

Практический семинар по Математической экономике (17.М18-э + 17.М19-э)

Занятие 2

ОБРАБОТКА ДАННЫХ.

Задачи локального и глобального
интерполирования.

2018/2019 уч. год

Задача локального интерполирования. Пример

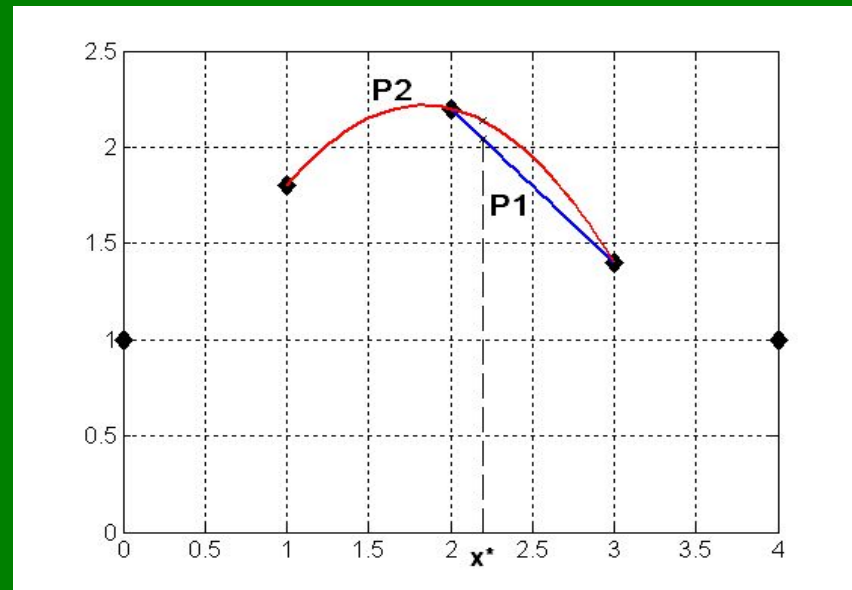
Пусть известны значения функции $y = f(x)$ в 5 узлах (т. е. дана интерполяционная задача с 5 узлами):

x	0	1	2	3	4
y	1.0	1.8	2.2	1.4	1.0

Требуется найти полиномы 1-й и 2-й степени, удовлетворяющие условию интерполирования в окрестности точки $x^*=2.3$:

$$P_1: \begin{aligned} P_1(2) &= 2.2 \\ P_1(3) &= 1.4 \end{aligned}$$

$$P_2: \begin{aligned} P_2(1) &= 1.8 \\ P_2(2) &= 2.2 \\ P_2(3) &= 1.4 \end{aligned}$$



Постановка задачи. Условие интерполирования

Пусть дана интерполяционная задача с n узлами:

x	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_1	y_2	\dots	y_n

, $x_i \neq x_j, i, j = 1, 2, \dots, n$

Найти полином степени не выше чем $(n-1)$, удовлетворяющий условию интерполирования:

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} : f(x_i) = y_i$$

$$y_1 = f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1},$$

$$y_2 = f(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1},$$

.....

$$y_n = f(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1}.$$

Условие интерполирования

Матричный вид условия интерполирования:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

определитель Вандермонда

Пример решения задачи локального интерполирования

x	0	1	2	3	4
y	1.0	1.8	2.2	1.4	1.0

в окрестности точки
 $x^*=2,3$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 2 = 2,2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 = 1,4 \end{cases}$$

$$a_0 = 3,8; \quad a_1 = -0,8$$

$$\underline{P1 = 3,8 - 0,8x}$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 1,8 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 2,2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = 1,4 \end{cases}$$

