Типовой расчет по дискретной математике

2 курс 3 семестр

1. Постройте рекуррентную последовательность с периодом к = const.
Замечание!: Поле содержащее элемент нужного порядка должно содержать подполе.

1) Построить поле в котором существует элемент порядка K.

$$F_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\} - \text{подполе}.$$

$F_p[x] = \{a_\infty x^\infty + a_{\infty-1}x^{\infty-1} + x^{\infty-2} \dots + a_0 | a_\infty, a_{\infty-1}, \dots, +a_0 \in F_p\}$ – *множество всевозможных многочленов, коэффициенты которых берутся из* F_p.

Что означает эта запись: $F_p[x]/(x^q \dots)$ - ?

Из теории: $F_p[x]/(x^q \dots) = \{A_1 x^{q-1} + A_2 x^{q-2} + \cdots + A_n \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_p\}$

Пример № 1:

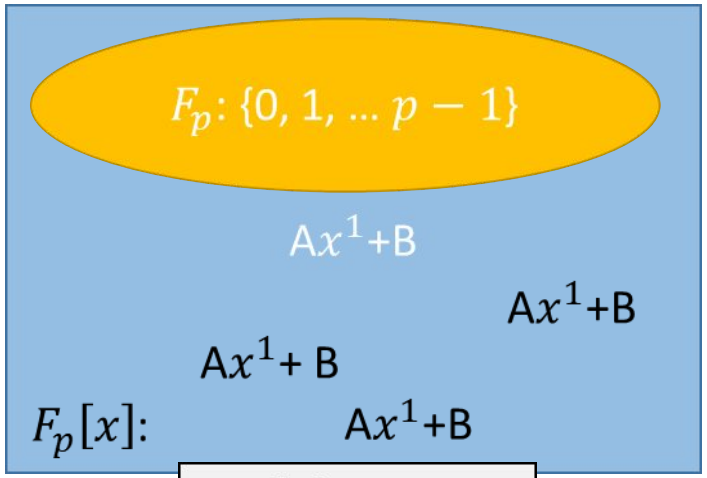
$$(x^3 + x^2+1)/(x^2+ x + 1) = (A_1 x^1+A_0)$$

Пример № 2:

$$(x^7 + x^2+1)/(x^2+ x + 1) = (A_5 x^5+A_4 x^4+ \dots +A_0)$$

$$(x^7 + x^2+1)/(x^2+ x + 1) \approx (x^7 + x^2 + 1) \,\%\, (x^2+ x + 1) = (A_1 x^1+A_0)$$

0			
1			



Вывод:

$$F_p[x]/(x^q \dots) \approx F_p[x] \,\%\, (x^q \dots) = \{A_1 x^{q-1} + A_2 x^{q-2} + \cdots + A_n \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_p\}$$

$F_p[x]/(x^q \dots)$ – *поле над подполем* F_p.

$[F_p[x]/(x^q \dots)]$ – *фактор-группа.~ (Поле)*

$a^K = e$ – В мультипликативной терминологии.

$q\lambda = e$ – В аддитивной терминологии порядок.

p^q – число элементов в поле, которое имеет подполе F_p

p^q - 1 = максимальным порядком(+Индивидуальные порядки элем's.). Поля $[F_p[x]/(x^q \dots)]$), кол. Во обратимых.

$p^q - 1 = C = S_1 \bullet S_2 \bullet S_3$

$p^q - 1 = C = S_1 \bullet S_2 \bullet \dots \bullet K \bullet S_n = K \bullet S$, где $S = S_1 \bullet S_2 \bullet \dots \bullet S_n$ и $K \bullet S$, $S_1, S_2, \dots, S_n$ – делители числа C. т. е. индивидуальные порядки для определенных элементов поля $[F_p[x]/(x^q \dots)]$.

1. Постройте рекуррентную последовательность с периодом к = 31
Замечание!: Поле содержащее элемент нужного порядка должно содержать подполе.

