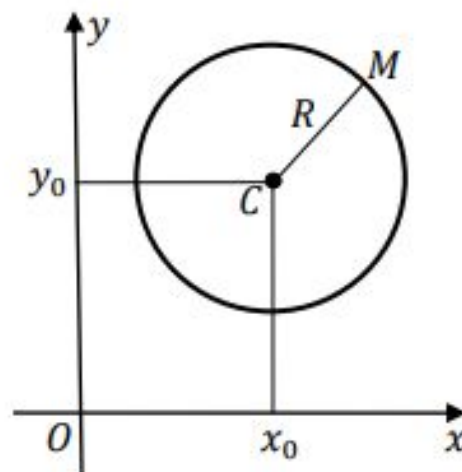


# КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРАКТИКА

# . Окружность

## Определение окружности

*Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки, называемой её центром. Пусть точка  $C(x_0; y_0)$  – центр окружности,  $R$  – расстояние от любой точки окружности до её центра (это расстояние называют радиусом окружности),  $M(x; y)$  – произвольная точка окружности.



## . Каноническое уравнение окружности

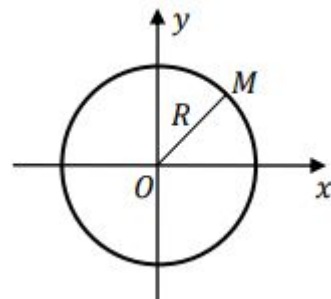
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

уравнение называется *нормальным уравнением окружности*.

Если центр окружности находится в начале координат, то уравнение окружности принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и называется *каноническим (простейшим) уравнением окружности*



**Пример. 1**

Построить окружность  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ .

*Решение.* Для того, чтобы построить окружность, нужно знать координаты ее центра и радиус. Приведем уравнение окружности к виду (1). Для этого сгруппируем слагаемые, содержащие  $x$ , и отдельно слагаемые, содержащие  $y$ :

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + 4 = 0$$

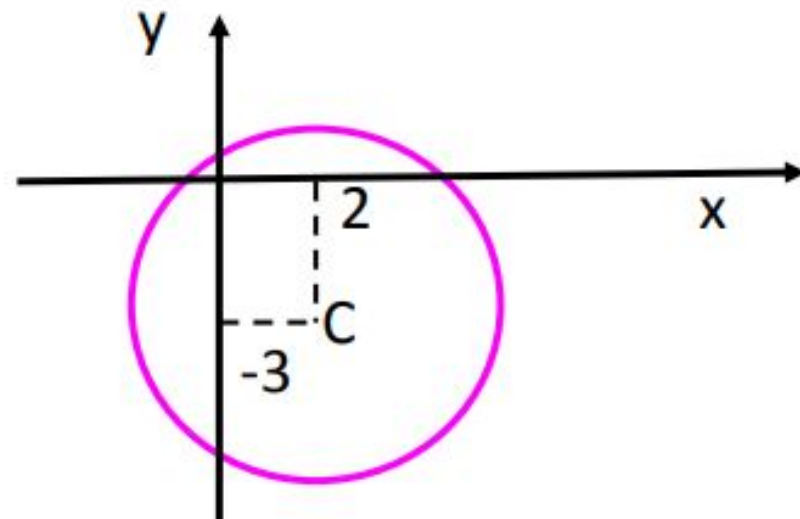
Выражения в скобках дополним до полных квадратов:

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 4 = 0.$$

Тогда уравнение окружности получим в виде:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2.$$

Отсюда координаты центра  $C(2; -3)$  и радиус  $R = 3$  окружности; построим окружность



**Пример 1.** Составить каноническое или нормальное уравнение окружности с центром в точке  $C$  радиуса  $R$ :  $C(0; 0), R = 2$ ;

**Решение.** Воспользуемся каноническим уравнением окружности радиуса  $R$ :  $x^2 + y^2 = R^2$ . В условиях примера  $R = 2$ . Подставляем это значение в каноническое уравнение окружности. Получаем:  $x^2 + y^2 = 2^2$ . Преобразуем:  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Пример 2.** Дано каноническое или нормальное уравнение окружности. Определить координаты её центра и радиус:

1)  $x^2 + y^2 = 49$ ;                      2)  $(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = \frac{12}{7}$ ;

**Решение.**

1) Сравним данное уравнение с каноническим уравнением окружности радиуса  $R$ :  $x^2 + y^2 = R^2$ . Преобразуем данное уравнение:  $x^2 + y^2 = 7^2$ . Центр окружности находится в точке  $C(0; 0)$ , радиус  $R = 7$ .

2) Сравним данное уравнение с нормальным уравнением окружности с центром в точке  $C(x_0; y_0)$  радиуса  $R$ :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ . Преобразуем данное уравнение:  $(x - (-4))^2 + (y - (-8))^2 = \left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right)^2$ . Центр окружности находится в точке  $C(-4; -8)$ , радиус  $R = \sqrt{\frac{12}{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ .

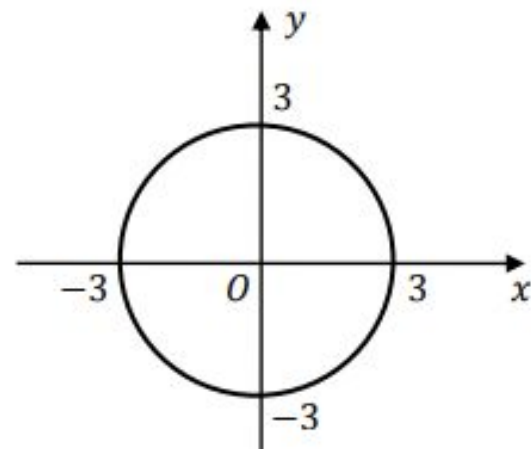
**Пример.3.** Построить окружность по её каноническому или нормальному уравнению:

1)  $x^2 + y^2 = 9$ ;

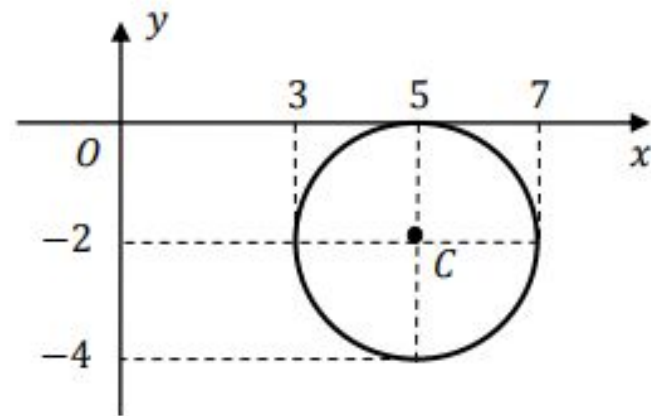
2)  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4$ ;

**Решение.**

1)  $x^2 + y^2 = 9$ . Преобразуем уравнение:  $x^2 + y^2 = 3^2$ . Центр окружности находится в точке  $C(0; 0)$ , радиус  $R = 3$  (рис. 1.4).



2)  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 4$ . Преобразуем уравнение:  $(x - 5)^2 + (y - (-2))^2 = 2^2$ . Центр окружности находится в точке  $C(5; -2)$ , радиус  $R = 2$



**Пример 4.** Среди приведённых уравнений указать уравнения окружности, найти центр и радиус каждой из них:

1)  $x^2 + y^2 = 4$ ;

2)  $y = -4x + 1$ ;

3)  $x^2 - y^2 = 4$ ;

4)  $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 1$ ;

5)  $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$ ;

6)  $x = -5$ ;

7)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = -2$ ;

8)  $x^2 + (y + 7)^2 = 5$ ;

9)  $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 11 = 0$ ;

10)  $y^2 = 7x - 2$ ;

11)  $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ ;

12)  $x^2 + y^2 + 8y + 16 = 0$ ;

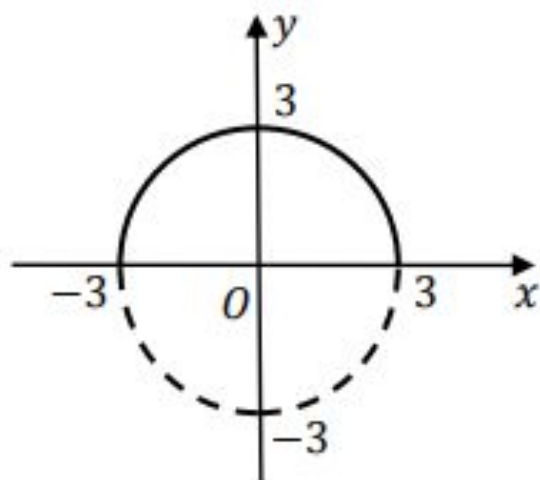
**Пример.5.** Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

$$1) y = \sqrt{9 - x^2};$$

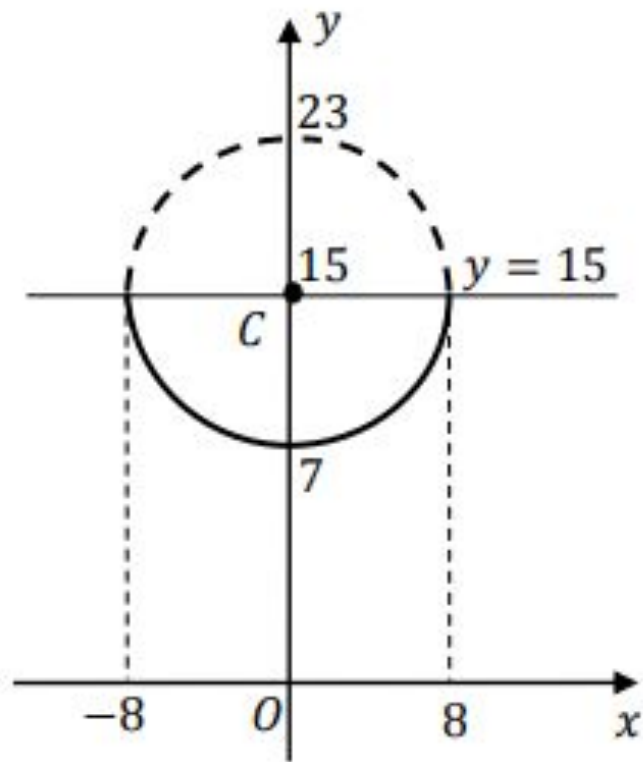
**Решение.**

1)  $y = \sqrt{9 - x^2}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y \geq 0, \\ 9 - x^2 \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:

$\begin{cases} y \geq 0, \\ x \in [-3; 3]. \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $y^2 = 9 - x^2$ . Преобразуем:  $x^2 + y^2 = 9$ . Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке  $C(0; 0)$  радиуса  $R = 3$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет верхнюю половину окружности



2)  $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$ . Преобразуем:  $y - 15 = -\sqrt{64 - x^2}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y - 15 \leq 0, \\ 64 - x^2 \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:  $\begin{cases} y \leq 15, \\ x \in [-8; 8]. \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $(y - 15)^2 = 64 - x^2$ . Преобразуем:  $x^2 + (y - 15)^2 = 64$ . Полученное уравнение определяет окружность с центром в точке  $C(0; 15)$  радиуса  $R = 8$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет нижнюю половину окружности (рис. 1.16).

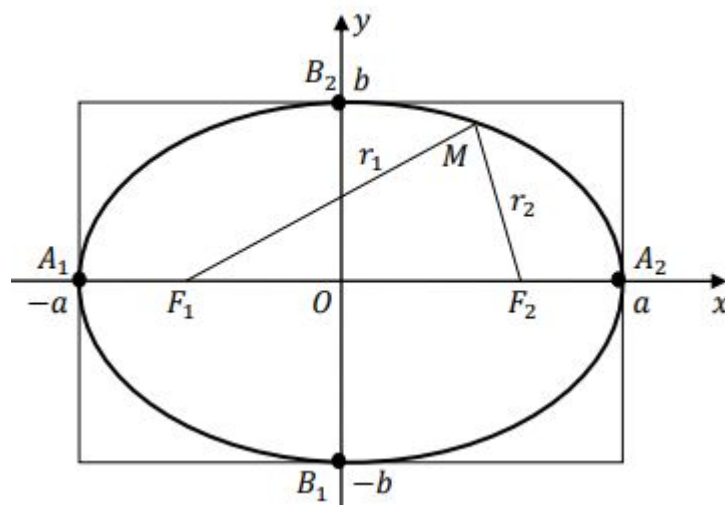




# Эллипс

Каноническое уравнение эллипса

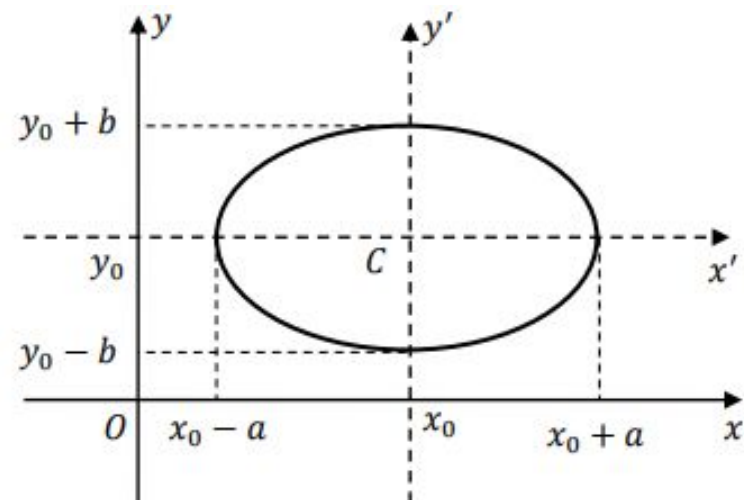
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Уравнение эллипса, записанное в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

называют *нормальным уравнением эллипса*. Оно представляет эллипс со смещённым центром и осями, параллельными координатным осям.



**Пример 1.** Составить каноническое или нормальное уравнение эллипса с центром в точке  $C$ , полуосями  $a$  и  $b$ , если фокусы эллипса лежат на оси абсцисс (ординат) или на прямой, параллельной этой оси, симметрично относительно точки  $C$ :

1)  $C(0; 0)$ ,  $a = 8$ ,  $b = 3$ ;

**Решение.**

1) Воспользуемся каноническим уравнением эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . В условиях примера  $a = 8$ ,  $b = 3$ . Подставляем эти значения в каноническое уравнение эллипса. Получаем:  $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ . Преобразуем:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2)  $C\left(-\frac{11}{5}; 0\right)$ ,  $a = \frac{7}{4}$ ,  $b = \frac{2}{5}$ .

Воспользуемся нормальным уравнением эллипса с центром в точке  $C(x_0; y_0)$  полуосями  $a$  и  $b$ :  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ . В условиях примера  $x_0 = -\frac{11}{5}$ ,  $y_0 = 0$ ,  $a = \frac{7}{4}$ ,  $b = \frac{2}{5}$ . Подставляем эти значения в нормальное

уравнение эллипса. Получаем:  $\frac{\left(x - \left(-\frac{11}{5}\right)\right)^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = 1$ . Преобразуем:

$$\frac{\left(x + \frac{11}{5}\right)^2}{\frac{49}{16}} + \frac{y^2}{\frac{4}{25}} = 1.$$

**Пример 2.** Определить координаты центра и полуоси эллипса по его каноническому или нормальному уравнению:

$$1) \frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{64} = 1;$$

**Решение.**

1) Сравним данное уравнение с каноническим уравнением эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Преобразуем данное уравнение:  $\frac{x^2}{11^2} + \frac{y^2}{8^2} = 1$ . Центр эллипса находится в точке  $C(0; 0)$ , полуоси  $a = 11$ ,  $b = 8$ .