$$a_0 = 0,2; \quad a_1 = 2,2; \quad a_2 = -0,6;$$

$$\underline{P2 = 0,2 + 2,2x - 0,6x^2}$$

Пример 1

Построить интерполяционный полином по таблице

x	0	2	3
f(x)	1	3	2

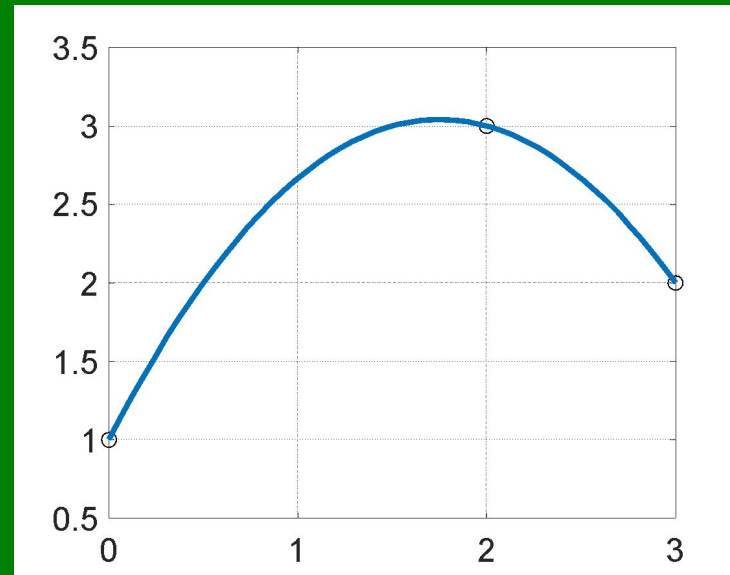
$$y_i = f(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c$$

$$c = 1$$

$$4a + 2b + 1 = 3$$

$$9a + 3b + c = 2$$

$$L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1$$



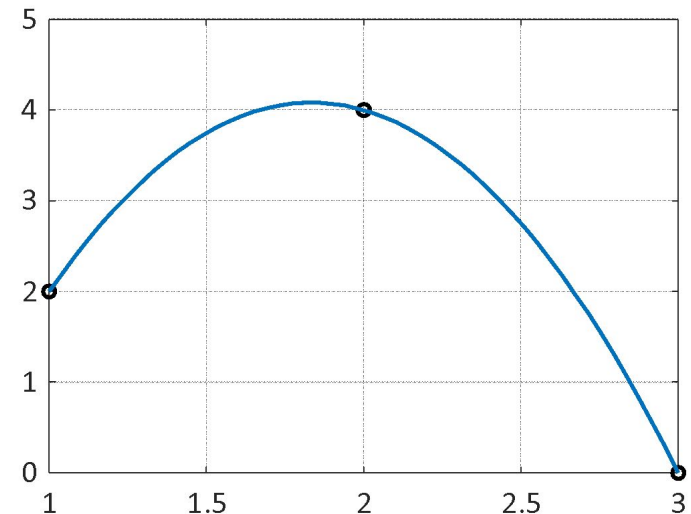
Пример 2

Построить интерполяционный полином по таблице

x	1	2	3
f(x)	2	4	0

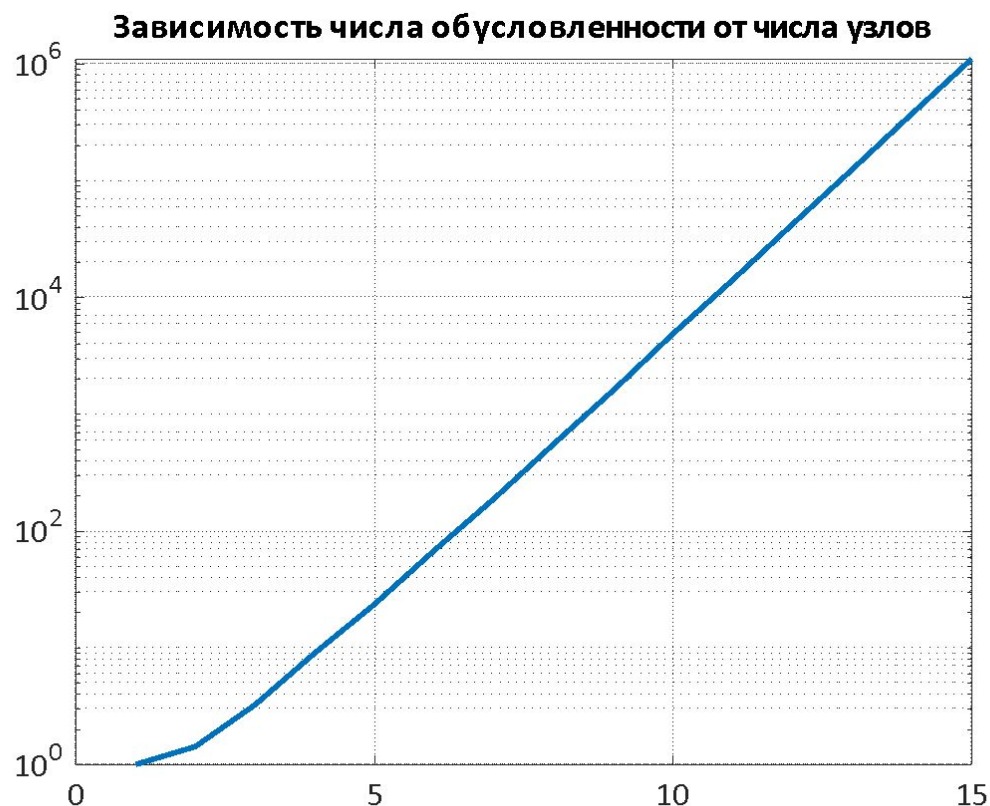
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2(x) = -3x^2 + 11x - 6$$



