



**Курс лекций по
дисциплине**

**СТАТИСТИЧЕСКАЯ
РАДИОТЕХНИКА**

Лекция 4

**Лектор - Куроедов
Сергей Константинович**

ПЛАН ЛЕКЦИИ 1-4

- 1. Импульсные случайные процессы, квазидетерминированные импульсные случайные процессы**
- 2. Перекрывающиеся и неперекрывающиеся случайные импульсы, условия отсутствия и наличия перекрытия**
- 3. Энергетический спектр реализации стационарной случайной последовательности неперекрывающихся импульсов**

ПЛАН ЛЕКЦИИ 4

4. **Спектр мощности стационарной случайной последовательности неперекрывающихся импульсов**
5. **Спектр мощности периодически повторяющихся импульсов заданной формы со случайными амплитудами**
6. **Спектр мощности периодически повторяющихся импульсов заданной формы с некоррелированными случайными амплитудами**
7. **Спектр мощности пуассоновской по**

ПЛАН ЛЕКЦИИ 4

8. **Спектр мощности квазипериодического импульсного случайного процесса с независимыми стационарными амплитудами и смещениями импульсов**
9. **Спектр мощности случайной последовательности импульсов с постоянной амплитудой и стационарными случайными смещениями во времени**
0. **Спектр мощности независимых перекрывающихся импульсов**
1. **Спектр мощности пуассоновской последовательности независимых перекрывающихся импульсов**

ПЛАН ЛЕКЦИИ 4

- 2. Спектр мощности квазипериодического импульсного случайного процесса с независимыми стационарными амплитудами и смещениями импульсов**
- 3. Спектр мощности случайной последовательности импульсов с постоянной амплитудой и стационарными случайными смещениями во времени**
- 4. Спектр мощности независимых перекрывающихся импульсов**
- 5. Спектр мощности пуассоновской последовательности независимых перекрывающихся импульсов**

ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Импульсным называется *случайный процесс* в виде *импульсной последовательности* с *априорно неизвестными характеристиками*.

Априорно неизвестными могут быть *форма* каждого *случайного импульса* *последовательности*, его время появления, *основные*, *дополнительные* и *производные* параметры.

Импульсные случайные процессы, часть характеристик которых являются *априорно известными*, называются *квазидетерминированными*.

ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Случайные финитные импульсы могут быть **неперекрывающимися** и **перекрывающимися**. Под **перекрытием** понимается частичное **наложение** импульсов друг на друга.

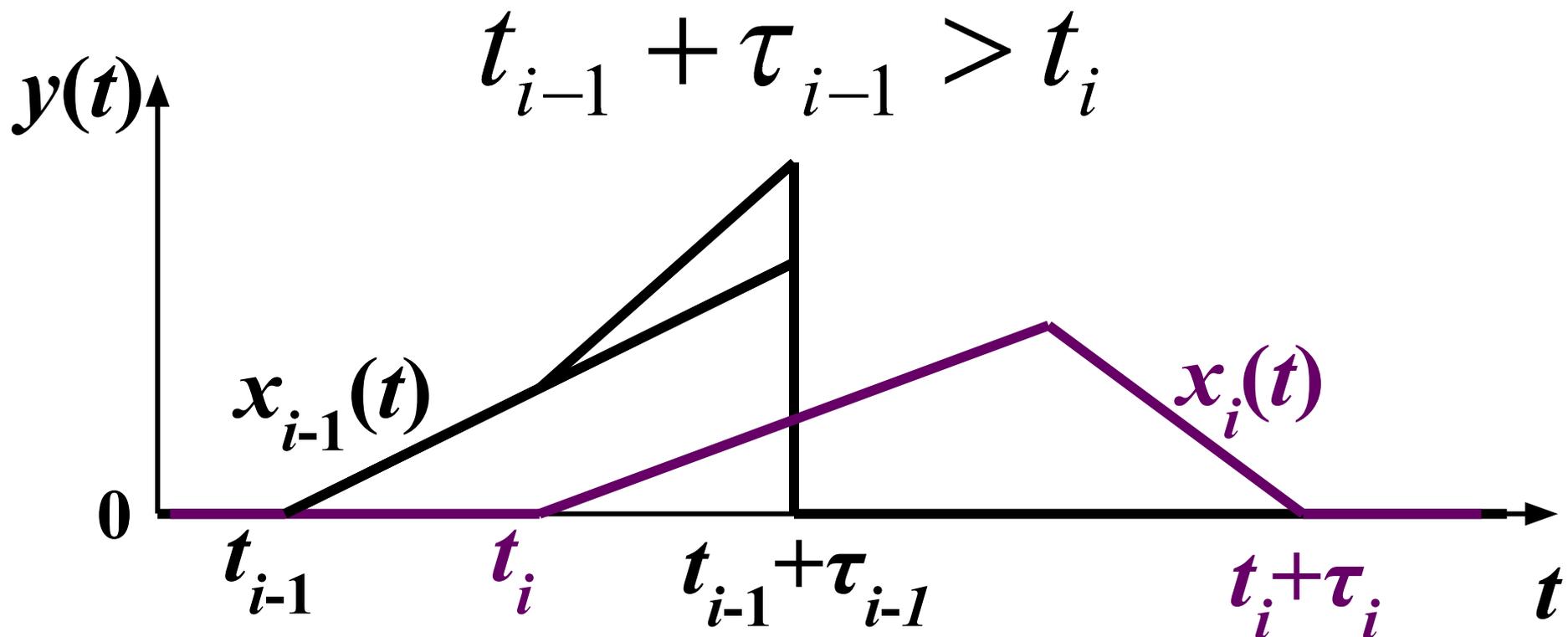
Условие отсутствия **перекрытия** импульсов определяется **неравенством**