$F_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1}\}$ – подполе. $p^q - 1 = C = K \bullet S$ $p^q - 1 = C = 31 \bullet S$ $p^q = 31 \bullet S + 1$

$p^q = 1 : S = 0$

$F_p[x]/(x^q \dots) = \{A_1 x^{q-1} + A_2 x^{q-2} + \cdots + A_n \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_p\}$

$p^q = 32 = 2^5 = 31 \bullet 1 + 1 : S = 1$

$p = 2, q = 5$

$F_2[x]/(x^5 \dots) = \{A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x^1 + A_0 x^0 \mid A_0, A_1, \dots, A_4 \in F_2\}$

$(F_2[a], a^5 = a^3 + 1) = F_2[a]$, где a корень многочлена $(x^5 + x^3 + 1) = F_2[x]/(x^5 + x^3 + 1) = \{A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x^1 +$

$x^5 + x^3 + 1 = 0$ $a^5 = -a^3 - 1 = a^3 + 1$ $b = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x^1 + A_0$

$a^5 = a^3 + 1$ $p^q = 32$ $b^{31} = 1$ $b = x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1$

$p^q - 1$ = максимальным порядком(+Индивидуальные порядки элем's.). Поля $[F_p[x]/(x^q \dots)]$), кол. Во обратимых.

$C = p^q - 1 = 31$ $b^{31} = b$ $b = a^4 + a^3 + a^2 + a^1 + 1$

$b = x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1$

1. $x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1 = 0 \mid F_2$

x^i
$x_{n+(i-1)}$

$x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = 0$

$x_{n+3} = -x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n + x_{n-1}$ $x^4 + x^3 + x^2 + x^1 =$

$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad -a_0]$

$$x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n + x_{n-1}$$

										30																				
0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31																			

$\in N$

$$x_0 = x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n + x_{n-1}$$

$n + 3 = 0$

$n = -3$

$\in N$

$$x_0 = x_{-1} + x_{-2} + x_{-3} + x_{-4} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$n + 3 = 1$ $n = 1-3 = -2$

$$x_1 = x_0 + x_{-1} + x_{-2} + x_{-3} = 0 + 0 + 0 \mid \text{Пусть } x_1 = 1$$

$n + 3 = 1$ $n = -2$ $n = 1-3 = -2$

$$x_2 = x_1 + x_0 + x_{-1} + x_{-2} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$n + 3 = 2$ $n = 2 - 3$ $n = -1$

$$x_3 = x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = x_2 + x_1 + x_0 + x_{-1} = 1 + 1 + 0 + 0 = 0$$

$n + 3 = 3$ $n = 0$

$$x_4 = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = x_3 + x_2 + x_1 + x_0 = 1 + 0 + 0 = 0$$

$n = 4-3 = 1$ $n + 3 = 4$

2. Определить период последовательности сдвигового регистра, задаваемого многочленом.

- $A_1 x^{q-1} + A_2 x^{q-2} + \cdots + A_n$;
- $F_p[x]/(x^q \ldots) = \{A_1 x^{q-1} + A_2 x^{q-2} + \cdots + A_n \mid A_1, A_2, \ldots, A_n \in F_p\}$

p^q – число элементов в поле, которое имеет подполе F_p.

p^q - 1 = максимальным порядком (+ Индивидуальные порядки элем's.). Поля $[F_p[x]/(x^q \ldots)]$), кол. Во обратимых.

$p^q - 1 = C = S_1 \bullet S_2 \bullet S_3 \bullet \ldots S_n$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & -a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} -$$

$M^{S_i} = M$, где $S_i \in \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n\}$

$M^{S_i - 1 = r} = E$, где $S_i \in \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n\}$, $S_i = r + 1$;

2. Определить период последовательности сдвигового регистра, задаваемого многочленом.