Замечание о применимости подхода

```
1 - a=-1; b=1;           % границы отрезка
2 - N=15;                % количество узлов
3 - C=[];                % массив для записи чисел обусловленности
4 - for n=1:N
5 -     x=linspace(a,b,n)'; % формируем матрицу
6 -     M=[];
7 -     for k=0:n
8 -         M=[M x.^k];
9 -     end
10 -     cc=cond(M);
11 -     C=[C cc];
12 - end
13 - figure
14 - semilogy(1:N,C,'LineW
15 - set(gca,'Fontname','C
16 - title('Зависимость чи
17 - grid
```



Полином Лагранжа

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i)$$

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

В частности,

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

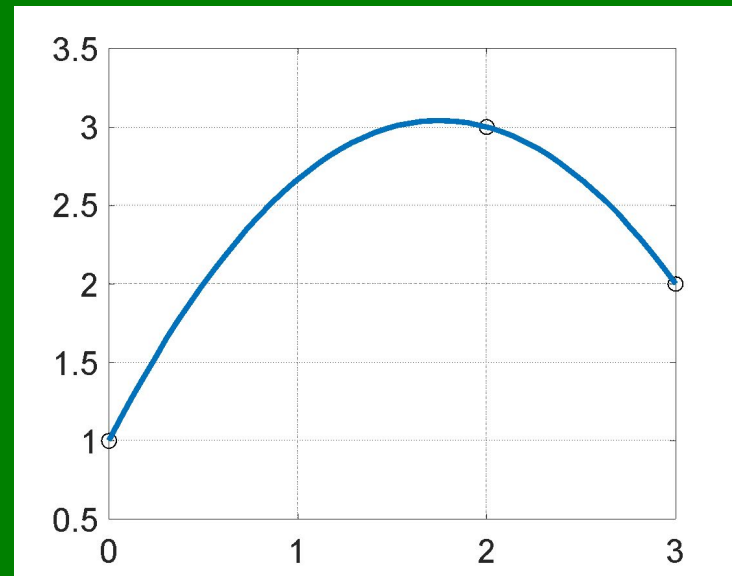
Пример 1а

Построить полином Лагранжа по таблице

x	0	2	3
f(x)	1	3	2

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-2)(-3)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)}{2(-1)} \cdot 3 + \frac{x(x-2)}{3 \cdot 1} \cdot 2 =$$