$$t_{i-1} + \tau_{i-1} \leq t_i$$

t_{i-1} и t_i – эпохи (моменты появления) $(i-1)$ -го и i -го импульсов, τ_{i-1} - длительность $(i-1)$ -го импульса

ИМПУЛЬСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Для **перекрывающихся импульсов** **последовательности** условие отсутствия **перекрытия** не выполняется по крайней мере для одной пары смежных импульсов:



СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Реализация последовательности случайных импульсов заданной (априорно известной) формы:

$$y(t) = \sum_i A_i x \left[\frac{\tau}{\tau_i} (t - t_i) \right]$$



СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Спектральные плотности типового импульса и его **смещенной масштабной копии**:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$A_i x \left[\frac{\tau}{\tau_i} (t - t_i) \right] \leftrightarrow A_i \frac{\tau_i}{\tau} X \left(\frac{\omega \tau_i}{\tau} \right) e^{\frac{-j\omega \tau_i}{\tau}}$$

СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Спектральная плотность реализации импульсной последовательности:

$$Y(\omega) = \sum_{i=-N}^N A_i \frac{\tau_i}{\tau} X\left(\frac{\omega\tau_i}{\tau}\right) e^{\frac{-j\omega\tau_i}{\tau}}$$

Энергетический спектр реализации:

$$|Y(\omega)|^2 = Y(\omega)Y^*(\omega)$$

СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Энергетический спектр реализации:

$$|Y(\omega)|^2 = \sum_{i=-N}^N \sum_{k=-N}^N A_i A_k \frac{\tau_i \tau_k}{\tau^2} X\left(\frac{\omega \tau_i}{\tau}\right) \cdot$$

$$\cdot X^*\left(\frac{\omega \tau_k}{\tau}\right) e^{j\omega \tau \left(\frac{t_i}{\tau_i} - \frac{t_k}{\tau_k}\right)}$$

$$n = i - k, i = n + k$$

СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Энергетический спектр реализации:

$$|Y(\omega)|^2 = \sum_{n=-2N}^{2N} \sum_{k=-N}^N A_{n+k} A_k \frac{\tau_{n+k} \tau_k}{\tau^2} X\left(\frac{\omega \tau_{n+k}}{\tau}\right).$$

$$\cdot X^*\left(\frac{\omega \tau_k}{\tau}\right) e^{j\omega \tau \left(\frac{t_{n+k}}{\tau_{n+k}} - \frac{t_k}{\tau_k}\right)}$$

СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Спектр мощности последовательности:

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle [Y_T(\omega)]^2 \right\rangle$$

T – случайная длительность реализации,
включающей $(2N+1)$ -импульсов

$\theta_i = t_{i+1} - t_i$ – длительность интервала
времени между эпохами двух соседних
импульсов