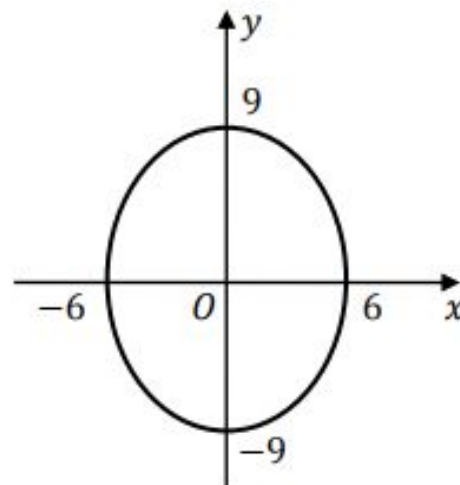
$$2) \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{64} = 1;$$

5) Сравним данное уравнение с нормальным уравнением эллипса с центром в точке  $C(x_0; y_0)$  полуосями  $a$  и  $b$ :  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ . Преобразуем данное уравнение:  $\frac{(x-5)^2}{3^2} + \frac{(y-(-3))^2}{8^2} = 1$ . Центр эллипса находится в точке  $C(5; -3)$ , полуоси  $a = 3$ ,  $b = 8$ .

**Пример.3.** Построить эллипс по его каноническому или нормаль-  
ному уравнению:

1)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1;$

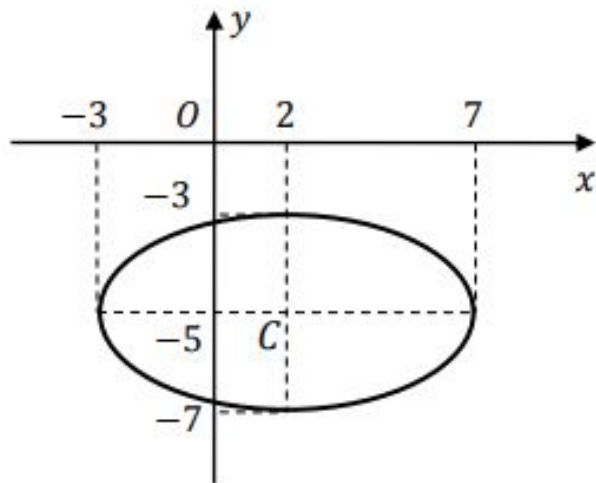
Преобразуем уравнение:  $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{9^2} = 1$  Центр эллипса находится  
в точке  $C(0; 0)$ , полуоси  $a = 6, b = 9$



2)  $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1;$

Преобразуем уравнение:  $\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-(-5))^2}{2^2} = 1.$

Центр эллипса находится в точке  $C(2; -5)$ , полуоси  $a = 5, b = 2$  (рис. 2.8).



**Пример.4.** Среди приведённых уравнений указать уравнения эллипса, найти полуоси каждого из них:

1)  $y = -\frac{1}{3}x + 2;$

2)  $x^2 - y^2 = 1;$

3)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

4)  $y^2 = -x + 2;$

5)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1;$

6)  $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{7} = 1;$

7)  $y = 4;$

8)  $3x^2 + 4y^2 = 12.$

9)  $16x^2 + 25y^2 = 81;$

10)  $9x^2 + 4y^2 = 1.$

~

**Пример.5.** Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

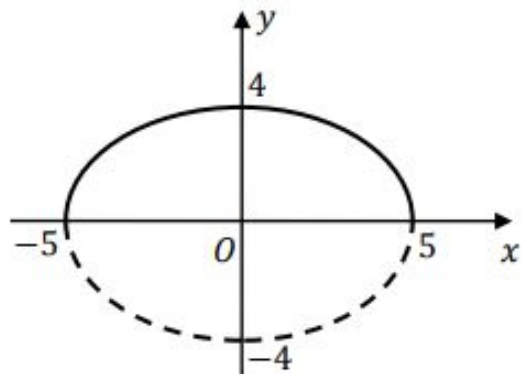
$$1) y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2};$$

**Решение.**

$$1) y = \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}; \text{ Запишем ограничения: } \begin{cases} y \geq 0, \\ 25 - x^2 \geq 0. \end{cases} \text{ Отсюда:}$$

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ -5 \leq x \leq 5. \end{cases} \text{ Возведём обе части уравнения в квадрат: } y^2 = \frac{16}{25}(25 - x^2).$$

Преобразуем:  $y^2 = 16 - \frac{16}{25}x^2$ ,  $\frac{16}{25}x^2 + y^2 = 16$ ,  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке  $C(0; 0)$  и полуосями  $a = 5$ ,  $b = 4$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет верхнюю половину эллипса

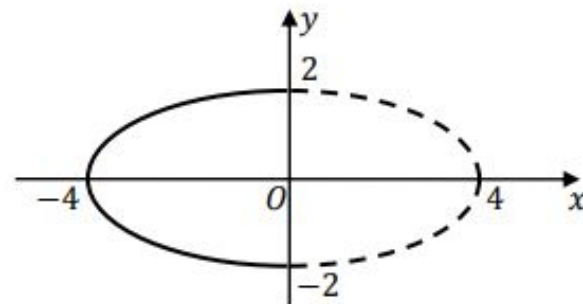


...

$$2) x = -2\sqrt{4 - y^2}. \text{ Запишем ограничения: } \begin{cases} x \leq 0, \\ 4 - y^2 \geq 0. \end{cases} \text{ Отсюда:}$$

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ -2 \leq y \leq 2. \end{cases} \text{ Возведём обе части уравнения в квадрат: } x^2 = 4(4 - y^2).$$

Преобразуем:  $x^2 = 16 - 4y^2$ ,  $x^2 + 4y^2 = 16$ ,  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке  $C(0; 0)$  и полуосями  $a = 4$ ,  $b = 2$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет левую половину эллипса



$$3) y = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{60 - 4x - x^2}. \text{ Преобразуем: } y - 3 = -\frac{1}{2}\sqrt{60 - 4x - x^2}.$$

Запишем ограничения:  $\begin{cases} y - 3 \leq 0, \\ 60 - 4x - x^2 \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:  $\begin{cases} y \leq 3, \\ -10 \leq x \leq 6. \end{cases}$

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$(y - 3)^2 = \frac{1}{4}(60 - 4x - x^2).$$

Преобразуем:

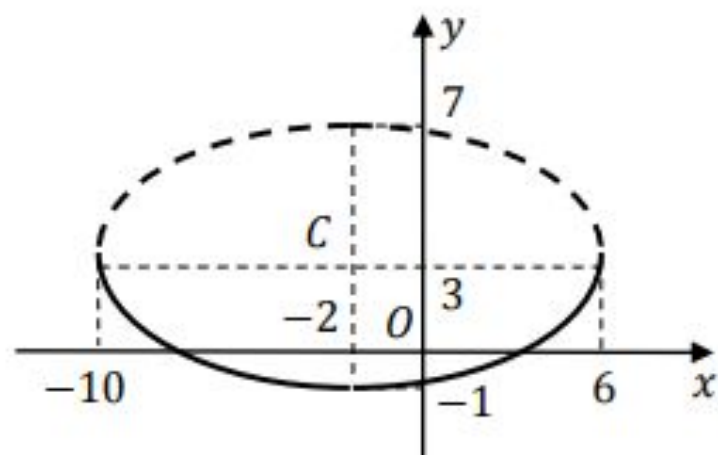
$$4(y - 3)^2 = -(x^2 + 4x - 60),$$

$$4(y - 3)^2 = -[(x + 2)^2 - 64],$$

$$(x + 2)^2 + 4(y - 3)^2 = 64,$$

$$\frac{(x+2)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1.$$

Полученное уравнение определяет эллипс с центром в точке  $C(-2; 3)$  и полуосями  $a = 8$ ,  $b = 4$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет нижнюю половину эллипса



## Эксцентриситет эллипса

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к большой оси. Эксцентриситет принято обозначать буквой  $e$ .

Можно записать:  $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ .

Таким образом, формула для нахождения эксцентриситета:

$$e = \frac{c}{a}.$$

При выводе канонического уравнения эллипса было показано, что  $c < a$ , поэтому  $e < 1$ .

## Фокальные радиусы эллипса

Учитывая также, что  $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = r_2$ , получаем формулу для нахождения фокального радиуса, проведённого из правого фокуса:

$$r_2 = a - ex.$$

Из равенства  $r_1 + r_2 = 2a$  выразим  $r_1$ :

$$r_1 = 2a - r_2 = 2a - (a - ex) = a + ex.$$

Формула для нахождения фокального радиуса, проведённого из левого фокуса:

$$r_1 = a + ex.$$



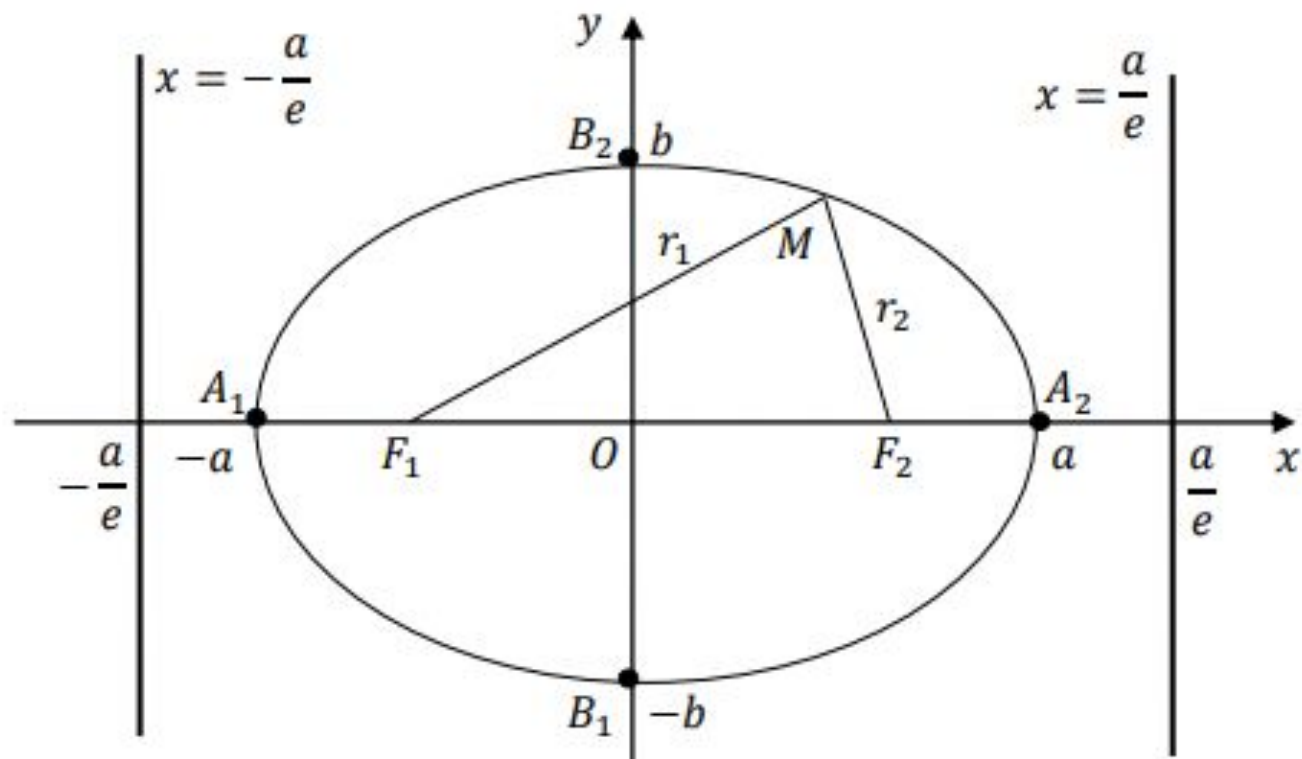
## Директрисы эллипса

Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии  $\frac{a}{e}$  от него, называются *директрисами* эллипса.

Уравнения директрис имеют вид:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

Так как для эллипса  $e < 1$ , то  $\frac{a}{e} > a$  и, следовательно, директрисы расположены вне эллипса



**Пример.5.** Дан эллипс  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Найти: 1) его полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис.

**Решение.** Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Исходя из канонического уравнения эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  запишем квадраты полуосей эллипса:  $a^2 = 64$ ,  $a = 8$  и  $b^2 = 36$ ,  $b = 6$ .

2) Фокусы эллипса представляют точки  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ . При выводе канонического уравнения эллипса была получена формула  $a^2 - c^2 = b^2$

. Отсюда  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Подставляем значения квадратов полуосей:  $c = \sqrt{64 - 36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ . Тогда фокусы эллипса:  $F_1(-2\sqrt{7}; 0)$ ,  $F_2(2\sqrt{7}; 0)$ .

3) Эксцентриситет эллипса находят по формуле:  $e = \frac{c}{a}$ . Подставляем числовые значения:  $e = \frac{2\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .

4) Уравнения директрис имеют вид:  $x = \pm \frac{a}{e}$ . Подставляем числовые значения:  $x = \pm \frac{8}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \pm \frac{32}{\sqrt{7}} = \pm \frac{32\sqrt{7}}{7}$ .

**Ответ:** 1)  $a = 8$ ,  $b = 6$ ; 2)  $F_1(-2\sqrt{7}; 0)$ ,  $F_2(2\sqrt{7}; 0)$ ; 3)  $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ; 4)  $x = \pm \frac{32\sqrt{7}}{7}$ .

**Пример.6.** Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что:

- 1) полуоси равны 5 и 3;
- 2) расстояние между фокусами равно 6 и большая полуось равна 5;
- 3) большая полуось равна 10 и эксцентриситет равен  $\frac{4}{5}$ ;
- 4) малая полуось равна 3 и эксцентриситет равен  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- 5) большая полуось равна 4 и расстояние между директрисами равно  $\frac{16\sqrt{6}}{3}$ .

**Решение.**

1) Подставим значение полуосей в каноническое уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Получаем:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

2) Так как расстояние между фокусами равно 6, то есть  $2c = 6$ , то  $c = 3$ . Далее используем формулу, связывающую  $a$ ,  $b$  и  $c$ :  $a^2 - c^2 = b^2$ . Выразим  $b$ :  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Подставляем числовые значения:  $b = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ . Составляем каноническое уравнение эллипса:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .

3) Воспользуемся формулой эксцентриситета  $e = \frac{c}{a}$ . Выразим отсюда  $c$ :  $c = ae$ . Подставляем  $a = 10$ ,  $e = \frac{4}{5}$ . Получаем:  $c = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8$ . Тогда  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ . Составляем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

4) Воспользуемся формулой эксцентриситета  $e = \frac{c}{a}$  и формулой, связывающую  $a$ ,  $b$  и  $c$ :  $a^2 - c^2 = b^2$ . Получаем:  $e = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$ . Подставляем  $b = 3$ ,  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ :  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{\sqrt{3^2+c^2}}$ . Отсюда найдём  $c$ . Возведём обе части равенства в квадрат:  $\frac{1}{2} = \frac{c^2}{9+c^2}$ . Преобразуем:  $9 + c^2 = 2c^2$ ,  $c^2 = 9$ ,  $c = 3$ . Тогда  $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ . Составляем каноническое уравнение эллипса:  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

5) Так как директрисы задаются уравнениями  $x = \pm \frac{a}{e}$ , то расстояние между директрисами равно  $\frac{2a}{e}$ . Учитывая, что по условию расстояние между директрисами равно  $\frac{16\sqrt{6}}{3}$  и  $a = 4$ , получаем:  $\frac{16\sqrt{6}}{3} = \frac{2 \cdot 4}{e}$ . Отсюда  $e = \frac{3 \cdot 8}{16\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ .

Далее, учитывая, что  $e = \frac{c}{a}$ , запишем выражение для  $c$ :  $c = ae$ .

Подставляем:  $c = 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6}$ . Тогда  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$ .

Составляем каноническое уравнение эллипса:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$ .

**Ответ:** 1)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ; 3)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; 5)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{10} = 1$ .

**Пример 7.** Эксцентриситет эллипса равен  $\frac{2}{3}$ , фокальный радиус точки  $M$  эллипса равен 10.

Вычислить расстояние от точки  $M$  до одной из директрис.

**Решение.** Воспользуемся формулой  $\frac{r}{d} = e$ , где  $r$  – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-либо фокуса,  $d$  – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы,  $e$  – эксцентриситет.

Из этой формулы  $d = \frac{r}{e}$ . В условиях примера  $r = 10$ ,  $e = \frac{2}{3}$ . Подставляем:  $d = \frac{10}{\frac{2}{3}} = 15$ .

**Пример 8.** Точка  $M(-4; 2,4)$  лежит на эллипсе  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Найти фокальные радиусы точки  $M$ .

**Решение.** Используем формулы фокальных радиусов точки эллипса:  $r_1 = a + ex$ ,  $r_2 = a - ex$ , где  $a$  – большая полуось эллипса,  $e$  – эксцентриситет эллипса,  $x$  – абсцисса точки  $M$  эллипса. Из канонического уравнения эллипса записываем:  $a^2 = 25$ ,  $a = 5$ . Абсцисса точки  $M$  равна  $-4$ , то есть  $x = -4$ . Для нахождения  $e$  используем формулу  $e = \frac{c}{a}$ . Для нахождения  $c$  используем формулу  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Из канонического уравнения эллипса  $a^2 = 25$ ,  $b^2 = 16$ . Подставляем:  $c = \sqrt{25 - 16} = 3$ ,  $e = \frac{3}{5}$ .

Находим фокальные радиусы точки  $M$ :

$$r_1 = 5 + \frac{3}{5} \cdot (-4) = 5 - \frac{12}{5} = \frac{13}{5}, r_2 = 5 - \frac{3}{5} \cdot (-4) = 5 + \frac{12}{5} = \frac{37}{5}.$$

**Ответ:**  $r_1 = \frac{13}{5}$ ,  $r_2 = \frac{37}{5}$ .

### 3: Пример 9.

Найти уравнение геометрического места точек, для каждой из которых отношение

расстояния до точки  $A(\sqrt{5}; 0)$  к расстоянию до прямой  $d: \sqrt{5}x - 9 = 0$  постоянно и равно  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

Сделать чертеж. Привести уравнение линии к каноническому виду, найти фокусы, эксцентриситет, асимптоты и директрисы (если они существуют).

**Решение:** пусть точка  $M(x, y)$  принадлежит искомому множеству точек. В задаче говорится о расстоянии:

$$|AM| = \sqrt{(x - \sqrt{5})^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - \sqrt{5})^2 + y^2},$$

а также о **расстоянии от точки до прямой**, которое вычисляется по формуле

$$\rho(M; d) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$
 где  $A, B, C$  – соответствующие коэффициенты **общего уравнения**

**прямой** «дэ»,  $(x, y)$  – координаты точки «эм».

В данном случае:

$$\rho(M; d) = \frac{|\sqrt{5} \cdot x + 0 \cdot y - 9|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 + 0^2}} = \frac{|\sqrt{5}x - 9|}{\sqrt{5}}.$$

По условию для каждой точки  $M(x, y)$  **отношение** расстояния  $|AM|$  к расстоянию  $\rho(M; d)$

должно быть равно  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ . А что такое отношение? Отношение – это пропорция, или

попросту дробь:

$$\frac{|AM|}{\rho(M; d)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}}{\frac{|\sqrt{5}x-9|}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Уравнение составлено, избавимся от **трёхэтажной дроби**.

Для этого знаменатель левой части (дроби) перекинем направо:

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{|\sqrt{5}x-9|}{\sqrt{5}}$$

Сократим на  $\sqrt{5}$ :

$$\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2} = \frac{1}{3} \cdot |\sqrt{5}x-9|$$

$$3\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2} = |\sqrt{5}x-9|$$

Возводим обе части в квадрат и раскрываем скобки:

$$\left(3\sqrt{(x-\sqrt{5})^2+y^2}\right)^2 = |\sqrt{5}x-9|^2$$

$$9((x-\sqrt{5})^2+y^2) = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

$$9(x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 + y^2) = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

$$9x^2 - 18\sqrt{5}x + 45 + 9y^2 = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

Перенесём всё налево

$$9x^2 - 18\sqrt{5}x + 45 + 9y^2 = 5x^2 - 18\sqrt{5}x + 81$$

$$9x^2 - 18\sqrt{5}x + 45 + 9y^2 - 5x^2 + 18\sqrt{5}x - 81 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$$

Разделим обе части на 36:

$$\frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

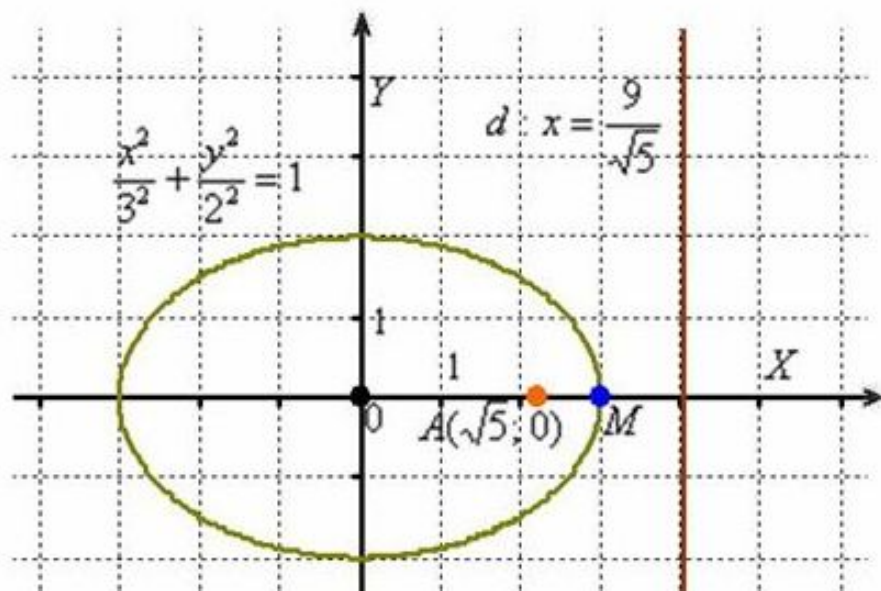
И выполним деление:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

В результате:

$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$  – **эллипс** с центром в начале координат, полуосями  $a = 3, b = 2$ .

Изобразим на чертеже найденный эллипс, точку  $A(\sqrt{5}; 0)$  и прямую  $d: x = \frac{9}{\sqrt{5}} \approx 4,02$ :





Вычислим  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$  и запишем **фокусы эллипса**:

$$F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$$

⇓

$$F_1(\sqrt{5}; 0), F_2(-\sqrt{5}; 0)$$

Первый фокус совпал с точкой  $A(\sqrt{5}; 0)$ .

Найдём эксцентриситет:  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . По ещё одному странному совпадению эксцентриситет

оказался равен отношению  $\frac{|AM|}{\rho(M; d)} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

Эллипс имеет две директрисы, и в каноническом положении  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  они задаются

уравнениями  $d_1: x - \frac{a}{\varepsilon} = 0$ ,  $d_2: x + \frac{a}{\varepsilon} = 0$ , где «эпсилон» – эксцентриситет данного эллипса.

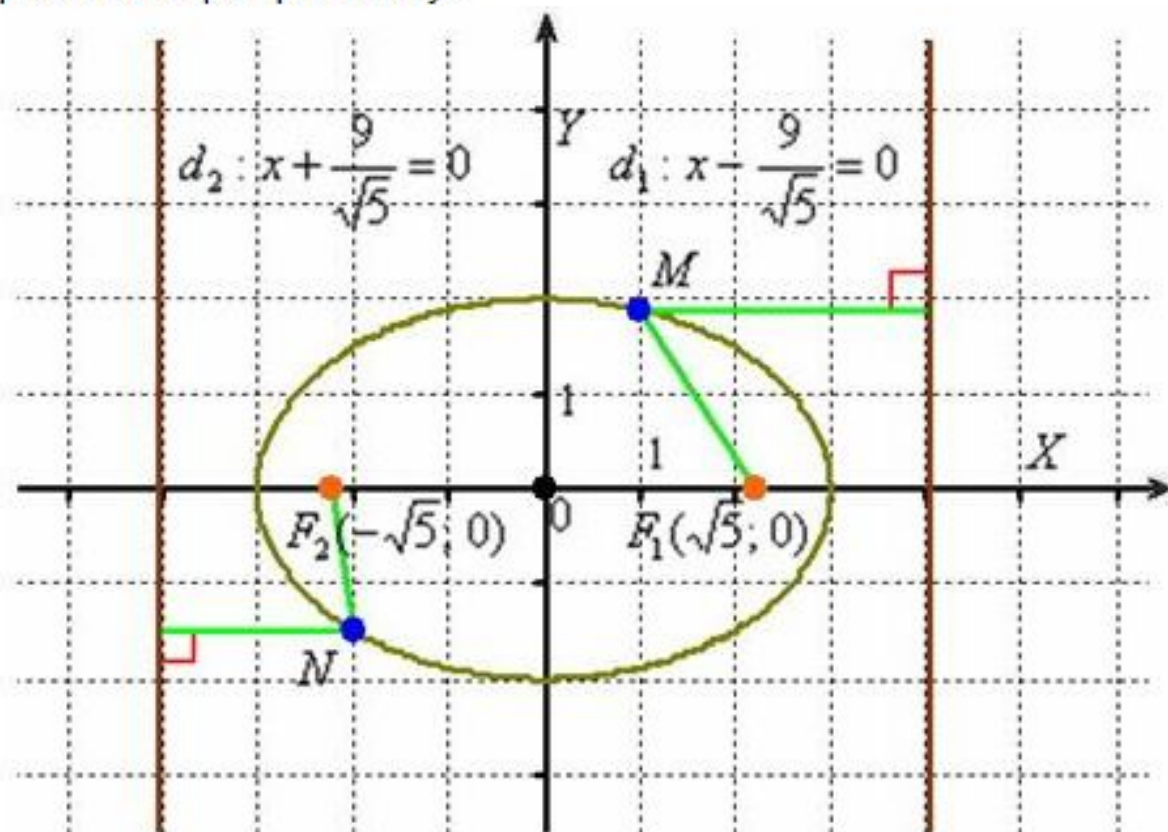
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1:$$

$$d_1: x - \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 0, \quad d_2: x + \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 0$$

$$d_1: x - \frac{9}{\sqrt{5}} = 0, \quad d_2: x + \frac{9}{\sqrt{5}} = 0$$

$$d_1: \sqrt{5}x - 9 = 0, \quad d_2: \sqrt{5}x + 9 = 0$$

**Эллипс** – есть множество всех точек плоскости, таких, что **отношение** расстояния до каждой точки от фокуса к расстоянию от неё до соответствующей (ближайшей) директрисы равно эксцентриситету:



**Ответ:** искомое геометрическое место точек представляет собой эллипс  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$  с

фокусами  $F_1(\sqrt{5}; 0)$ ,  $F_2(-\sqrt{5}; 0)$  и эксцентриситетом  $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$ . Уравнения директрис:

$$d_1: \sqrt{5}x - 9 = 0, \quad d_2: \sqrt{5}x + 9 = 0.$$

**Пример 10.** Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось  $b = 3$ .

Решение.

По условию  $2c = 8$ , т.е.  $c = 4$ ,  $b = 3$ .

Мы знаем, что  $b^2 = a^2 - c^2$ , откуда  $a^2 = b^2 + c^2$ , т.е.  $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$  или  $a = 5$ .

Уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

**Пример 11.** Определить тип кривой, заданной уравнением,  $3x^2 + y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$  и построить ее.

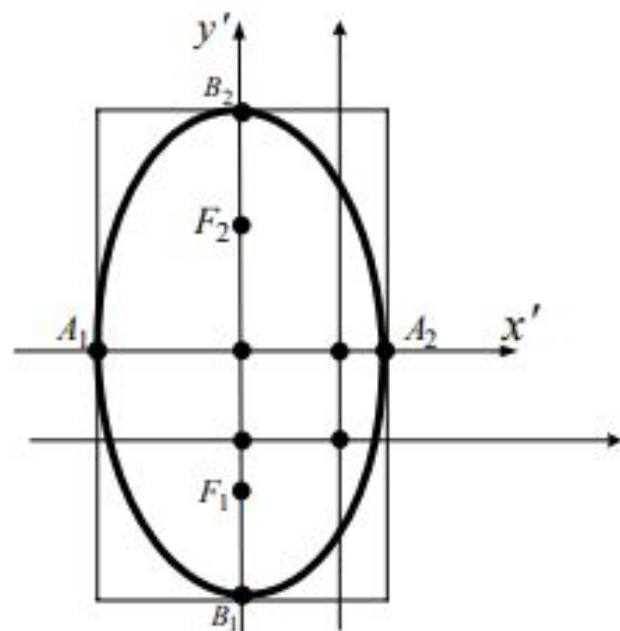
**Решение.** Чтобы привести уравнение заданной кривой к каноническому виду, выделим в нем полные квадраты по переменным  $x$  и  $y$ .

$$\begin{aligned}3(x^2 + 2x) + (y^2 - 2y) &= 5, \\3(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) &= 5 + 4, \\3(x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= 9, \\ \frac{(x + 1)^2}{3} + \frac{(y - 1)^2}{9} &= 1.\end{aligned}$$

Полученное уравнение – уравнение эллипса с центром симметрии в точке  $O'(-1; 1)$  (см. формулу (1.2.1)) и полуосями  $a = \sqrt{3}$  и  $b = 3$ . Сделаем замену

$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 1 \end{cases}$  получим уравнение эллипса относительно переменных  $x'$  и  $y'$  (в системе координат  $x'Oy'$ ):

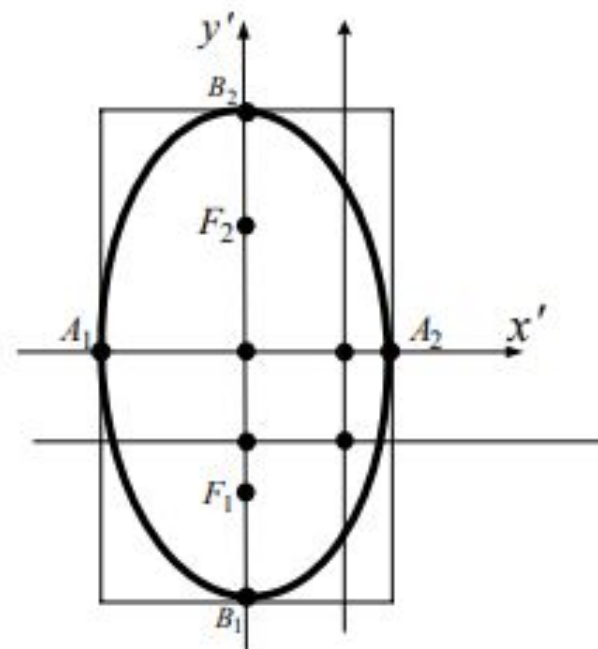
$$\frac{(x')^2}{3} + \frac{(y')^2}{9} = 1.$$



Вершины эллипса – точки  $A_1(-\sqrt{3}; 0)$ ,  $A_2(\sqrt{3}; 0)$ ,  $B_1(0; -3)$  и  $B_2(0; 3)$ , координаты которых указаны в системе  $x'Oy'$ . В системе координат  $xOy$ :  $A_1(-\sqrt{3}-1; 1)$ ,  $A_2(\sqrt{3}-1; 1)$ ,  $B_1(-1; -2)$  и  $B_2(-1; 2)$ .