$F_p[x]/(x^q \dots) = \{a = x^3 + 2x + 2 \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_3\}$

$K = F_3$, $a = x^3 + 2x + 2$

$p^q = 3^4 = 81$

$p^q - 1 = 3^4 = 81 - 1 = 80$

p^q — число элементов в поле, которое имеет подполе F_p

$p^q - 1 = C = S_1 \bullet S_2 \bullet S_3$

$F_3[x]/(x^4 \dots) = \{ b = x^3 + 2x + 2, A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \mid A_1, A_2, \dots, A_3 \in F_3\}$

$F_3[a]/(a^4 + 1) = \{ b = a^3 + 2a + 2, A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \mid A_1, A_2, \dots, A_3 \in F_3\}$

$p^q - 1$ = максимальным порядком(+Индивидуальные порядки элем's.). Поля $[F_p[x]/(x^q \dots)]$), кол. Во обратимых.

$p^q - 1 = 80 = 1 \bullet 2^4 \bullet 5 = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$

$a^4 = (-1) = 2$

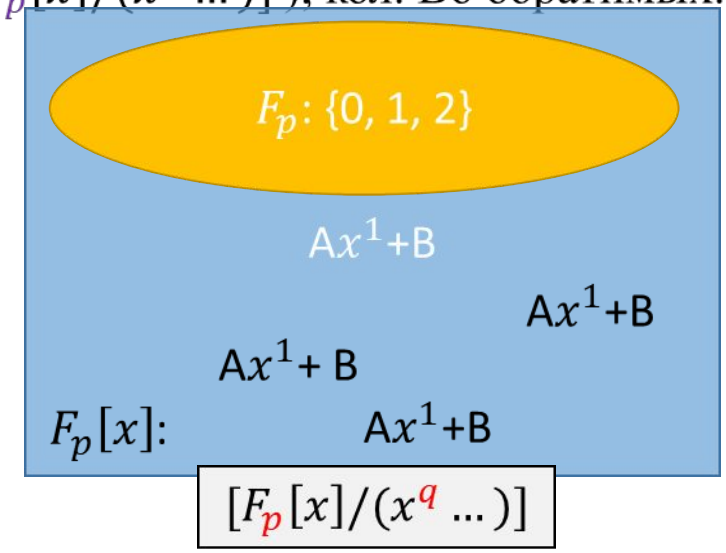
$b(a) = a^3 + 2a + 2$ $b = a^3 + 2a + 2$

$b^k = 1, k \in \{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40\}$

$(a^3 + (2a + 2))^k = 1$

$[a^3]^k + (2a+2)^k = 1$

$(2a+2)^k = (2a)^k + 2^k$



0	1		
1	**2**		
2	**2**		

2. Определить период последовательности сдвигового регистра, задаваемого многочленом.

$F_p[x]/(x^q \dots) = \{a = x^3 + 2x + 2 \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_3\}$

$K = F_3$, $a = x^3 + 2x + 2$

$p^q = 3^4 = 81$

$p^q - 1 = 3^4 = 81 - 1 = 80$

p^q – число элементов в поле, которое имеет подполе F_p

$p^q - 1 = C = S_1 \bullet S_2 \bullet S_3$

$F_3[x]/(x^5 \dots) = \{ b = x^3 + 2x + 2, A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \mid A_1, A_2, \dots, A_3 \in F_3\}$

$F_3[a]/(a^4 + 1) = \{ b = a^3 + 2a + 2, A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \mid A_1, A_2, \dots, A_3 \in F_3\}$

$p^q - 1$ = максимальным порядком(+Индивидуальные порядки элем's.). Поля $[F_p[x]/(x^q \dots)]$), кол. Во обратимых.

3

$p^q - 1 = 80 = 1 \bullet 2^4 \bullet 5 = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80\}$