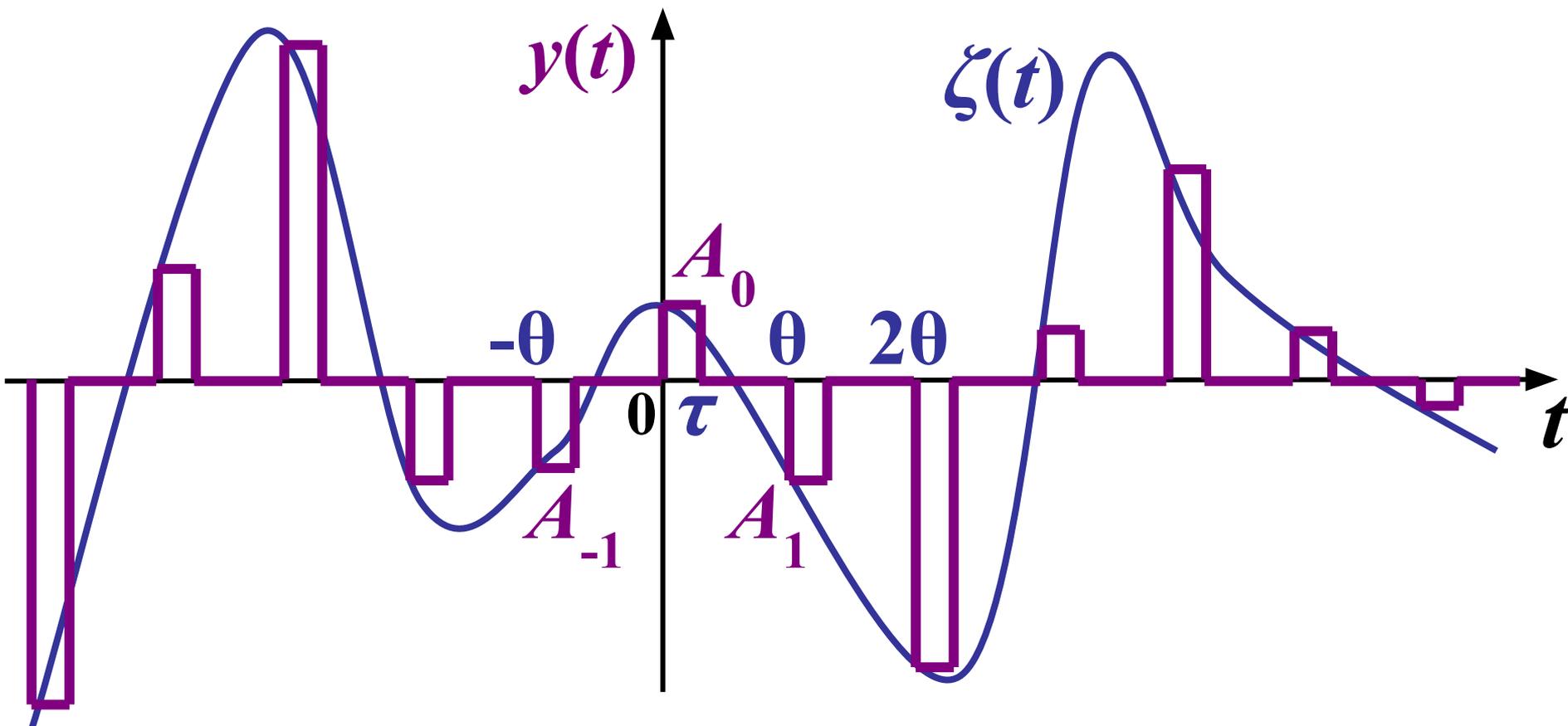
$$\langle T \rangle = (2N + 1) \langle \theta_T \rangle, \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \theta_T \rangle = \langle \theta \rangle$$

СТАЦИОНАРНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Спектр мощности последовательности:

$$W(\omega) = \frac{1}{\langle \theta \rangle} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle A_{n+k} A_k \frac{\tau_{n+k} \tau_k}{\tau^2} \cdot X\left(\frac{\omega \tau_{n+k}}{\tau}\right) X^*\left(\frac{\omega \tau_k}{\tau}\right) e^{j\omega \tau \left(\frac{t_{n+k}}{\tau_{n+k}} - \frac{t_k}{\tau_k}\right)} \right\rangle$$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ



$\theta_i = \theta$ – постоянный период повторения импульсов с постоянной длительностью $\tau_i = \tau$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

A_i – случайные **амплитуды** импульсов,
которые определяются выборками
стационарного **случайного процесса** $\zeta(t)$:

$$A_i = \zeta(i \theta)$$

$$\tau_k = \tau_{k+n} = \tau, t_{n+k} - t_k = n\theta, \langle \theta \rangle = \theta$$

$$\langle A_{n+k} A_k \rangle = K_\zeta(n\theta) = R_\zeta(n\theta) + m_\zeta^2$$

где $K_\zeta(\tau)$ – функция ковариации, $R_\zeta(\tau)$
функция корреляции, m_ζ – математическое
ожидание **случайного процесса** $\zeta(t)$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Подставляем в формулу для $W(\omega)$:

$$W(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\theta} \left[m_{\zeta}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n\theta} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n\theta} R_{\zeta}(n\theta) \right]$$

Учитываем разложение периодической последовательности **дельта-функций** в **комплексный ряд Фурье**:

$$\frac{2\pi}{\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n\theta}$$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Окончательно получаем:

$$W(\omega) = \frac{2\pi m_{\zeta}^2 |X(\omega)|^2}{\theta^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right) +$$
$$+ \frac{|X(\omega)|^2}{\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n\theta} R_{\zeta}(n\theta)$$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Для того, чтобы перейти в полученном выражении от функции корреляции $R_\zeta(\tau)$ к спектру мощности $W_\zeta(\omega)$ случайного процесса $\zeta(t)$, используем теорему Винера-Хинчина:

$$R_\zeta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\zeta(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Второе слагаемое в формуле для $W(\omega)$
запишется так:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n\theta} R_{\zeta}(n\theta) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\zeta}(\omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega+\omega')n\theta} d\omega'$$

**ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ
ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ**

**Сумму комплексных экспонент в
подынтегральном выражении заменим
периодической последовательностью
масштабных копий дельта-функций:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n\theta} R_{\zeta}(n\theta) = \frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\zeta}(\omega') \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega' + \omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right) d\omega'$$

**Используя фильтрующее свойство
дельта-функций, получаем:**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n\theta} R_{\zeta}(n\theta) = \frac{1}{\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{\zeta}\left(\omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right)$$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

После подстановки в формулу для $W(\omega)$ полученного выражения для **второго слагаемого** окончательно получаем:

$$W(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\theta^2} \left[m_\xi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_\xi\left(\omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right) \right]$$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Из полученного выражения следует, что **спектр мощности $W(\omega)$** периодически повторяющихся импульсов заданной формы со случайными амплитудами в общем случае состоит из **непрерывной** и **дискретной** частей. **Дискретные спектральные линии** на частотах $\omega = n\omega_0$, кратных частоте $\omega_0 = 2\pi\theta^{-1}$ следования импульсов, обусловлены стробированием m_ζ случайного процесса $\zeta(t)$. При $m_\zeta = 0$ **спектр мощности** не содержит **дискретной части** и является **сплошным**.

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Если период θ следования импульсов значительно больше времени корреляции τ_k процесса $\zeta(t)$, то случайные амплитуды A_i импульсов можно считать **некоррелированными**:

$$R_{\zeta}(n\theta) = 0, n \neq 0, R_{\zeta}(0) = \sigma_{\zeta}^2$$

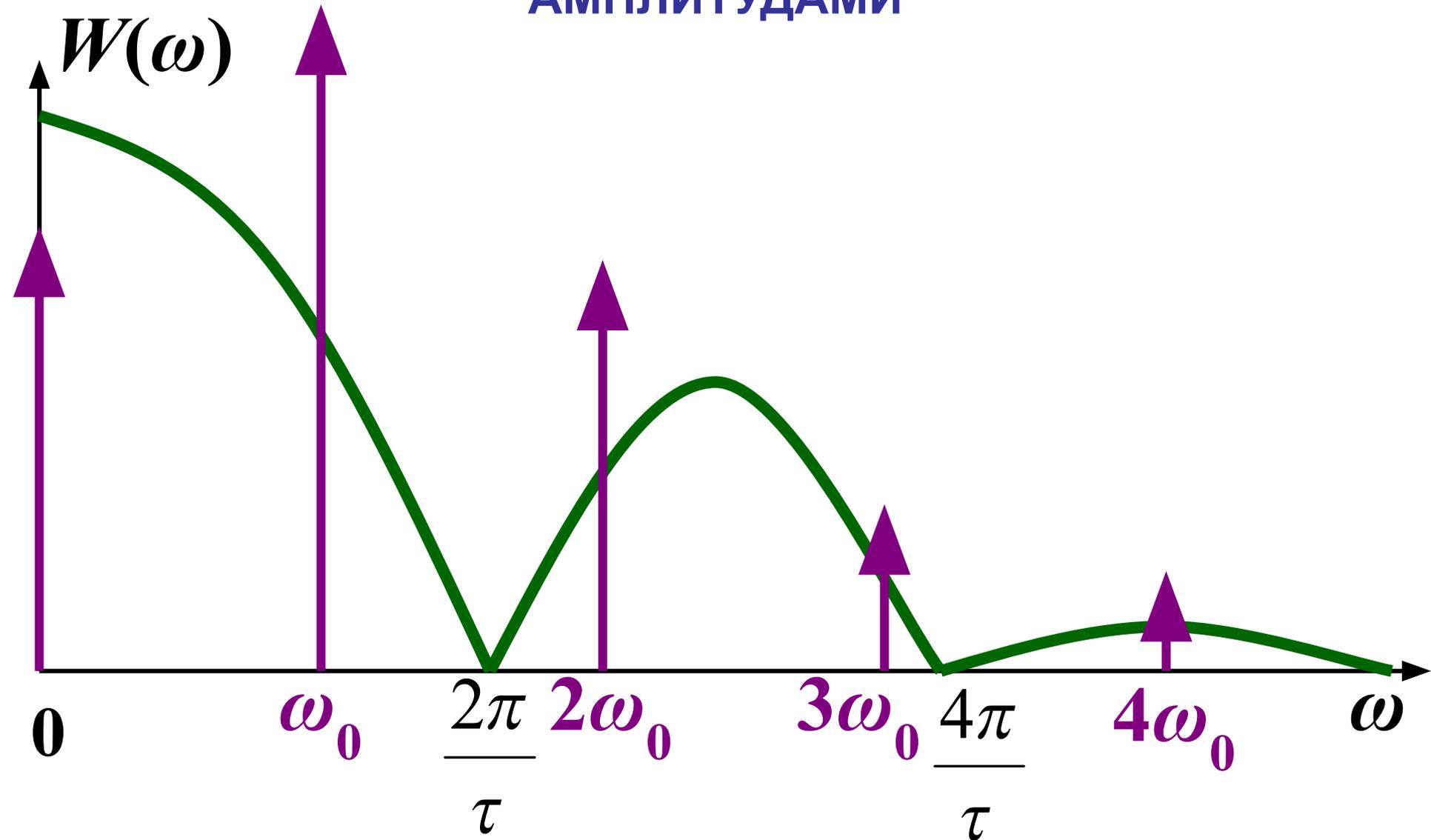
В этом случае во **втором слагаемом** выражения для $W(\omega)$ отличным от нуля будет только одно **слагаемое** при $n = 0$

ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ИМПУЛЬСЫ
ЗАДАННОЙ ФОРМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ
НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМИ АМПЛИТУДАМИ