Поскольку  $b > a$ , то эллипс вытянут вдоль оси  $Oy'$  и его фокусы находятся на этой оси. Чтобы найти координаты фокусов. Вычислим параметр  $c$  (см. 1.1.2) из формулы  $c^2 = b^2 - a^2$  ( $b > a$ ). Поскольку  $b^2 = 9$  и  $a^2 = 3$ , то  $c = \sqrt{6}$ . Значит координаты фокусов  $F_1$  и  $F_2$  в системе координат  $x'Oy'$ :  $F_1(0, -\sqrt{6})$  и  $F_2(0, \sqrt{6})$ , а в системе координат  $xOy$ :  $F_1(-1, 1 - \sqrt{6})$  и  $F_2(-1, 1 + \sqrt{6})$  (см. рис. 8). Эксцентриситет эллипса по формуле (1.1.4) равен:  $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{6}}{3}$  ( $b > a$ ).

Для построения кривой введем систему координат  $xOy$  и отметим в ней центр симметрии эллипса – точку  $O'(-1; 1)$  и проведем через нее новые оси координат  $Ox'$  и  $Oy'$ . На новых осях  $Ox'$  и  $Oy'$  отложим полуоси  $a = \sqrt{3}$  и  $b = 3$  соответственно, отметим вершины эллипса  $A_1(-\sqrt{3}; 0)$ ,  $A_2(\sqrt{3}; 0)$ ,  $B_1(0; -3)$  и  $B_2(0; 3)$ , а затем построим прямоугольник, проводя через вершины эллипса прямые, параллельные  $Ox'$  и  $Oy'$ . Через вершины проведем симметричную кривую так, чтобы в этих точках она касалась сторон прямоугольника. Отметим фокусы эллипса.



**Пример 12.** Построить кривую  $4x^2 + 25y^2 = 100$ . Найти расстояние между ее фокусами, эксцентриситет и фокальные радиусы от точки  $M(3;1,6)$ .

*Решение:*

Обе части уравнения кривой  $4x^2 + 25y^2 = 100$  делим на 100, получим

$$\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1, \text{ где } a = 5, b = 2.$$

$$\text{Тогда так как } a > b, \text{ то } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$$\text{Эксцентриситет эллипса } \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Фокальные радиусы – есть расстояние от точки  $M(3;1,6)$  до фокусов точки  $F_1(-c;0)$  и  $F_2(c;0)$ . Фокусы расположены в точках  $F_1(-\sqrt{21};0), F_2(\sqrt{21};0)$ .

$$\text{Фокальные радиусы равны: } r_1 = a - \varepsilon x = 5 - \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot 3; r_2 = a + \varepsilon x = 5 + \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot 3$$

# Гипербола

## Определение гиперболы

*Гиперболой* называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек  $F_1$  и  $F_2$ , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная  $2a$ . Требуется, чтобы эта постоянная была меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля. Указанная разность берётся по абсолютной величине.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Величины  $a$  и  $b$  называются полуосями гиперболы. Если полуоси гиперболы равны, то есть  $a = b$ , то такая гипербола называется *равносторонней*.

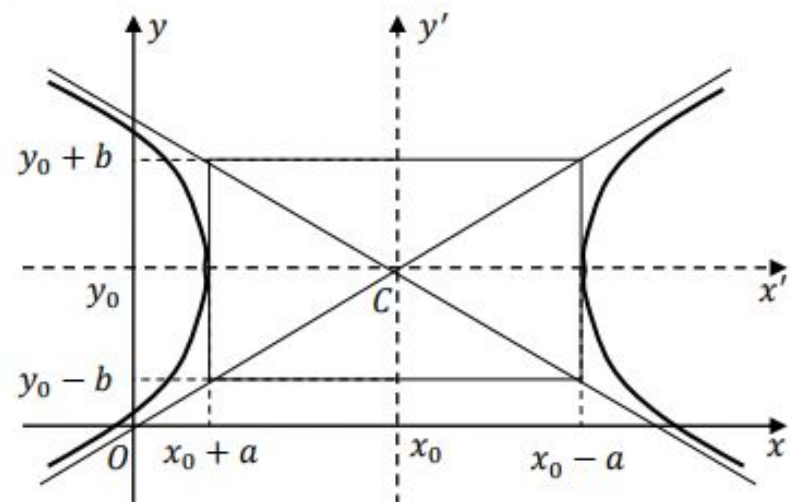
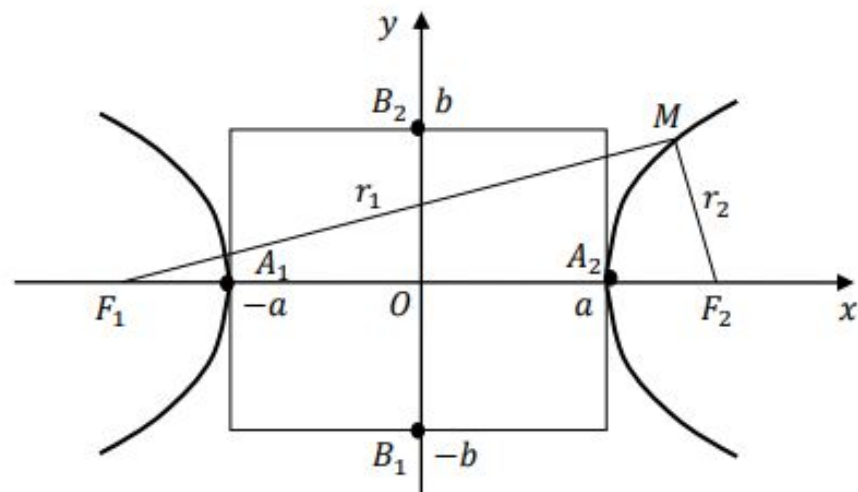
Каноническое уравнение равносторонней гиперболы принимает

$$\text{вид: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad x^2 - y^2 = a^2.$$

Уравнение гиперболы, записанное в виде

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

называют *нормальным уравнением гиперболы*. Оно представляет гиперболу со смещённым центром и осями, параллельными координатным осям.



## Эксцентриситет гиперболы

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к расстоянию между её вершинами. Эксцентриситет гиперболы, как и для эллипса, принято обозначать буквой  $e$ . Можно записать:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Таким образом, формула для нахождения эксцентриситета гиперболы такая же как и для эллипса:

$$e = \frac{c}{a}.$$

При выводе канонического уравнения гиперболы было показано, что  $c > a$ , поэтому  $e > 1$ .

### Фокальные радиусы гиперболы

*формулы для нахождения фокальных радиусов точек правой ветви гиперболы:*

$$r_1 = ex + a, r_2 = ex - a.$$

*Формулы для нахождения фокальных радиусов точек левой ветви гиперболы:*

$$r_1 = -(ex + a), r_2 = -(ex - a).$$

### . Директрисы гиперболы

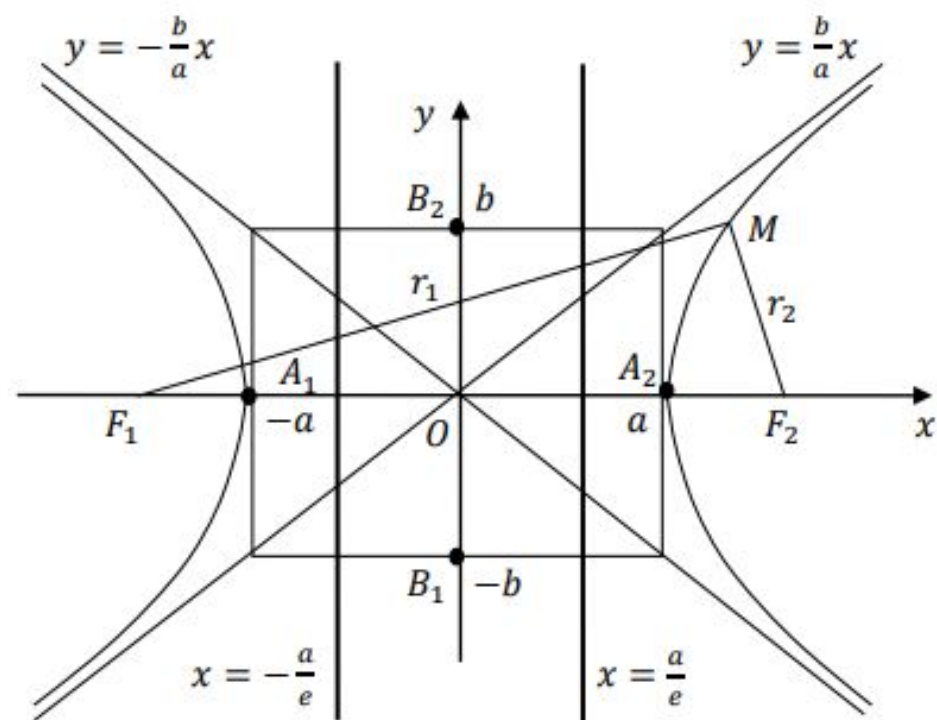
Уравнения директрис имеют вид:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$

## . Директрисы гиперболы

Уравнения директрис имеют вид:

$$x = \pm \frac{a}{e}.$$





**Пример 1.** Составить каноническое или нормальное уравнение гиперболы с центром в точке  $C$ , полуосями  $a$  и  $b$ , если фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс или на прямой, параллельной этой оси, симметрично относительно точки  $C$ :

1)  $C(0; 0)$ ,  $a = 7$ ,  $b = 4$ ;

**Решение.**

1) Воспользуемся каноническим уравнением гиперболы с полуосями  $a$  и  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . В условиях примера  $a = 7$ ,  $b = 4$ . Подставляем эти значения в каноническое уравнение гиперболы. Получаем:  $\frac{x^2}{7^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ . Преобразуем:

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2)

10)  $C\left(\frac{5}{4}; 0\right)$ ,  $a = \frac{9}{4}$ ,  $b = \frac{7}{4}$ .

2) Воспользуемся нормальным уравнением гиперболы с центром в точке  $C(x_0; y_0)$  полуосями  $a$  и  $b$ :  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ . В условиях примера  $x_0 = \frac{5}{4}$ ,  $y_0 = 0$ ,  $a = \frac{9}{4}$ ,  $b = \frac{7}{4}$ . Подставляем эти значения в нормальное

уравнение гиперболы. Получаем:  $\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} - \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} = 1$ . Преобразуем:  $\frac{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}{\frac{81}{16}} - \frac{y^2}{\frac{49}{16}} = 1$ .

**Пример 2.** Определить координаты центра и полуоси гиперболы по её каноническому или нормальному уравнению:

**Решение.** 1)  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1;$

Сравним данное уравнение с каноническим уравнением гиперболы с полуосями  $a$  и  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Преобразуем данное уравнение:  $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{9^2} = 1.$

Центр гиперболы находится в точке  $C(0; 0)$ , полуоси  $a = 12, b = 9.$

$$\frac{x^2}{5} - y^2 = 1;$$

3)  $\frac{(x-4)^2}{100} - \frac{(y-2)^2}{49} = 1;$

2) Сравним данное уравнение с нормальным уравнением гиперболы с центром в точке  $C(x_0; y_0)$  полуосями  $a$  и  $b$ :

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$  Преобразуем данное уравнение:  $\frac{(x-4)^2}{10^2} - \frac{(y-2)^2}{7^2} = 1.$

Центр гиперболы находится в точке  $C(4; 2)$ , полуоси  $a = 10, b = 7.$

**Пример. 3.** Построить гиперболу по её каноническому или нормальному уравнению:

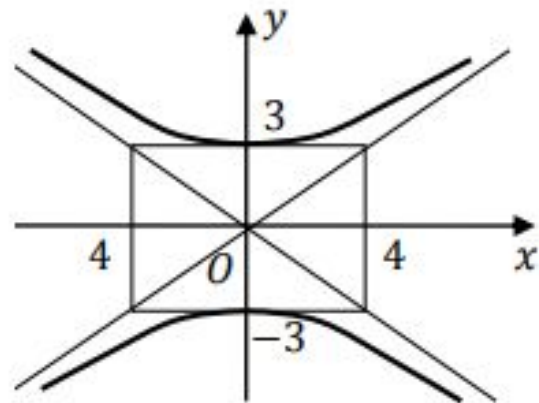
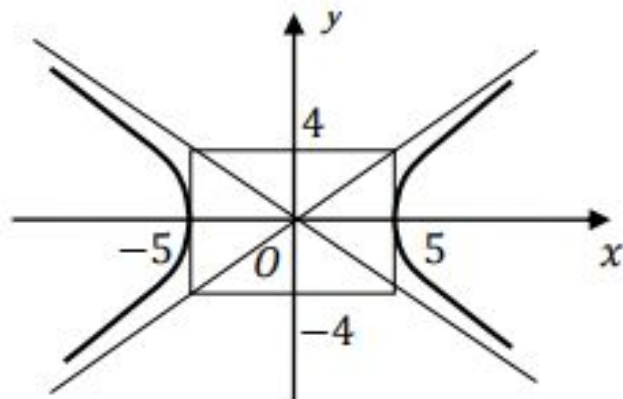
$$1) \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1;$$

**Решение.**

1)  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Преобразуем уравнение:  $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ . Центр гиперболы находится в точке  $C(0; 0)$ , полуоси  $a = 5, b = 4$

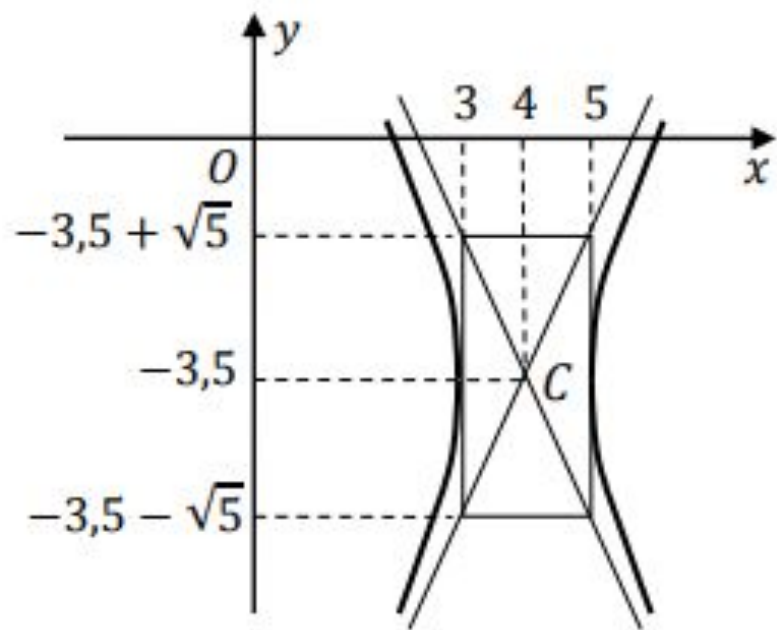
$$2) \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1;$$

Преобразуем уравнение:  $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ . Центр гиперболы находится в точке  $C(0; 0)$ , полуоси  $a = 4, b = 3$



3)  $(x - 4)^2 - \frac{(y + \frac{7}{2})^2}{5} = 1$ . Преобразуем уравнение:  $\frac{(x-4)^2}{1^2} - \frac{(y - (-\frac{7}{2}))^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$ .