$a^4 = (-1) = 2$

$b(a) = a^3 + 2a + 2$ $b = a^3 + 2a + 2$

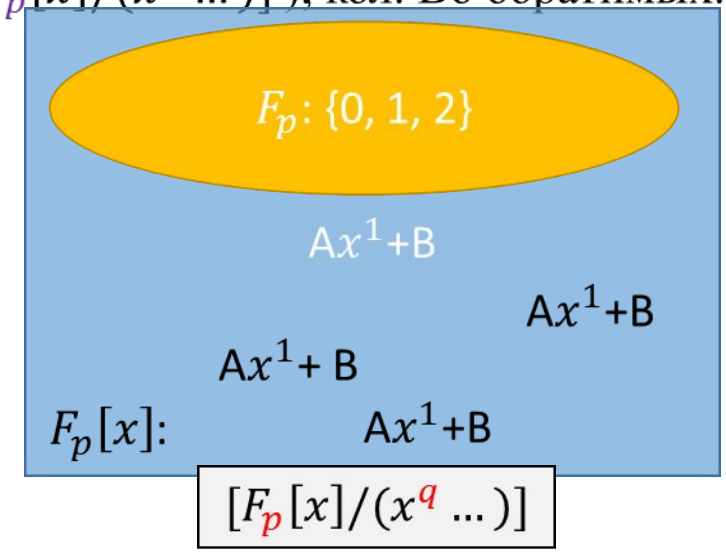
0	1		
1	**2**		
2	**2**		

$b^k = 1, k \in \{2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40\}$

$(a^3 + (2a + 2))^k = 1$

$[a^3]^k + (2a+2)^k = 1$

$(2a+2)^k = (2a)^k + 2^k$



$$(a^3 + 2a + 2)^{80} = \left((a^3 + 2a + 2)^5\right)^{16} =$$

$$a^4 = 2$$

- $(a^3 + 2a + 2)^5 = (a^3 + 2a + 2)^2 \cdot (a^3 + 2a + 2)^2 \cdot (a^3 + 2a + 2) =$
- $= (a^3 + (2a + 2))^2 = 2a^2 + 2 + 4\,a^3 + (2a + 2)^2 = a^3 + 2a$
- $(2a + 2)^2 = 4a^2 + 8a + 4 = a^2 + 2a + 1$
- $= (a^3 + 2a)^{16} = a^{16} \cdot (a + 2)^{16} = a^{16} \cdot (a + 2)^{16}$

$K = F_7$, b= $x^2 + 6x + 2$

$F_7[x]/(x^3 \dots) = \{ b = x^2 + 6x + 2 \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_7 \}$

7^3-1=7•7•7-1= 49•7-1= 343-1= 342= {1,2,3,6,9,18,19,38,57,114,171, 342}.

$F_7[a]/(a^q \dots) = \{ b = a^2 + 6a + 2 = 0 \bullet a^3 + a^2 + 6a + 2 \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_7 \}$

$a^3 = \mathbf{5}$ $\quad b^k = 1$

F_7

0	2	
1	**3**	
2	**3**	
3	**1**	
4	**3**	
5	**1**	4•5+2=22=1
6	**1**	1•6+2 = 8 = 1

$k = 2$: $b^2 = (a^2 + (6a + 2))^2 = 12a^3 + 40a^2 + 29a + 4 = 5a^3 + 5a^2 + a + 4 = 5a^2 + a + 1$

$k = 3$: $b^3 = (a^2 + 6a + 2)^3 = (a^2 + (6a + 2))^2 (a^2 + 6a + 2) = (5a^2 + a + 1)(a^2 + 6a + 2) = (4a + 3 + 9a^2) = 2a^2 + 4a + 3$

$k = 6$: $b^6 = (b^3)^2 = (2a^2 + (4a + 3))^2 = 2a + 5$

{1,2,3,6,9,18,19,38,57,114,17

$k = 9$: $b^9 = (b^3)^3 = b^6 b^3 = (2a + 5)(2a^2 + 4a + 3) = 5a + 4a^2 = a(4a + 5)$

$k = 18$: $b^{18} = (b^9)^2 = (a(4a + 5))(a(4a + 5)) = a^2(4a + 5)^2 = (3a + 1 + 4a^2)$

$k = 19$: $b^{19} = b^{18} \bullet b = (4a^2 + 3a + 1)(a^2 + 6a + 2) = (11a + 4 + 6a^2) = 6a^2 + 11a + 4$

3	**5**	
4	**5**	
5	**3**	
6	**2**	

$K = F_7$, $b = x^2 + 6x + 2$

$F_7[x]/(x^4 \dots) = \{ b = x^2 + 6x + 2 \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_7 \}$

$7^4 - 1 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 1 = 2401 - 1 = 2400 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 30, 32, 40, 48, 50, 60, 75, 80, 96, 100, 120, 150, 160, 2$