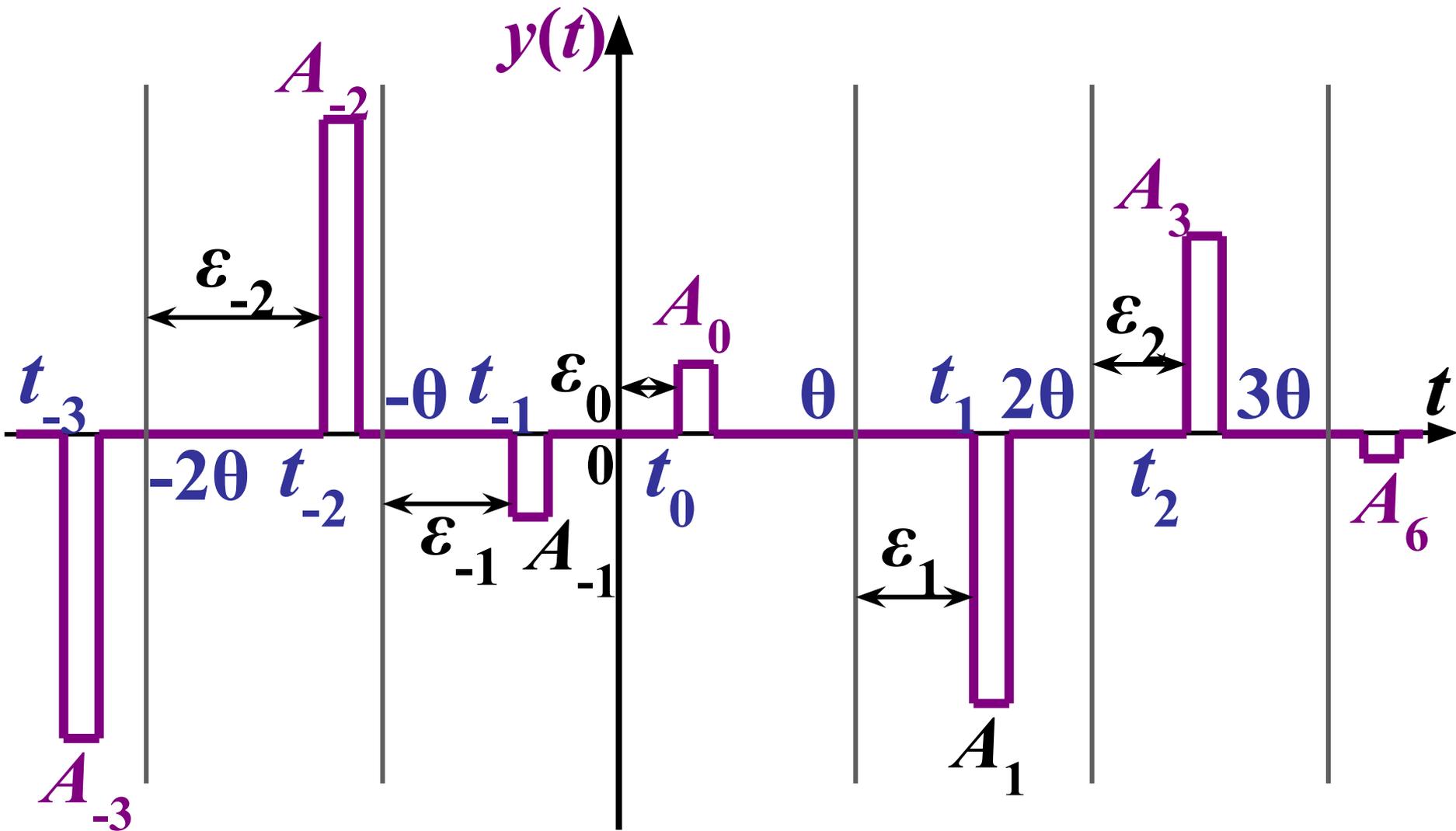
$$W(\omega) = \frac{2\pi m_{\xi}^2 |X(\omega)|^2}{\theta^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right) +$$
$$+ \frac{\sigma_{\xi}^2 |X(\omega)|^2}{\theta}$$

Как следует из полученного выражения, при некоррелированных A_i непрерывная часть $W(\omega)$ является масштабной копией энергетического спектра типового импульса $x(t)$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИ
ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ СО
СЛУЧАЙНЫМИ НЕКОРРЕЛИРОВАННЫМИ
АМПЛИТУДАМИ



КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС



КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС С НЕЗАВИСИМЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ И СМЕЩЕНИЯМИ ИМПУЛЬСОВ

$$\tau_k = \tau_{k+n} = \tau, t_k = n\theta + \varepsilon_k, \langle \theta \rangle = \theta$$

$$t_{n+k} - t_k = n\theta + \varepsilon_{k+n} - \varepsilon_k, \langle A_{n+k} A_k \rangle = \langle A^2 \rangle$$

$$\Theta(\omega) = \langle e^{j\omega(t_{k+1} - t_k)} \rangle = e^{j\omega\theta} |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2, \Theta_\varepsilon(\omega) = \langle e^{j\omega\varepsilon} \rangle$$

$\Theta(\omega)$ – характеристическая функция *квазипериодов* - длительностей $(t_{k+1} - t_k)$ интервалов между соседними импульсами, $\Theta_\varepsilon(\omega)$ – характеристическая функция смещений ε_k