Центр гиперболы находится в точке  $C(4; -\frac{7}{2})$ , полуоси  $a = 1$ ,  $b = \sqrt{5}$



**Пример.4.** Среди приведённых уравнений указать уравнения гиперболы, найти полуоси каждой из них:

1)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1;$

2)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1;$

3)  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{24} = -1;$

4)  $4x^2 - 9y^2 = 25;$

5)  $x^2 + y^2 = 1;$

6)  $x^2 - \frac{y^2}{5} = 1;$

7)  $4x^2 - 7y^2 = 1;$

8)  $x^2 = 3y - 6;$

9)  $3x - 2y + 4 = 0;$

10)  $y - 5 = 0.$

**Пример. .5.** Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

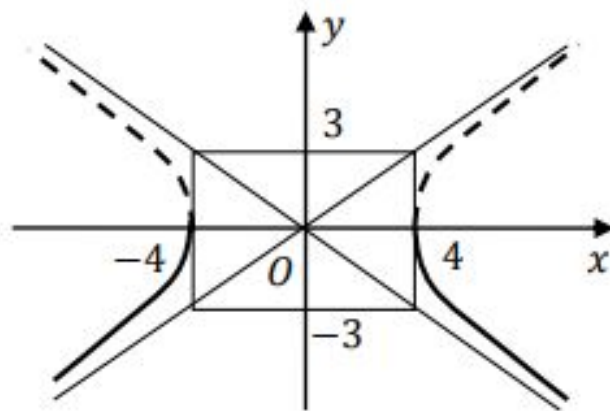
**Решение.**

1)  $y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y \leq 0, \\ x^2 - 16 \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:

$\begin{cases} y \leq 0, \\ x \in (-\infty; -4] \cup [4; \infty). \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $y^2 =$

$= \frac{9}{16}(x^2 - 16)$ . Преобразуем:  $y^2 = \frac{9}{16}x^2 - 9$ ,  $\frac{9}{16}x^2 - y^2 = 9$ ,  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке  $C(0; 0)$  и полуосями  $a = 4$ ,  $b = 3$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенной в нижней полуплоскости

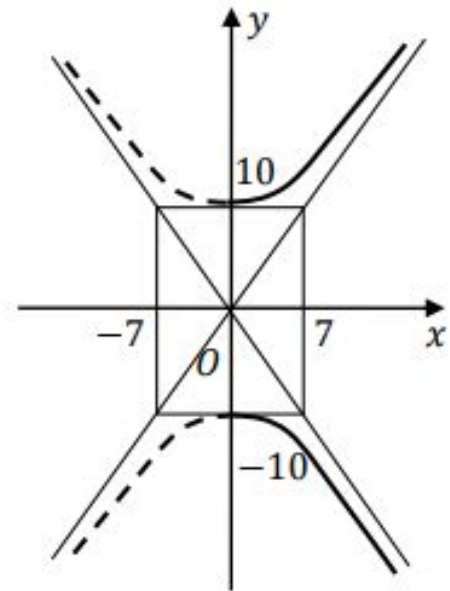


2)  $x = \frac{7}{10}\sqrt{y^2 - 100}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y^2 - 100 \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:

$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \in (-\infty; -10] \cup [10; \infty). \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $x^2 = \frac{49}{100}(y^2 - 100)$ .

Преобразуем:  $x^2 = \frac{49}{100}y^2 - 49$ ,  $x^2 - \frac{49}{100}y^2 = -49$ ,  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{100} = -1$ .

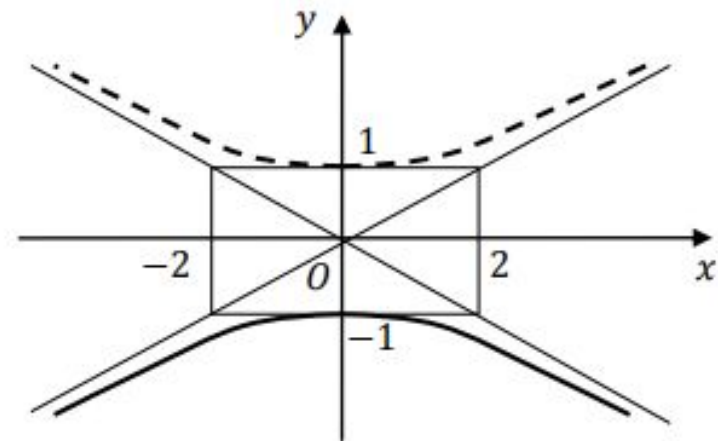
Полученное уравнение определяет гиперболу с центром в точке  $C(0; 0)$  и полуосями  $a = 7$ ,  $b = 10$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенной в правой полуплоскости



3)  $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y \leq 0, \\ x^2 + 4 \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:

$\begin{cases} y \leq 0, \\ x \in (-\infty; \infty). \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 4)$ .

Преобразуем:  $y^2 = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ,  $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = -1$ ,  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = -1$ . Полученное уравнение определяет гиперболу с полуосями  $a = 2$ ,  $b = 1$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть гиперболы, расположенной в нижней полуплоскости



**Пример. 6.** Дана гипербола  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$ . Найти: 1) полуоси; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения директрис; 5) уравнения асимптот.

**Решение.** Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , заключаем, что данное уравнение каноническое.

1) Исходя из канонического уравнения гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  запишем квадраты полуосей гиперболы:  $a^2 = 81$ ,  $a = 9$  и  $b^2 = 36$ ,  $b = 6$ .

2) Фокусы гиперболы представляют точки  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ . При выводе канонического уравнения гиперболы была получена формула  $a^2 + b^2 = c^2$ . Отсюда  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Подставляем значения квадратов полуосей:  $c = \sqrt{81 + 36} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ . И тогда фокусы гиперболы:  $F_1(-3\sqrt{13}; 0)$ ,  $F_2(3\sqrt{13}; 0)$ .

3) Эксцентриситет гиперболы находят по формуле:  $e = \frac{c}{a}$ . Подставляем числовые значения:  $e = \frac{3\sqrt{13}}{9} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ .

4) Уравнения директрис имеют вид:  $x = \pm \frac{a}{e}$ . Подставляем числовые значения:  $x = \pm \frac{9}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \pm \frac{27}{\sqrt{13}} = \pm \frac{27\sqrt{13}}{13}$ .



5) Уравнения асимптот имеют вид:  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Подставляем числовые значения:  $y = \pm \frac{6}{9}x = \pm \frac{2}{3}x$ .

**Ответ:** 1)  $a = 9, b = 6$ ; 2)  $F_1(-3\sqrt{13}; 0), F_2(3\sqrt{13}; 0)$ ; 3)  $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$ ;

4)  $x = \pm \frac{27\sqrt{13}}{13}$ ; 5)  $y = \pm \frac{2}{3}x$ .

**Пример 7.** Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что:

1) полуоси равны 7 и 5;

2) расстояние между фокусами равно 12 и малая полуось равна 4;

3) расстояние между фокусами равно  $2\sqrt{13}$  и эксцентриситет равен  $\frac{\sqrt{13}}{3}$ ;

4) большая полуось равна 9 и эксцентриситет равен  $\frac{\sqrt{131}}{9}$ ;

5) малая полуось равна 1 и расстояние между директрисами равно 3.

6) уравнения асимптот  $y = \pm \frac{7}{12}x$  и расстояние между фокусами равно  $2\sqrt{193}$ .

**Решение.**

1) Подставим значение полуосей в каноническое уравнение гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Получаем:  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

2) Так как расстояние между фокусами равно 12, то есть  $2c = 12$ , то  $c = 6$ . Далее используем формулу, связывающую  $a$ ,  $b$  и  $c$ :  $a^2 + b^2 = c^2$ . Выразим  $a$ :  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ . Подставляем числовые значения:  $a = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ . Составляем каноническое уравнение гиперболы:  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ .

3) Так как расстояние между фокусами равно  $2\sqrt{13}$ , то есть  $2c = 2\sqrt{13}$ , то  $c = \sqrt{13}$ . Воспользуемся формулой эксцентриситета  $e = \frac{c}{a}$ . Выразим отсюда  $a$ :  $a = \frac{c}{e}$ . Подставляем  $c = \sqrt{13}$ ,  $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$ . Получаем:  $a = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = 3$ . Воспользуемся формулой, связывающей  $a$ ,  $b$  и  $c$ :  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Выразим  $b$ :  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2$ . Составляем каноническое уравнение гиперболы:  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

4) Воспользуемся формулой эксцентриситета  $e = \frac{c}{a}$ . Выразим отсюда  $c$ :  $c = ae$ . По условию  $a = 9$ ,  $e = \frac{\sqrt{131}}{9}$ . Подставляем:  $c = 9 \cdot \frac{\sqrt{131}}{9} = \sqrt{131}$ . Воспользуемся формулой, связывающей  $a$ ,  $b$  и  $c$ :  $a^2 + b^2 = c^2$ . Выразим  $b$ :  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(\sqrt{131})^2 - 9^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ . Составляем каноническое уравнение гиперболы:  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{50} = 1$ .

5) Так как директрисы задаются уравнениями  $x = \pm \frac{a}{e}$ , то расстояние между директрисами равно  $\frac{2a}{e}$ . Учитывая, что по условию расстояние между директрисами равно 3, получаем:  $3 = \frac{2a}{e}$ . Воспользуемся формулой эксцентриситета  $e = \frac{c}{a}$ . Получаем:  $3 = \frac{2a}{\frac{c}{a}} = \frac{2a^2}{c}$ . Далее воспользуемся формулой  $a^2 = c^2 - b^2$ . Получаем:  $3 = \frac{2(c^2 - b^2)}{c}$ . По условию  $b = 1$ . Подставляем:  $3 = \frac{2(c^2 - 1)}{c}$ . Решим полученное уравнение. Преобразуем:  $3c = 2c^2 - 2$ ,  $2c^2 - 3c - 2 = 0$ ,  $c = 2$  и  $c = -\frac{1}{2}$ . Учитывая, что  $c$  – расстояние от начала координат до фокуса, берём положительное значение  $c = 2$ . Далее находим  $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ . Составляем каноническое уравнение гиперболы:  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ .

6) Асимптоты гиперболы задаются уравнениями  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Учитывая, что по условию уравнения асимптот имеют вид  $y = \pm \frac{7}{12}x$ , получаем  $\frac{b}{a} = \frac{7}{12}$  и  $a = \frac{12}{7}b$ . Так как по условию расстояние между фокусами равно  $2\sqrt{193}$  то есть  $2c = 2\sqrt{193}$ , то  $c = \sqrt{193}$ . Далее воспользуемся формулой,  $a^2 + b^2 = c^2$ . Подставляем  $a = \frac{12}{7}b$ ,  $c = \sqrt{193}$ . Получаем:  $(\frac{12}{7}b)^2 + b^2 = (\sqrt{193})^2$ .

Преобразуем:  $\frac{144}{49}b^2 + b^2 = 193$ ,  $\frac{193b^2}{49} = 193$ ,

$b^2 = 49$ ,  $b = 7$ . Тогда  $a = \frac{12}{7} \cdot 7 = 12$ . Составляем каноническое уравнение гиперболы:  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{49} = 1$ .

Ответ: 1)  $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ ; 3)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{50} = 1$ ; 5)  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1$ ; 6)  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{49} = 1$ .

**Пример. 8.** Эксцентриситет гиперболы равен 2, фокальный радиус её точки  $M$ , проведённый из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить расстояние от точки  $M$  до односторонней с этим фокусом директрисы.

**Решение.** Воспользуемся формулой  $\frac{r}{d} = e$ , где  $r$  – расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-либо фокуса,  $d$  – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы,  $e$  – эксцентриситет. Из этой формулы  $d = \frac{r}{e}$ . В условиях примера  $r = 16$ ,  $e = 2$ . Подставляем:  $d = \frac{16}{2} = 8$ .

**Ответ:** 8.

**Пример. 9.** Эксцентриситет гиперболы равен 2, центр её лежит в начале координат, один из фокусов  $F(12; 0)$ . Вычислить расстояние от точки  $M$  гиперболы с абсциссой, равной 13, до директрисы, соответствующей заданному фокусу.

**Решение.** Так как фокус гиперболы  $F(12; 0)$ , то  $c = 12$ . Далее воспользуемся формулой эксцентриситета  $e = \frac{c}{a}$ . Выразим  $a$ :  $a = \frac{c}{e}$ . По условию  $e = 2$ ,  $c = 12$ . Подставляем:  $a = \frac{12}{2} = 6$ .

Фокус  $F(12; 0)$  является правым фокусом гиперболы. Так как абсцисса точки  $M$  равна 13, то расстояние от точки  $M$  до фокуса  $F$  является правым фокальным радиусом точки правой ветви гиперболы. Для его нахождения воспользуемся формулой:  $r = ex - a$ . Подставляем  $e = 2$ ,  $x = 13$ ,  $a = 6$ .

Получаем:  $r = 2 \cdot 13 - 6 = 20$ .

Для нахождения расстояния от точки  $M$  до директрисы, соответствующей заданному фокусу, применим формулу  $d = \frac{r}{e}$ . Подставляем:  $d = \frac{20}{2} = 10$ .

**Ответ:** 10.

### Пример 10.

Составить уравнение линии, для каждой точки которой разность расстояний до точек  $A(0; 10)$  и  $O(0; 0)$  по модулю равна 8. Привести уравнение к каноническому виду и выполнить чертёж. Найти асимптоты, фокусы, эксцентриситет и директрисы, если они существуют.