$F_7[a]/(a^4 \dots) = \{ b = a^2 + 6a + 2 = 0 \cdot a^3 + a^2 + 6a + 2 \mid A_1, A_2, \dots, A_n \in F_7 \}$

$b^k = 1$

$a^4 = \mathbf{6}$

$b^k = (a^2 + 6a + 2)^k = (a^2)^k + (6a)^k + 2^k = 1$ $\boxed{F_7}$

$k = 2$: $b^2 = (a^2 + 6a + 2)^2 = (a^2)^2 + (6a)^2 + 2^2 = 4 + a^2 + \mathbf{6} = a^2 + 3$

$(b^2)^2 = (a^2 + 3)^2 = a^4 + 9 = 6 + 9 = 6 + 2 = 8 = 1$ $k = 4$

$k = 4$: $b^4 = (a^2 + 6a + 2)^4 = (a^2)^4 + (6a)^4 + 2^4 = (a^4)^2 + (a)^4 + 2 = 36 + 6 + 2 = 1 + 6 + 2 = 9 = 2$

$k = 3$: $b^3 = (a^2 + 6a + 2)^3 = (a^3)^2 + (6a)^3 + 2^3 = 1 + 2 + \mathbf{4} = 0$

$k = 6$: $b^6 = (a^2 + 6a + 2)^6 = \left((a^2 + 6a + 2)^3\right)^2 = 0$

{1,2,3,6,9,18,19,38,57,114,171}

$\{7,9,1,21,3,63\} = 2^6 - 1 = p^q = 9 \bullet S+1$ $p^q - 1 = 15$ $p^q = 15 \bullet S+1$ – Макс порядок F_2 $p^q = 15 \bullet S+1$ $p = 2$ $q = 3$

$\{1,3,5,15\} = 15$ – Макс порядок

15

$F_2[p^q] = 16$. Всего элементов

$F_2[d], a = a^4 + 1 = F_2[a]$, где a – корень многочлена $x^4 + x + 1 = [F_2[x]/(x^4 + x + 1)] = \{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D : A, B \in F_2\}$

14														14															
1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0

$[F_2[x]/(x^4+x+1)]=\{Ax^3+Bx^2+Cx+D: A, B \in F_2\}$ $x^4 = x+1$ $x^4+x+1=0$

x^3+x+1 $B^{15} = B$

$b = x^3+x+1$ $b^{15} = b^5 \cdot b^5 \cdot b^5$ $b^5 =$

$b = x^3+x+1 = x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 x + a_0$ $b = x^3+x+1$ – минимальным многочленом B

x^3+x+1 – неприводимы

$N(B) = B^3 + B + E = 0$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \text{НФФ}$$

$x_{n+2} + x_n + x_{n-1} = 0$

$x_{n+2} = x_n + x_{n-1}$ 1,0,1,1,1, 0, 0, 1,0,1,1,1,0,0,1,0,

$n+2 = 1$

$x_0 = x_{-2}+x_{-3} = 1$

$x_1 = x_{-1} + x_{-2} = 0$

$x_2 = x_0 + x_{-1} = 1$

$x_3 = x_1 + x_0 = 1$

$x_4 = x_{n+2} = x_2 + x_1 = 1$

$x_5 = x_{n+2} = x_3 + x_2 = 0$

$x_6 = x_{n+2} = x_4 + x_3 = 0$

$x_7 = x_{n+2} = x_5 + x_4 = 1$

$x_8 = x_{n+2} = x_6 + x_5 = 0$

$x_9 = x_{n+2} = x_7 + x_6 = 1$

$x_{10} = x_{n+2} = x_8 + x_7 = 1$

$x_{13} = x_{n+2} = x_{11} + x_{10} = 0$

$x_{14} = x_{n+2} = x_{12} + x_{11} = 0$

$x_{15} = x_{n+2} = x_{13} + x_{12} = 0$

$x_{16} = x_{n+2} = x_{14} + x_{13} = 0$

$n+2 = 4$

$n+2 = 5$

$n+2 = 6$