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЙ ИМПУЛЬСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС С НЕЗАВИСИМЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ АМПЛИТУДАМИ И СМЕЩЕНИЯМИ ИМПУЛЬСОВ

После подстановки в общее выражение для $W(\omega)$ выделим слагаемые с $n = 0$, $n \geq 1$, $n \leq -1$ и используем формулу разложения периодической последовательности дельта-импульсов в комплексный ряд Фурье

$$\frac{2\pi}{\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega n \theta}$$

**СПЕКТР МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ С
НЕЗАВИСИМЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ АМПЛИТУДАМИ И
СМЕЩЕНИЯМИ**

$$W(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\theta^2} \left[\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2 + \right. \\ \left. + \frac{\langle A \rangle^2}{\theta} |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi m}{\theta}\right) \right]$$

СПЕКТР МОЩНОСТИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Из полученного выражения следует, что

спектр мощности $W(\omega)$

квазипериодического импульсного
случайного процесса в общем случае

состоит из **непрерывной** и **дискретной**

частей. При $\langle A \rangle = 0$ **спектр мощности** не
содержит **дискретной части** и является
сплошным.

Если $\varepsilon_i = \text{const}$, то выражение для $W(\omega)$
приводится к выражению для **спектра**
мощности периодически повторяющихся
импульсов со случайными амплитудами

СПЕКТР МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ С ПОСТОЯННЫМИ АМПЛИТУДАМИ

Если амплитуды импульсов $A_i = A = \text{const}$,
то выражение для $W(\omega)$ приводится к
следующему виду:

$$W(\omega) = \frac{A^2}{\theta^2} |X(\omega)|^2 \left[1 - |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\theta} |\Theta_\varepsilon(\omega)|^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi m}{\theta}\right) \right]$$

СЛУЧАЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Реализация случайной
последовательности **перекрывающихся**
импульсов на интервале $(0, T)$:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N(T)} A_i x \left[\frac{\tau}{\tau_i} (t - t_i) \right]$$

$N(T)$ – число импульсов реализации,
 T – длительность реализации

СПЕКТР МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \sum_{i=0}^{N(T)} \sum_{k=0}^{N(T)} A_i A_k \frac{\tau_i \tau_k}{\tau^2} \cdot X^* \left(\frac{\omega \tau_i}{\tau} \right) X \left(\frac{\omega \tau_k}{\tau} \right) e^{j\omega \tau \left(\frac{t_i}{\tau_i} - \frac{t_k}{\tau_k} \right)} \right\rangle$$

Число импульсов $N(T)$ является случайной величиной, поэтому статистическое усреднение должно распространяться и на $N(T)$

СПЕКТР МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{\bar{N}(T)} \sum_{k=0}^{\bar{N}(T)} \left\langle A_i A_k \frac{\tau_i \tau_k}{\tau^2} X^* \left(\frac{\omega \tau_i}{\tau} \right) X \left(\frac{\omega \tau_k}{\tau} \right) e^{j\omega \tau \left(\frac{t_i}{\tau_i} - \frac{t_k}{\tau_k} \right)} \right\rangle$$

Выделим из двойной суммы, содержащей $\langle N(T) \rangle^2$ слагаемых, $\langle N(T) \rangle$ слагаемых с одинаковыми индексами $i = k$

СПЕКТР МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\sum_{i=0}^{\bar{N}(T)} \left\langle A_i^2 \frac{\tau_i^2}{\tau^2} \left| X\left(\frac{\omega \tau_i}{\tau}\right) \right|^2 \right\rangle + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{\bar{N}(T)} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{\bar{N}(T)} \left\langle A_i A_k \frac{\tau_i \tau_k}{\tau^2} X^*\left(\frac{\omega \tau_i}{\tau}\right) X\left(\frac{\omega \tau_k}{\tau}\right) e^{j\omega \tau \left(\frac{t_i}{\tau_i} - \frac{t_k}{\tau_k}\right)} \right\rangle \right]$$

Если случайные величины A_i , τ_i и t_i стационарны, то их **средние значения** не зависят от индекса i