**Решение:** пусть точка  $M(x, y)$  принадлежит искомой линии. Тогда:

$$|AM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-10)^2} = \sqrt{x^2 + (y-10)^2}$$

$$|OM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

По условию:

$$||AM| - |OM|| = 8$$

Или:

$$\left| \sqrt{x^2 + (y-10)^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right| = 8$$

От модуля избавляемся немедленно:

$$\sqrt{x^2 + (y-10)^2} - \sqrt{x^2 + y^2} = \pm 8$$

$$\sqrt{x^2 + (y-10)^2} = \pm 8 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(\sqrt{x^2 + (y-10)^2})^2 = (\pm 8 + \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + (y-10)^2 = (\pm 8)^2 + 2 \cdot (\pm 8) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + (\sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 100 = 64 \pm 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$$

Возводим в квадрат обе части ещё раз.

$$(9 - 5y)^2 = (\pm 4 \cdot \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$81 - 90y + 25y^2 = 16(x^2 + y^2)$$

$$81 - 90y + 25y^2 = 16x^2 + 16y^2$$

$$0 = 16x^2 + 16y^2 - 25y^2 + 90y - 81$$

$$16x^2 - 9y^2 + 90y - 81 = 0$$

Получено **уравнение линии 2-го порядка в общем виде**. Выделяем полный квадрат

$$16x^2 - 9(y^2 - 10y) - 81 = 0$$

Далее внутри скобки искусственно добавляем +25 (в целях применения формулы

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$  на следующем шаге) и, чтобы уравнение не изменилось, за скобками

нужно прибавить  $9 \cdot 25$ :

$$16x^2 - 9(y^2 - 10y + 25) + 9 \cdot 25 - 81 = 0$$

$$16x^2 - 9(y - 5)^2 + 225 - 81 = 0$$

$$16x^2 - 9(y - 5)^2 + 144 = 0$$

$$16x^2 - 9(y - 5)^2 = -144$$

Изменим знаки у обеих частей:

$$-16x^2 + 9(y - 5)^2 = 144$$

Делим обе части на 144:

$$-\frac{16x^2}{144} + \frac{9(y - 5)^2}{144} = 1$$

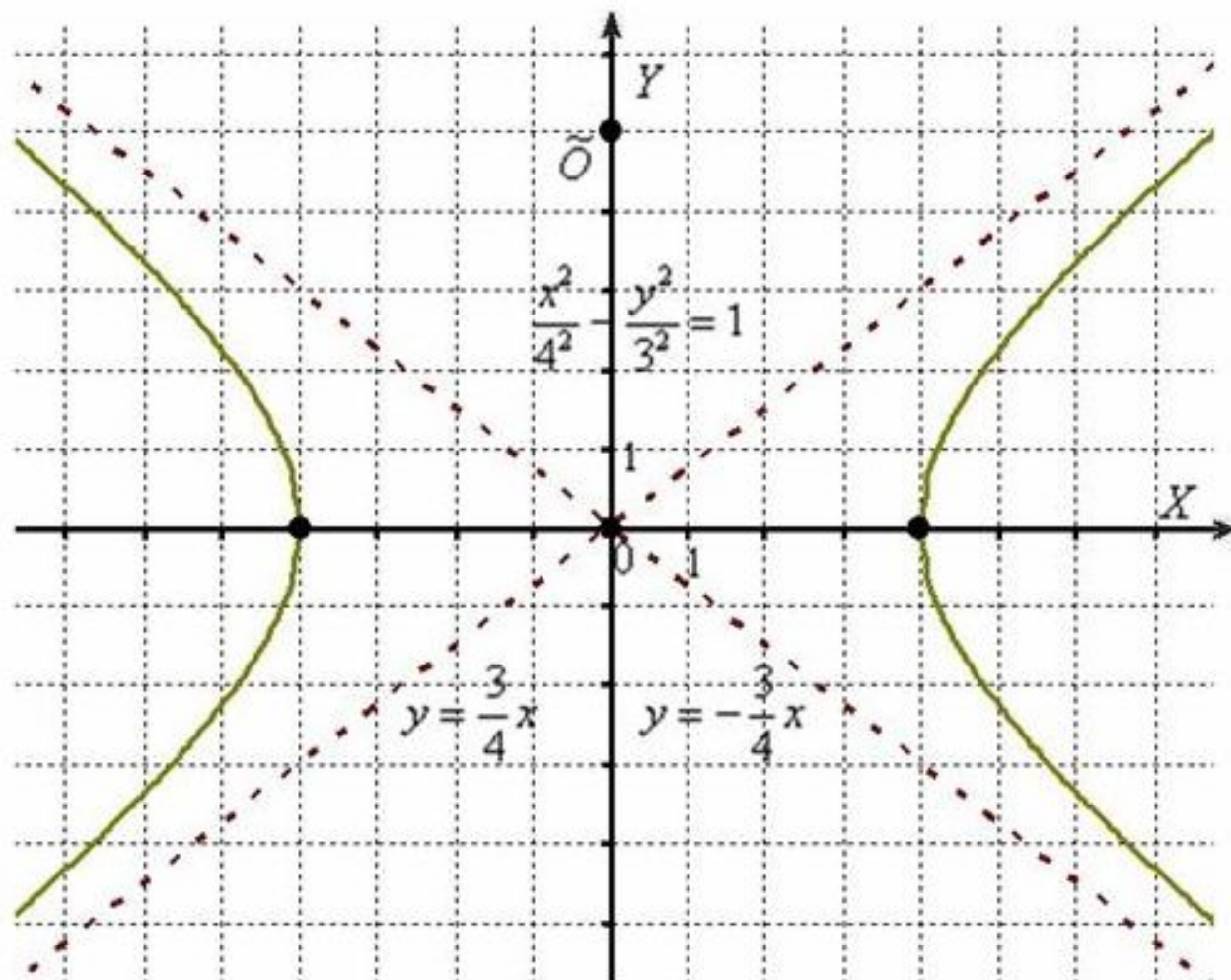
$$-\frac{x^2}{144} + \frac{(y-5)^2}{144} = 1$$

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

$$-\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-5)^2}{4^2} = 1 \quad \text{гипербола}$$

Вычислим эксцентриситет:  $\varepsilon = \frac{5}{4}$

Не забывая про асимптоты  $y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{4}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{4}x$ , выполним чертёж:





## Директрисы гиперболы

У гиперболы, точно так же, как у эллипса, **две** директрисы. В каноническом случае

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  они расположены между ветвями гиперболы и задаются такими же уравнениями

$d_1: x - \frac{a}{\varepsilon} = 0$ ,  $d_2: x + \frac{a}{\varepsilon} = 0$ , где «эпсилон» эксцентриситет данной гиперболы.

В рассматриваемом примере:

$$d_1: x - \frac{4}{\frac{4}{5}} = 0, \quad d_2: x + \frac{4}{\frac{4}{5}} = 0$$

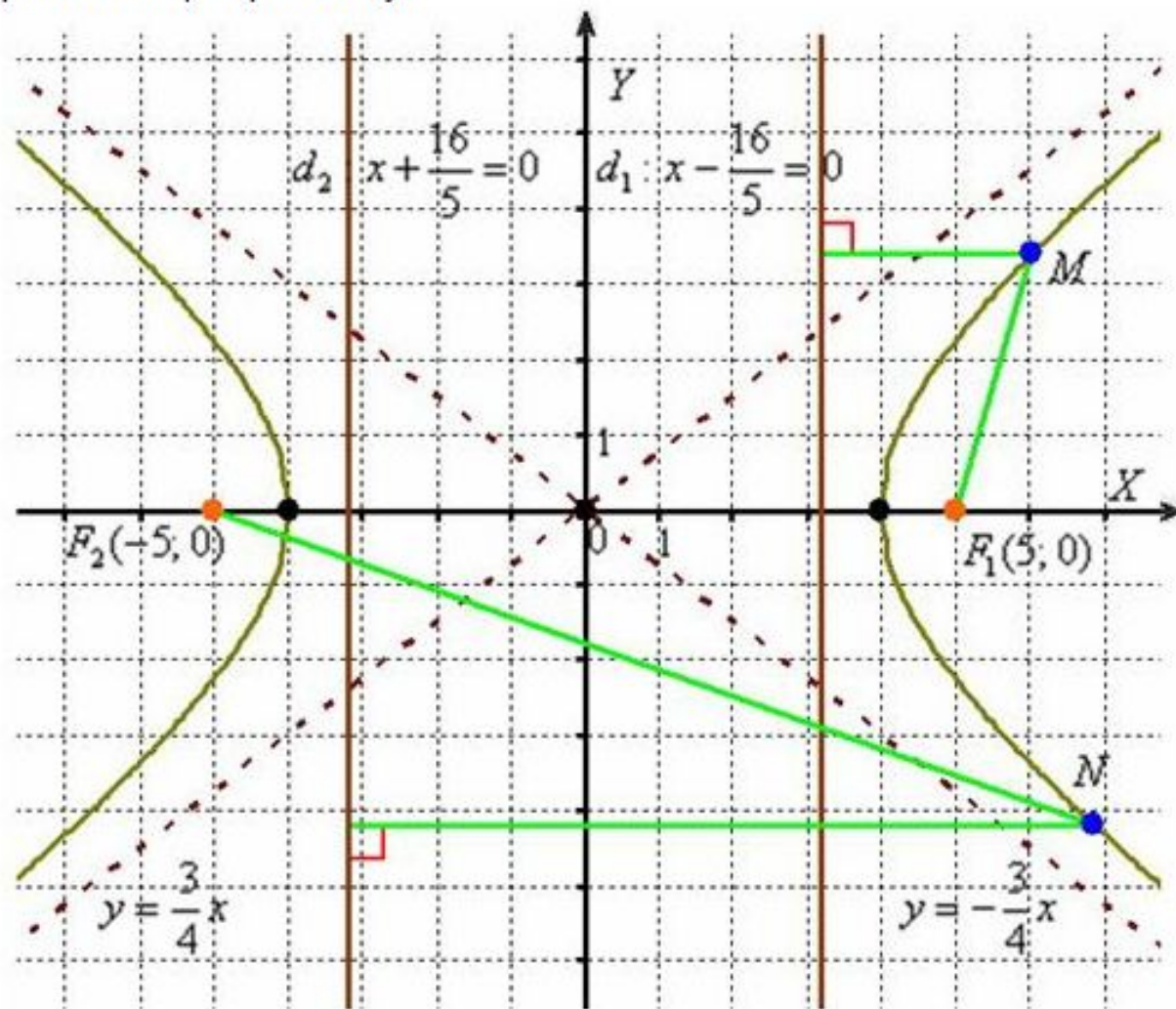
⇓

$$d_1: x - \frac{16}{5} = 0, \quad d_2: x + \frac{16}{5} = 0$$

⇓

$$d_1: 5x - 16 = 0, \quad d_2: 5x + 16 = 0$$

**Гипербола** – есть множество всех точек плоскости, таких, что **отношение** расстояния до каждой точки от фокуса к расстоянию от неё до соответствующей (ближайшей) директрисы равно эксцентриситету:



То есть, **для любой** точки  $M$  гиперболы отношение её расстояния от фокуса  $|F_1M|$  к расстоянию от неё же до ближайшей директрисы  $\rho(M; d_1)$  равно эксцентриситету:

$$\frac{|F_1M|}{\rho(M; d_1)} = \varepsilon = \frac{5}{4}.$$

**Пример 4.**

Фокусы гиперболы расположены на оси  $OY$ . Длина мнимой оси гиперболы равна 8, длина действительной оси равна 6. Написать каноническое уравнение гиперболы, найти ее эксцентриситет и асимптоты.

*Решение:*

Так как фокусы гиперболы расположены на оси  $OY$ , то гипербола с действительной полуосью  $b = 6$ , мнимой полуосью  $a = 8$ , и вершинами на оси  $OY$  имеет каноническое уравнение:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Эксцентриситет гиперболы:  $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Прямые, являющиеся асимптотами гиперболы имеют вид

$$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{8}{6} x = \pm \frac{4}{3} x.$$

**Пример 11.**

Написать уравнение гиперболы, проходящей через точки  $A(\sqrt{6}, 0)$  и  $B(-2\sqrt{2}; 1)$ .

*Решение.*

Так как гипербола проходит через точки  $A$  и  $B$ , то подставляем в формулу координаты каждой из этих точек. Формула гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} \frac{6}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1 \\ \frac{8}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ \frac{8}{6} + \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ b^2 = 3 \end{cases}$$

Тогда уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$$

**Пример 12.**

Фокусы гиперболы расположены на оси  $OY$ . Длина мнимой оси гиперболы равна 8, длина действительной оси равна 6. Написать каноническое уравнение гиперболы, найти ее эксцентриситет и асимптоты.

*Решение:*

Так как фокусы гиперболы расположены на оси  $OY$ , то гипербола с действительной полуосью  $b = 6$ , мнимой полуосью  $a = 8$ , и вершинами на оси  $OY$  имеет каноническое уравнение:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Эксцентриситет гиперболы:  $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Прямые, являющиеся асимптотами гиперболы имеют вид

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{8}{6}x = \pm \frac{4}{3}x.$$

**Пример 13.** Найти координаты фокусов и вершин гиперболы  $16x^2 - 9y^2 = 144$ . Написать уравнение её асимптот и вычислить эксцентриситет.

Решение.  
Напишем каноническое уравнение гиперболы, для этого обе части уравнения поделим на 144. После сокращения получим:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Отсюда видно, что  $a^2 = 9$ , т.е.  $a = 3$  и  $b^2 = 16$ , т.е.  $b = 4$ .

Для гиперболы  $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$ , откуда  $c = 5$ .

Теперь можем написать координаты вершин и фокусов гиперболы:

$$A_1(3, 0), A_2(-3, 0), F_1(5, 0), F_2(-5, 0).$$

Эксцентриситет  $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ , а уравнения асимптот имеют вид:

$$y = \frac{4}{3}x \text{ и } y = -\frac{4}{3}x.$$

То есть, **для любой** точки  $M$  гиперболы отношение её расстояния от фокуса  $|F_1M|$  к расстоянию от неё же до ближайшей директрисы  $\rho(M; d_1)$  равно эксцентриситету:

$$\frac{|F_1M|}{\rho(M; d_1)} = \varepsilon = \frac{5}{4}.$$

Для пары  $F_2, d_2$  и **любой** точки  $N$  гиперболы отношение такое же:  $\frac{|F_2M|}{\rho(N; d_2)} = \varepsilon = \frac{5}{4}$

**Ответ:** искомая линия представляет собой гиперболу  $-\frac{x^2}{3^2} + \frac{(y-5)^2}{4^2} = 1$  с центром симметрии в точке  $\tilde{O}(0; 5)$  и повернутую на 90 градусов относительно своего канонического положения. Канонический вид уравнения:  $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ , фокусы:  $F_1(5; 0), F_2(-5; 0)$ , эксцентриситет:  $\varepsilon = \frac{5}{4}$ , асимптоты:  $y = \frac{3}{4}x, y = -\frac{3}{4}x$ , директрисы:  $d_1: 5x - 16 = 0, d_2: 5x + 16 = 0$ .

**Пример 14.** Определить координаты фокусов, длину осей, эксцентриситет, уравнения директрис и асимптот гиперболы  $24x^2 - 25y^2 = 600$ .

*Решение.* Разделим обе части уравнения на 600, получим

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1.$$

Отсюда

$$a^2 = 25, \quad a = 5;$$

$$b^2 = 24, \quad b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 24 = 49, \quad c = 7.$$

Фокусы расположены в точках  $F_1(-7,0)$ ,  $F_2(7,0)$ .

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{7}{5} = 1,4 > 1.$$

Уравнения директрис

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{5}{7} = \pm \frac{25}{7} = \pm 3\frac{4}{7}.$$

Уравнения асимптот

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}x.$$



Пример 15. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку  $A(9, -4)$ , если ее действительная полуось  $a = 3$ .

*Решение.* Поскольку точка  $A$  принадлежит гиперболе, ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы (9):

$$\frac{9^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1.$$

Подставим  $a = 3$ , получим

$$\frac{81}{3^2} - \frac{16}{b^2} = 1.$$

Из уравнения находим  $b^2 = 2$ . Окончательно получим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

**Пример 16.** Асимптоты гиперболы имеют уравнения  $y = \pm \frac{3}{4}x$ , а расстояние между фокусами равно 20. Написать уравнение гиперболы.

*Решение.* Исходя из уравнения асимптот, имеем  $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ . Кроме того,  $F_1F_2 = 2c = 20$ , т.е.  $c = 10$ . Используя соотношение  $c^2 = a^2 + b^2$ , найдем значения  $a$  и  $b$ .

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения  $b^2$  через  $a^2$  и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} b^2 = \frac{9a^2}{16}, \\ \frac{9a^2}{16} + b^2 = 100. \end{cases}$$

Из системы находим  $a = 8$ ,  $b = 6$ .

Уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

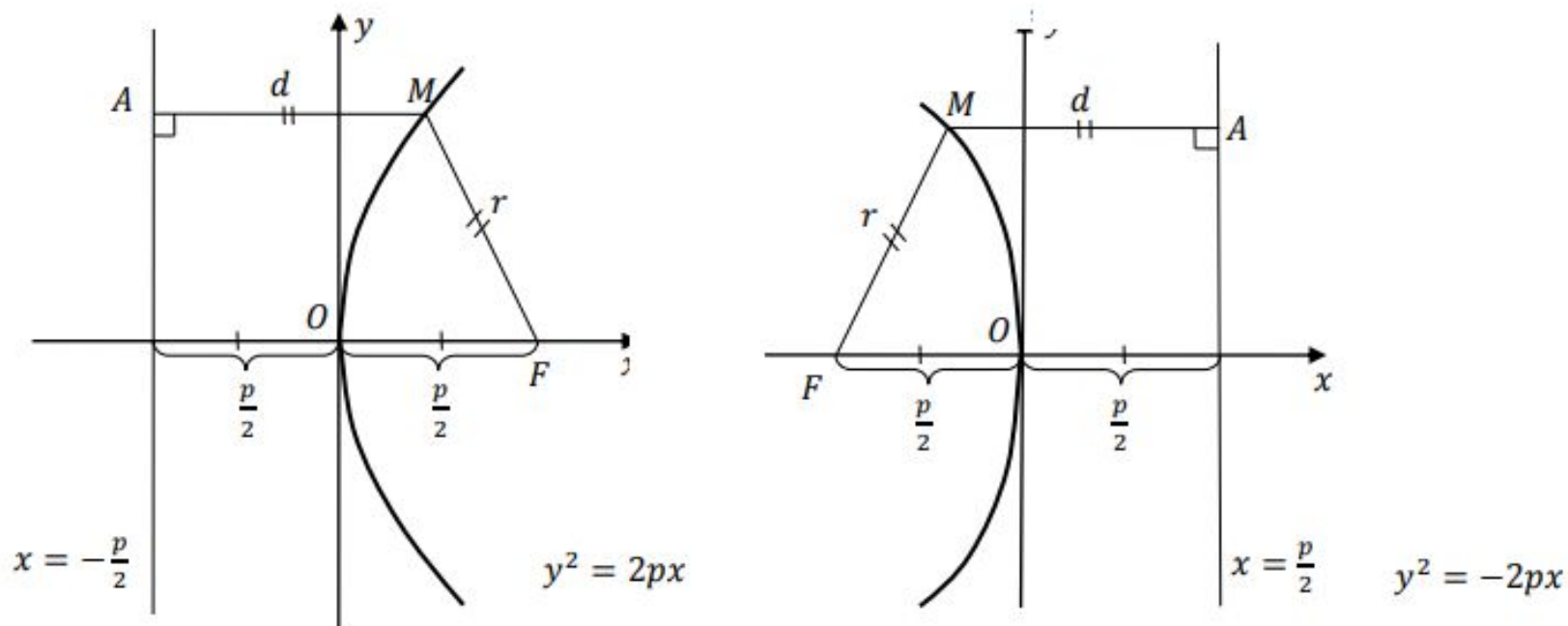
# Парабола

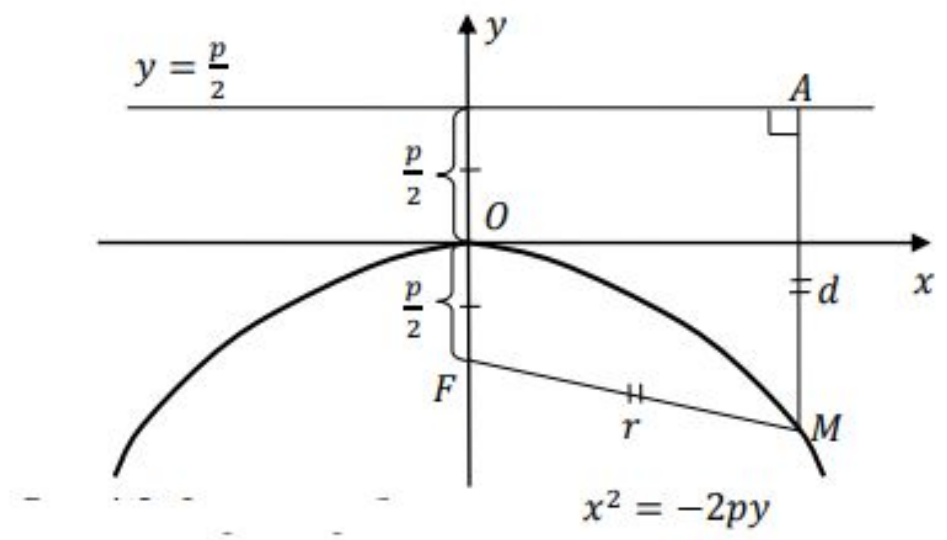
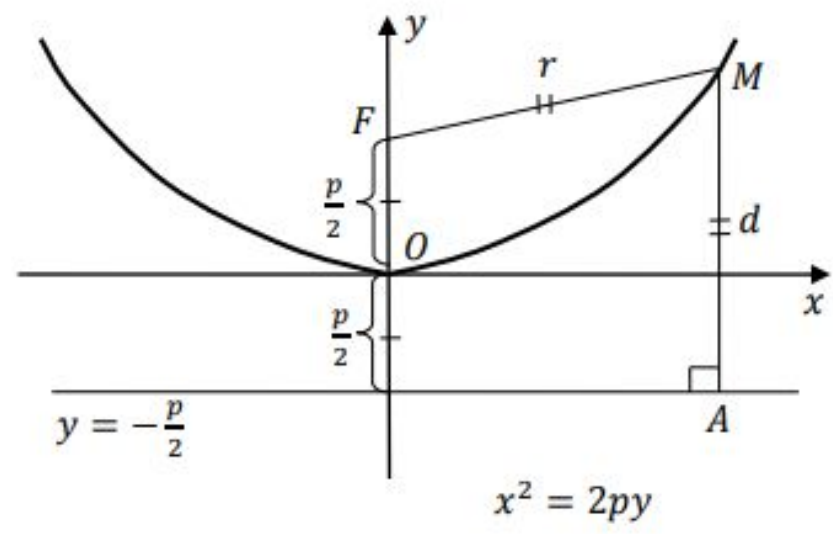
## Определение параболы

*Параболой* называется множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки  $F$ , называемой фокусом, равно расстоянию от этой же точки до фиксированной прямой, называемой директрисой. Расстояние между фокусом и директрисой называется *параметром* параболы и обозначается через  $p$ .

**Каноническое уравнение параболы**  $y^2 = 2px$   $y^2 = -2px$   $x^2 = 2py$   $x^2 = -2py$

## Форма параболы





Уравнение параболы, записанное в виде

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2,$$

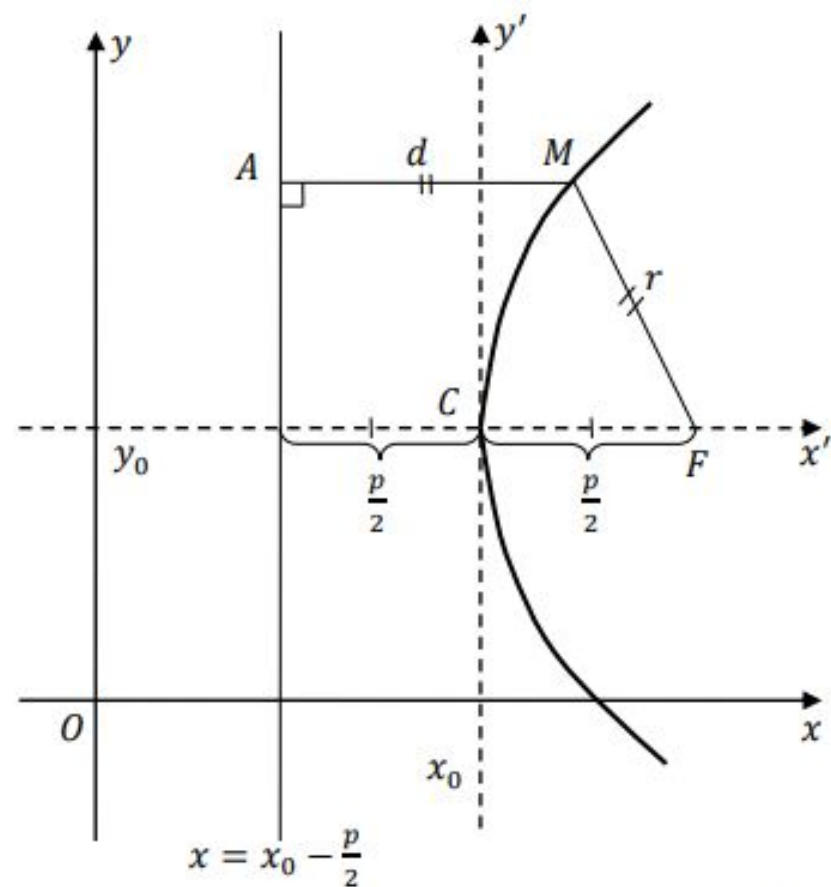
называют *нормальным уравнением параболы*. Оно представляет параболу с вершиной в точке  $C(x_0; y_0)$ , осью симметрии, параллельной оси абсцисс и ветвями, направленными вправо.

Аналогично можно записать остальные нормальные уравнения параболы:

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)^2$  – парабола с вершиной в точке  $C(x_0; y_0)$ , осью симметрии, параллельной оси абсцисс и ветвями, направленными влево;

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)^2$  – парабола с вершиной в точке  $C(x_0; y_0)$ , осью симметрии, параллельной оси ординат и ветвями, направленными вверх;

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)^2$  – парабола с вершиной в точке  $C(x_0; y_0)$ , осью симметрии, параллельной оси ординат и ветвями, направленными вниз.



Форма параболы, заданной уравнением  $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

**Эксцентриситет параболы** равен 1:  $e = 1$ .

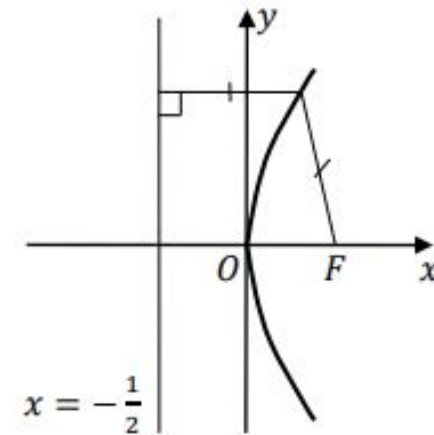
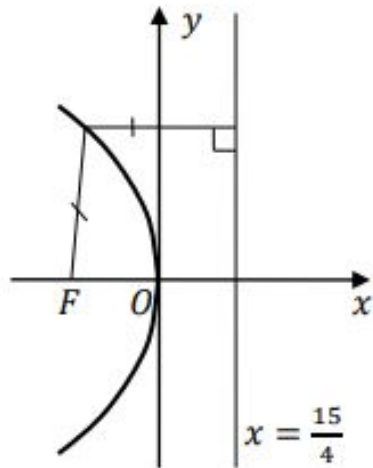
Так как для параболы отношение расстояния от произвольной точки до фокуса равно расстоянию от этой же точки до директрисы, то *эксцентриситет параболы равен 1:  $e = 1$* .

**Пример.** 1. Построить параболу по её каноническому или нормальному уравнению:

**Решение.**

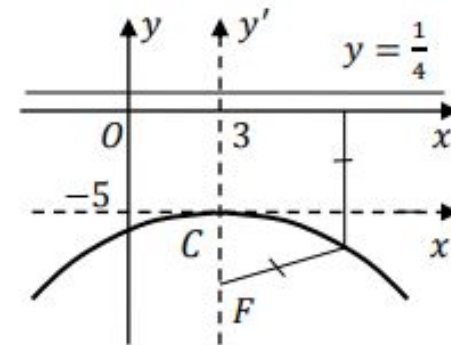
1)  $y^2 = 2x$ . Преобразуем уравнение:  $y^2 = 2 \cdot 1 \cdot x$ . Вершина находится в точке  $C(0; 0)$ , ветви направлены вправо, параметр  $p = 1$ , фокус  $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ , директриса  $x = -\frac{1}{2}$  (рис. 4.7).

2)  $y^2 = -15x$ . Преобразуем уравнение:  $y^2 = -2 \cdot \frac{15}{2} \cdot x$ . Вершина находится в точке  $C(0; 0)$ , ветви направлены влево, параметр  $p = \frac{15}{2}$ , фокус  $F\left(-\frac{15}{4}; 0\right)$ , директриса  $x = \frac{15}{4}$  (рис. 4.8).



3)  $(x - 3)^2 = -21(y + 5)$ . Преобразуем уравнение:  $(x - 3)^2 = -2 \cdot \frac{21}{2} \cdot (y + 5)$ .

Вершина параболы находится в точке  $C(3; -5)$ , ветви направлены вниз, параметр  $p = \frac{21}{2}$ , фокус  $F\left(3; -\frac{41}{4}\right)$ , директриса  $y = \frac{1}{4}$



**Пример 2.** Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

- 1) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси  $Ox$  и её параметр  $p = 3$ ;
- 2) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси  $Oy$  и её параметр  $p = 3$ ;
- 3) парабола расположена симметрично относительно оси  $Ox$  и проходит через точку  $A(9; 6)$ ;
- 4) парабола расположена симметрично относительно оси  $Oy$  и проходит через точку  $A(4; -8)$ ;
- 5) фокус параболы  $F(0; -3)$  и осью параболы служит ось  $Ov$ .

**Решение.**

- 1) Каноническое уравнение параболы имеет вид  $y^2 = 2px$ . Подставляем  $p = 3$ :  $y^2 = 6x$ .
- 2) Каноническое уравнение параболы имеет вид  $x^2 = -2py$ . Подставляем  $p = 3$ :  $x^2 = -6y$ .
- 3) Каноническое уравнение параболы имеет вид  $y^2 = 2px$ . Подставляем координаты точки  $A$ :  $6^2 = 2p \cdot 9$ .  
Отсюда параметр параболы  $p = 2$  и уравнение параболы  $y^2 = 4x$ .
- 4) Каноническое уравнение параболы имеет вид  $x^2 = -2pv$ . Подставляем координаты точки  $A$ :  $4^2 = -2p \cdot (-8)$ .  
Отсюда параметр параболы  $p = 1$  и уравнение параболы  $x^2 = -2y$ .
- 5) Каноническое уравнение параболы имеет вид  $x^2 = -2py$ . Расстояние от вершины параболы до фокуса равно 3, поэтому  $\frac{p}{2} = 3$  и  $p = 6$ . Уравнение параболы  $x^2 = -12y$ .

**Пример 3.** Среди приведённых уравнений указать уравнения параболы, найти параметр каждой из них:

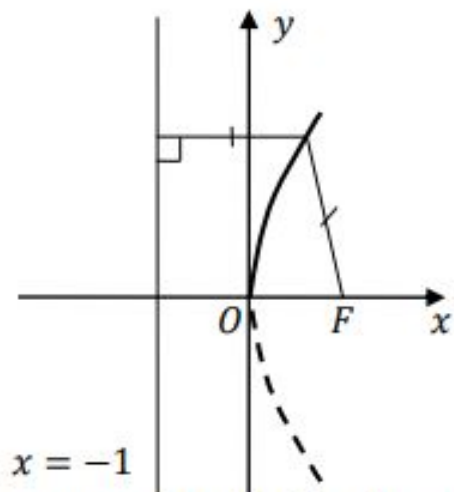
- |   |                            |
|---|----------------------------|
| 1) $5x - 2 = 0$ ;                           | 2) $x^2 = 4y$ ;            |
| 3) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ ; | 4) $2x^2 + 7y^2 = 1$ ;     |
| 5) $y^2 = -x$ ;                             | 6) $x^2 = -3y$ ;           |
| 7) $x^2 + y^2 = 2$ ;                        | 8) $y^2 = \frac{1}{2}x$ ;  |
| 9) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$ ; | 10) $x^2 = \frac{8}{3}y$ . |

**Ответ:** 2),  $p = 2$ ; 5),  $p = \frac{1}{2}$ ; 6),  $p = \frac{3}{2}$ ; 8),  $p = \frac{1}{4}$ ; 10),  $p = \frac{4}{3}$ .

