$.

Задача 4. Найдите координаты центра и радиус окружности:

$x^2 + y^2 - 8x + 16y - 41 = 0$

Решение.

Выделяя полные квадраты суммы и разности слагаемых в левой части уравнения, получим: $(x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 + 16y + 64) - 64 - 41 = 0$ или;

$(x-4)^2 + (y+8)^2 = 16 + 64 + 41 = 121$; $(x-4)^2 + (y+8)^2 = 11^2$.

Центр: $C(4,-8)$, Радиус: $R = 11$.

Пример 9. Вывести уравнение геометрического места точек, для которых расстояние до данной точки $F(3,0)$ равно расстоянию до данной прямой $x + 3 = 0$.

Решение. Найдем расстояние FM и MN (см. рис. 7):

$$FM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}, \quad MN = x + 3;$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = x + 3.$$

Решим уравнение $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 6x + 9$. Получим уравнение параболы $y^2 = 12x$.

Пример 10. Построить кривую, заданную уравнением $x^2 + 2x + 6y - 2 = 0$, приведя его к каноническому виду.

Решение. Преобразуем уравнение следующим образом

$$(x^2 + 2x) = -6y + 2,\ (x^2 + 2x + 1) = -6y + 2 + 1,$$

$$(x+1)^2 = -6y + 3,\ (x+1)^2 = -6(y - 0{,}5).$$

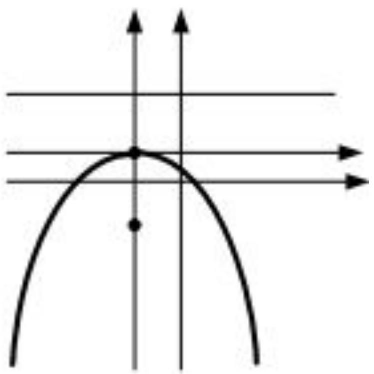
Получили уравнение параболы (см. 1.2.5) с вершиной в точке $O'(-1; 0{,}5)$ и с осью симметрии, параллельной оси Oy. Перенося начало координат в точку O', получим в системе координат $x'O'y'$ уравнение

$$(x')^2 = -6(y'),$$

где параметр p определяется из условия $2p = 6$ или $p = 3$.

Парабола симметрична относительно оси $O'y'$ или относительно прямой $x = -1$. Фокус параболы находится на ее оси и отстоит от вершины на $\frac{p}{2}$. Поскольку из уравнения следует, что $y' \le 0$, то ветви параболы направлены вниз и фокус F лежит на $\frac{p}{2} = 1{,}5$ ниже вершины, то есть его координаты $F(-1; -1)$.

Директрисой параболы является прямая, перпендикулярная ее оси и находящаяся на расстоянии $\frac{p}{2} = 1{,}5$ от вершины, причем фокус и директриса расположены по разные стороны от вершины. Учитывая все это, можно записать уравнение директрисы $y = 0{,}5 + 1{,}5$, или $y = 2$.



Пример **11.**

Написать уравнение кривой как геометрического места точек, равноудаленных от точки F(0,6) и прямой y = - 6.

Решение

По определению данной кривой является парабола. Поскольку фокус лежит на оси ОУ, то уравнение параболы $x^2 = 2py$. Вычисляем параметр p по известному фокус F(0,6):

$$F\left(0;\frac{p}{2}\right) = F(0;6) \Rightarrow \frac{p}{2} = 6 \Rightarrow p = 12$$

Получаем уравнение параболы $x^2 = 24y$.

***Пример* 12.**

Дано уравнение параболы $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$. Найти координаты вершины, фокуса, уравнение директрисы параболы.

Решение.

Перенесем слагаемые, содержащие x, вправо. Слагаемые, содержащие y, оставим слева и выделим полный квадрат выражения:

$y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$ или $y^2 - 8y + 16 + 8 = 4x$ или $y^2 - 8y+16 = 4(x - 2)$ или

$(y - 4)^2 = 2*2(x - 2)$.

Из последнего выражения, получаем, что вершина параболы $A(x_0,y_0) = A(2,4)$,

параметр $p = 2$.

Фокус $F(x_0+p/2;\ y_0) = F(2+1;4) = F(3;4)$.

Директриса имеет уравнение вида: $x = x_0 - \frac{p}{2} = 2 - \frac{2}{2} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить координаты центров и радиусы окружностей:
   1) $x^2+y^2-8x+6y=0$; 2) $x^2+y^2+10x-4y+29=0$; 3) $x^2+y^2-4x+14y+54=0$

2. Найти угол между радиусами окружности $x^2+y^2+4x-6y=0$, проведенными в точки ее пересечения с осью Oy.

3. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A\ (1;\ 2)$, $B\ (0;\ -1)$ и $C\ (-3;\ 0)$.

4. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A\ (7;\ 7)$ и $B\ (-2;\ 4)$, если ее центр лежит на прямой $2x-y-2=0$.

5. Составить уравнение общей хорды окружностей $x^2+y^2=16$ и $(x-5)^2+y^2=9$.

6. На эллипсе $x^2/25+y^2/9=1$ найти точку, разность фокальных радиусов-векторов которой равна 6,4

7. Найти длину перпендикуляра, восставленного из фокуса эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ к большой оси до пересечения с эллипсом.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через лёвый фокус и нижнюю вершину эллипса $x^2/25+y^2/16=1$.

9. Эллипс, отнесенный к осям, проходит через точку $M\ (1;\ 1)$ и имеет эксцентриситет $e=3/5$. Составить уравнение эллипса.

10. Как расположены относительно эллипса $x^2/50+y^2/32=1$ точки $M\ (7;\ 1)$, $N\ (-5;\ -4)$, $P\ (4;\ 5)$?

11. Найти эксцентриситет эллипса, если фокальный отрезок виден из верхней вершины под углом α.

12. На прямой $x+5=0$ найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса $x^2/20+y^2/4=1$.

13. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса $x^2/8+y^2/5=1$.

14. Через точку $M\ (0;\ -1)$ и правую вершину гиперболы $3x^2-4y^2=12$ проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

15. Дана гипербола $x^2-y^2=8$. Найти софокусный эллипс, про ходящий через точку $M\ (4;\ 6)$.

16. Дан эллипс $9x^2+25y^2=1$. Написать уравнение софокусной равнобочной гиперболы.

17. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M\ (9;\ 8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y=\pm(2\sqrt{2}/3)\,x$

18. Угол между асимптотами гиперболы равен 60°. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

19. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox.

20. На параболе $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

21. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и отсекающей от прямой $y=x$ хорду длиной $4\sqrt{2}$.

22. Парабола $y^2=2x$ отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна 3/4. Составить уравнение этой прямой.

23. Составить простейшее уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.

24. На параболе $y^2=32x$ найти точку, расстояние которой от прямой $4x+3y+10=0$ равно 2.

25. Привести к каноническому виду уравнения парабол:
1) $y=4x-2x^2$; 2) $y=-x^2+2x+2$; 3) $x=-4y^2+y$;
4) $x=y^2+4y+5$. 5) $y=9x^2-6x+2$.