СПЕКТР МОЩНОСТИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Если A_i , τ_i и t_i независимы, то

$$W(\omega) = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(T)}{T} \right] \left\langle A^2 \tau_x^2 |X(\omega \tau_x)|^2 \right\rangle +$$
$$+ \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{N^2}(T) - \overline{N}(T)^2}{T} \right] \cdot \left\langle A \tau_x X^*(\omega \tau_x) e^{j\omega \tau \frac{t_i}{\tau_i}} \right\rangle \cdot$$
$$\cdot \left\langle A \tau_x X(\omega \tau_x) e^{-j\omega \tau \frac{t_k}{\tau_k}} \right\rangle$$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

τ_x – безразмерная длительность импульса, нормированная длительностью **ТИПОВОГО ИМПУЛЬСА**

Если случайное число $N(T)$ импульсов на интервале времени $(0, T)$ распределено по закону **Пуассона**, то существуют **пределы**

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{N}(T)}{T} = \lambda, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{N^2}(T) - \overline{N}(T)}{T^2} = \lambda^2$$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

λ – среднее число импульсов в единицу времени

Подставляем полученные значения пределов в выражение для $W(\omega)$:

$$W(\omega) = \lambda \left\langle A^2 \tau_x^2 |X(\omega \tau_x)|^2 \right\rangle + \\ + \lambda^2 \left\langle A \tau_x |X(\omega \tau_x)| \right\rangle^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[T \left\langle e^{j\omega \frac{t_i}{\tau_{xi}}} \right\rangle \right]$$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Примем, что эпохи t_i равномерно распределены на интервале $(0, T)$, тогда их плотность вероятности

$$p(t_i) = \begin{cases} 0, & t_i \notin (0, T); \\ \frac{1}{T}, & t_i \in (0, T). \end{cases}$$

Используем $p(t_i)$ для того, чтобы вычислить предел в правой части выражения для $W(\omega)$, считая, что $\tau_i = \tau$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

$$\left| \left\langle e^{j\omega t_i} \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{T^2} \left| \int_0^T e^{j\omega t_i} dt_i \right|^2 = \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \right)^2$$
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0; \\ \infty, & \omega = 0. \end{cases}$$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Учитывая, что

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} \right)^2 d\omega = 2\pi$$

получаем:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \left| \left\langle e^{j\omega t_i} \right\rangle \right|^2 = 2\pi \delta(\omega)$$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Введем величину, характеризующую *плотность импульсной последовательности* или **число импульсов**, приходящихся в среднем на **длительность одного импульса**:

$$\gamma = \lambda \langle \tau \rangle$$

Чем больше γ , тем больше **степень перекрытия** импульсов и наоборот

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ
ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

$$W(\omega) = \frac{\gamma}{\langle \tau \rangle} \left\langle A^2 |X(\omega)|^2 \right\rangle +$$
$$+ \frac{\gamma^2}{\langle \tau \rangle^2} \left\langle A |X(0)| \right\rangle^2 2\pi\delta(\omega)$$

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Из полученного выражения следует, что **спектр мощности $W(\omega)$** пуассоновской последовательности независимых перекрывающихся импульсов описывается **двумя** слагаемыми. **Первое слагаемое** определяется **математическим ожиданием** энергетического спектра случайного импульса, взвешенным параметром λ .

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Второе слагаемое представляет собой масштабную копию **дельта-функции** частоты, взвешенную квадратом произведения параметра λ и **средней площади** случайного импульса. **Средняя площадь** случайного импульса определяется **математическим ожиданием** значения его **спектральной плотности** в нуле, которое, в свою очередь, при **отсутствии** перекрытия определяет квадрат **среднего значения** импульсной последовательности

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

Влияние **перекрытия** случайных импульсов на квадрат их **среднего значения** можно рассмотреть на следующем примере.

При $\gamma = 1$ два прямоугольных импульса с одинаковыми **длительностями** и **амплитудами** в среднестатистическом смысле не перекрываются и между ними отсутствует пауза, поэтому квадрат их **среднего значения** определяется квадратом **амплитуды**

СПЕКТР МОЩНОСТИ ПУАССОНОВСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ ИМПУЛЬСОВ

При $\gamma = 2$ в среднем наблюдается **полное перекрытие** двух импульсов, **амплитуда** суммы импульсов увеличивается в **два раза**, а квадрат их среднего значения – в **четыре раза**. В **четыре раза** увеличивается площадь дельта-функции частоты, которая описывает **спектр мощности** импульсной последовательности при нулевом значении частоты.