**Пример 4.6.** Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

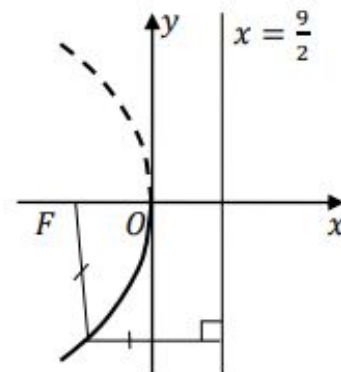
**Решение.**

1)  $y = 2\sqrt{x}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y \geq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $y^2 = 4x$ . Преобразуем:  $y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$ . Полученное уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке  $C(0; 0)$ , ветви направлены вправо, параметр  $p = 2$ , фокус  $F(1; 0)$ , директриса  $x = -1$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть параболы, расположенную в первом координатном углу (рис. 4.17).



. Парабола с вершиной в точке  $C(0; 0)$  и параметром  $p = 1$

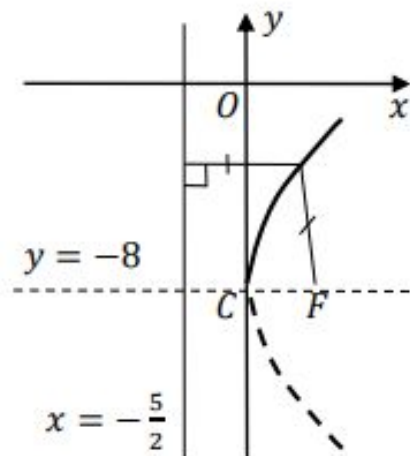
2)  $y = -3\sqrt{-2x}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y \leq 0, \\ -2x \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:  $\begin{cases} y \leq 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $y^2 = -18x$ . Преобразуем:  $y^2 = -2 \cdot 9 \cdot x$ . Полученное уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке  $C(0; 0)$ , ветви направлены влево, параметр  $p = 9$ , фокус  $F(-\frac{9}{2}; 0)$ , директриса  $x = \frac{9}{2}$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть параболы, расположенную в третьем координатном углу (рис. 4.18).



Парабола с вершиной в точке  $C(0; 0)$  и параметром  $p = \frac{9}{2}$

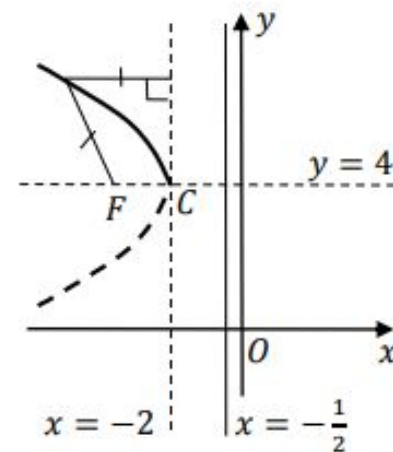


3)  $y = -8 + \sqrt{10x}$ . Перепишем уравнение в виде:  $y + 8 = \sqrt{10x}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y + 8 \geq 0, \\ 10x \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:  $\begin{cases} y \geq -8, \\ x \geq 0. \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $(y + 8)^2 = 10x$ . Преобразуем:  $(y - (-8))^2 = 2 \cdot 5(x - 0)$ . Полученное уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке  $C(0; -8)$ , ветви направлены вправо, параметр  $p = 5$ , фокус  $F\left(\frac{5}{2}; -8\right)$ , директриса  $x = -\frac{5}{2}$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть параболы, расположенной выше прямой  $y = -8$  (рис. 4.21).



Парабола с вершиной в точке  $C(0; -8)$  и параметром  $p = 5$

4)  $y = 4 + \sqrt{-6x - 12}$ . Перепишем уравнение в виде:  $y - 4 = \sqrt{-6(x + 2)}$ . Запишем ограничения:  $\begin{cases} y - 4 \geq 0, \\ -6(x + 2) \geq 0. \end{cases}$  Отсюда:  $\begin{cases} y \geq 4, \\ x \leq -2. \end{cases}$  Возведём обе части уравнения в квадрат:  $(y - 4)^2 = -6(x + 2)$ . Преобразуем:  $(y - 4)^2 = -2 \cdot 3(x - (-2))$ . Полученное уравнение определяет параболу. Вершина параболы находится в точке  $C(-2; 4)$ , ветви направлены влево, параметр  $p = 3$ , фокус  $F\left(-\frac{7}{2}; 4\right)$ , директриса  $x = -\frac{1}{2}$ . Учитывая полученные выше ограничения, заключаем, что исходное уравнение определяет часть параболы, расположенной выше прямой  $y = 4$



Парабола с вершиной в точке  $C(-2; 4)$  и параметром  $p = 3$

**Пример 5.** Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что фокус параболы  $F\left(\frac{9}{4}; 0\right)$  и уравнение директрисы  $4x + 9 = 0$ .

**Решение.** Фокус расположен на положительной части оси  $Ox$  на расстоянии  $\frac{9}{4}$  от начала координат. Директриса пересекает отрицательную часть оси  $Ox$ , параллельна оси  $Oy$  и расположена на таком же расстоянии от начала координат, что и фокус. Поэтому ветви параболы направлены вправо, её уравнение имеет вид  $y^2 = 2px$ , где  $\frac{p}{2} = \frac{9}{4}$ ,  $p = \frac{9}{2}$ . Составляем уравнение параболы:  $y^2 = 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot x = 9x$ .

**Ответ:**  $y^2 = 9x$ .

**Пример 6.** Вычислить фокальный радиус точки  $M$  параболы  $y^2 = 20x$ , если абсцисса точки  $M$  равна 7.

**Решение.** Обозначим ординату точки  $M$  через  $y_0$ . Тогда  $M(7; y_0)$ . Преобразуем уравнение параболы:  $y^2 = 2 \cdot 10 \cdot x$ . Параметр параболы  $p = 10$ , фокус  $F(5; 0)$ . Найдём  $y_0$ . Для этого подставим координаты точки  $M$  в уравнение параболы:  $y_0^2 = 20 \cdot 7$ ,  $y_0 = \pm\sqrt{140}$ . Получаем две точки:  $M_1(7; \sqrt{140})$ ,  $M_2(7; -\sqrt{140})$ .

Вычислим фокальный радиус точки  $M$ , то есть расстояние  $r = FM_1$  или  $r = FM_2$ . Получаем:

$$r = FM_1 = \sqrt{(5 - 7)^2 + (0 - \sqrt{140})^2} = \sqrt{4 + 140} = 12.$$

**Ответ:** 12

**Пример 7.**

Составить уравнение множества точек, для каждой из которых квадрат расстояния до точки  $K(2;0)$  на 16 больше квадрата расстояния до оси ординат.

**Решение:** Пусть точка  $M(x, y)$  принадлежит искомому множеству. Тогда:

$$|KM| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$

По условию  $|KM|^2$  **на 16 больше**, чем  $(\rho(M; OY))^2$ , следовательно, справедливо следующее равенство:

$$|KM|^2 - 16 = (\rho(M; OY))^2$$

$$(либо |KM|^2 = (\rho(M; OY))^2 + 16)$$

Таким образом:

$$(\sqrt{(x-2)^2 + y^2})^2 - 16 = |x|^2$$

$$(x-2)^2 + y^2 - 16 = x^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16 = x^2$$

очевидно, уравнение нужно максимально приблизить к каноническому виду  $y^2 = 2px$ :

$$-4x + y^2 - 12 = 0$$

$$y^2 = 4x + 12$$

$y^2 = 4(x + 3)$  – **парабола** с вершиной в точке  $\tilde{O}(-3;0)$ , фокальным параметром  $p = 2$ .

**Ответ:** искомое множество точек представляет собой параболу  $y^2 = 4(x + 3)$

**Пример 8.** Составить уравнение параболы и её директрисы, зная, что она симметрична относительно оси  $OY$ , фокус находится в точке  $F(0; 2)$ , вершина совпадает с началом координат.

Решение.

Будем искать уравнение параболы в виде  $x^2 = 2py$ . По условию  $\frac{p}{2} = 2$ , а значит  $p = 4$ . Итак, искомое уравнение имеет вид:  $x^2 = 8y$ , уравнение её директрисы:  $y = -2$ .

Задача 4. Найдите координаты центра и радиус окружности:

$$x^2 + y^2 - 8x + 16y - 41 = 0$$

Решение.

Выделяя полные квадраты суммы и разности слагаемых в левой части уравнения, получим:  $(x^2 - 8x + 16) - 16 + (y^2 + 16y + 64) - 64 - 41 = 0$  или;

$$(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16 + 64 + 41 = 121; \quad (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 11^2.$$

Центр:  $C(4, -8)$ , Радиус:  $R = 11$ .

**Пример 9.** Вывести уравнение геометрического места точек, для которых расстояние до данной точки  $F(3, 0)$  равно расстоянию до данной прямой  $x + 3 = 0$ .

*Решение.* Найдем расстояние  $FM$  и  $MN$  (см. рис. 7):

$$FM = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 0)^2}, \quad MN = x + 3;$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + y^2} = x + 3.$$

Решим уравнение  $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 6x + 9$ . Получим уравнение параболы  $y^2 = 12x$ .

**Пример 10.** Построить кривую, заданную уравнением  $x^2 + 2x + 6y - 2 = 0$ , приведя его к каноническому виду.

**Решение.** Преобразуем уравнение следующим образом

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x) &= -6y + 2, & (x^2 + 2x + 1) &= -6y + 2 + 1, \\ (x + 1)^2 &= -6y + 3, & (x + 1)^2 &= -6(y - 0,5).\end{aligned}$$

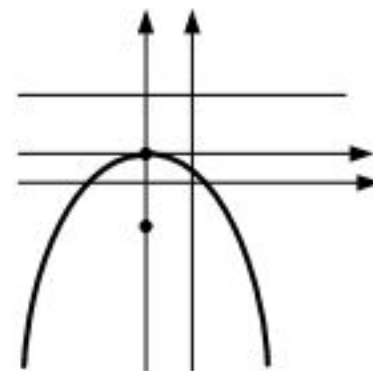
Получили уравнение параболы (см. 1.2.5) с вершиной в точке  $O'(-1; 0,5)$  и с осью симметрии, параллельной оси  $Oy$ . Переносим начало координат в точку  $O'$ , получим в системе координат  $x'O'y'$  уравнение

$$(x')^2 = -6(y'),$$

где параметр  $p$  определяется из условия  $2p = 6$  или  $p = 3$ .

Парабола симметрична относительно оси  $O'y'$  или относительно прямой  $x = -1$ . Фокус параболы находится на ее оси и отстоит от вершины на  $\frac{p}{2}$ . Поскольку из уравнения следует, что  $y' \leq 0$ , то ветви параболы направлены вниз и фокус  $F$  лежит на  $\frac{p}{2} = 1,5$  ниже вершины, то есть его координаты  $F(-1; -1)$ .

Директрисой параболы является прямая, перпендикулярная ее оси и находящаяся на расстоянии  $\frac{p}{2} = 1,5$  от вершины, причем фокус и директриса расположены по разные стороны от вершины. Учитывая все это, можно записать уравнение директрисы  $y = 0,5 + 1,5$ , или  $y = 2$ .



**Пример 11.**

Написать уравнение кривой как геометрического места точек, равноудаленных от точки  $F(0,6)$  и прямой  $y = -6$ .

*Решение*

По определению данной кривой является парабола. Поскольку фокус лежит на оси  $OY$ , то уравнение параболы  $x^2 = 2py$ . Вычисляем параметр  $p$  по известному фокус  $F(0,6)$ :

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right) = F(0;6) \Rightarrow \frac{p}{2} = 6 \Rightarrow p = 12$$

Получаем уравнение параболы  $x^2 = 24y$ .

**Пример 12.**

Дано уравнение параболы  $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$ . Найти координаты вершины, фокуса, уравнение директрисы параболы.

*Решение.*

Перенесем слагаемые, содержащие  $x$ , вправо. Слагаемые, содержащие  $y$ , оставим слева и выделим полный квадрат выражения:

$$y^2 - 4x - 8y + 24 = 0 \text{ или } y^2 - 8y + 16 + 8 = 4x \text{ или } y^2 - 8y + 16 = 4(x - 2) \text{ или } (y - 4)^2 = 2 \cdot 2(x - 2).$$

Из последнего выражения, получаем, что вершина параболы  $A(x_0, y_0) = A(2, 4)$ , параметр  $p = 2$ .

Фокус  $F(x_0 + p/2; y_0) = F(2 + 1; 4) = F(3; 4)$ .

Директриса имеет уравнение вида:  $x = x_0 - \frac{p}{2} = 2 - \frac{2}{2} = 1$ .



## задачи для самостоятельного решения

1. Определить координаты центров и радиусы окружностей:  
1)  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ ; 2)  $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$ ; 3)  $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 54 = 0$
2. Найти угол между радиусами окружности  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ , проведенными в точки ее пересечения с осью  $Oy$ .
3. Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(1; 2)$ ,  $B(0; -1)$  и  $C(-3; 0)$ .
4. Составить уравнение окружности, проходящей через точки  $A(7; 7)$  и  $B(-2; 4)$ , если ее центр лежит на прямой  $2x - y - 2 = 0$ .
5. Составить уравнение общей хорды окружностей  $x^2 + y^2 = 16$  и  $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ .
6. На эллипсе  $x^2/25 + y^2/9 = 1$  найти точку, разность фокальных радиусов-векторов которой равна 6,4
7. Найти длину перпендикуляра, восстановленного из фокуса эллипса  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  к большой оси до пересечения с эллипсом.
8. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса  $x^2/25 + y^2/16 = 1$ .
9. Эллипс, отнесенный к осям, проходит через точку  $M(1; 1)$  и имеет эксцентриситет  $e = 3/5$ . Составить уравнение эллипса.
10. Как расположены относительно эллипса  $x^2/50 + y^2/32 = 1$  точки  $M(7; 1)$ ,  $N(-5; -4)$ ,  $P(4; 5)$ ?

11. Найти эксцентриситет эллипса, если фокальный отрезок виден из верхней вершины под углом  $\alpha$ .

12. На прямой  $x + 5 = 0$  найти точку, одинаково удаленную от левого фокуса и верхней вершины эллипса  $x^2/20 + y^2/4 = 1$ .

13.. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих фокусах и вершинах эллипса  $x^2/8 + y^2/5 = 1$ .

14. Через точку  $M(0; -1)$  и правую вершину гиперболы  $3x^2 - 4y^2 = 12$  проведена прямая. Найти вторую точку пересечения прямой с гиперболой.

15. Дана гипербола  $x^2 - y^2 = 8$ . Найти софокусный эллипс, проходящий через точку  $M(4; 6)$ .

16. Дан эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 1$ . Написать уравнение софокусной, равнобочной гиперболы.

17. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку  $M(9; 8)$ , если асимптоты гиперболы имеют уравнения  $y = \pm(2\sqrt{2}/3)x$

18. Угол между асимптотами гиперболы равен  $60^\circ$ . Вычислить эксцентриситет гиперболы.

19. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой  $4x - 3y - 4 = 0$  с осью  $Ox$ .
20. На параболе  $y^2 = 8x$  найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.
21. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси  $Ox$  и отсекающей от прямой  $y = x$  хорду длиной  $4\sqrt{2}$ .
22. Парабола  $y^2 = 2x$  отсекает от прямой, проходящей через начало координат, хорду, длина которой равна  $3/4$ . Составить уравнение этой прямой.
23. Составить простейшее уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.
24. На параболе  $y^2 = 32x$  найти точку, расстояние которой от прямой  $4x + 3y + 10 = 0$  равно 2.
25. Привести к каноническому виду уравнения парабол:  
 1)  $y = 4x - 2x^2$ ; 2)  $y = -x^2 + 2x + 2$ ; 3)  $x = -4y^2 + y$ ;  
 4)  $x = y^2 + 4y + 5$ . 5)  $y = 9x^2 - 6x + 2$ .