$$= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1$$

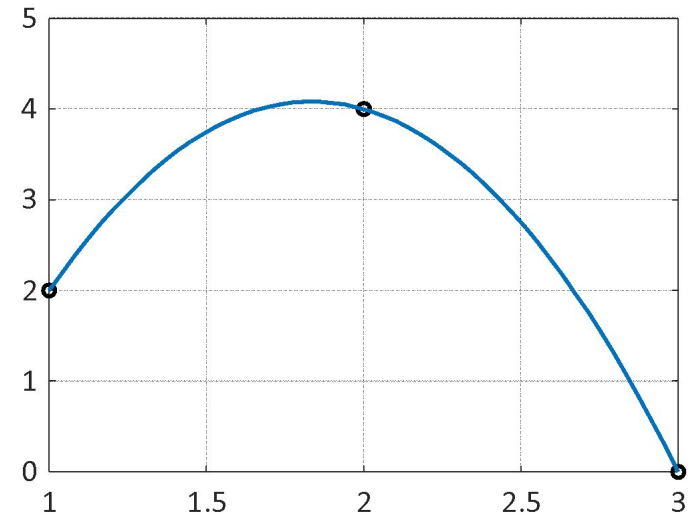


Пример 2а

Построить полином Лагранжа по таблице

x	1	2	3
f(x)	2	4	0

$$L_2(x) = -3x^2 + 11x - 6$$



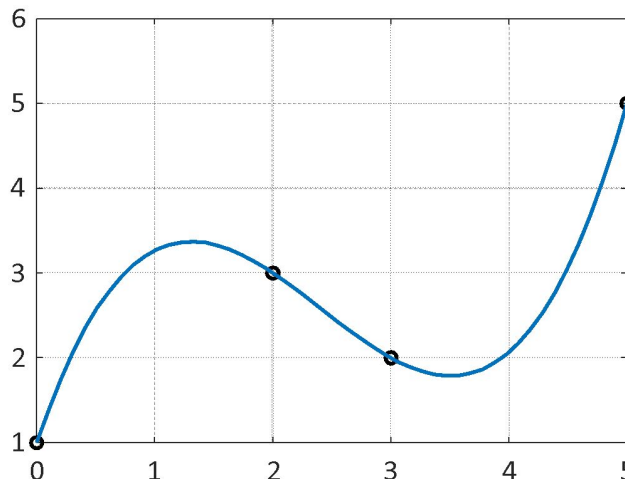
Пример 3

Построить полином Лагранжа по таблице

x	0	2	3	5
f(x)	1	3	2	5

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(-1)(-3)} \cdot 3 + \\ + \frac{x(x-2)(x-5)}{3 \cdot 1 \cdot (-2)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5 \cdot 1 \cdot 1} \cdot 5 =$$

$$= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$$



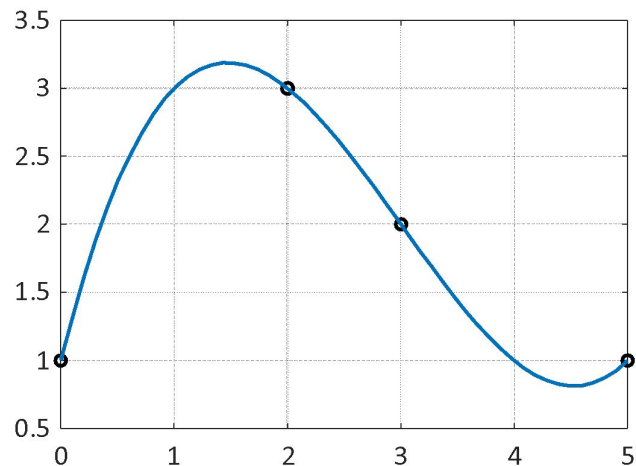
Пример 4

Построить полином Лагранжа по таблице

x	0	2	3	5
f(x)	1	3	2	1

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(-1)(-3)} \cdot 3 + \\ + \frac{x(x-2)(x-5)}{3 \cdot 1 \cdot (-2)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x + 1$$



Интерполяционный кубический сплайн (ИКС)

Определение

Пусть $\{x_i\}$ - интерполяционная сетка на отрезке $[a,b]$ и (x_i, y_i) - точки данных. Интерполяционным кубическим сплайном называется функция $S(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. Функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ вместе со своими производными $S'(x)$ и $S''(x)$;
2. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ $S(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом третьей степени

$$P_{3,k}(x) = a_0 + a_1(x - x_{k-1}) + a_2(x - x_{k-1})^2 + a_3(x - x_{k-1})^3$$

3. $S(x)$ удовлетворяет условию интерполирования

$$S(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Две формы записи ИКС

$$S(x) \equiv P_k(x) = \sum_{i=0}^3 a_i^{(k)} (x_k - x)^i =$$

$$a_0^{(k)} + a_1^{(k)} (x_k - x) + a_2^{(k)} (x_k - x)^2 + a_3^{(k)} (x_k - x)^3$$

$$S(x) \equiv P_k(x) = m_{k-1} \frac{(x-x_k)^2 (x-x_{k-1})}{h_k^2} + m_k \frac{(x-x_{k-1})^2 (x-x_k)}{h_k^2} +$$
$$+ y_{k-1} \frac{(x-x_k)^2 (2(x-x_{k-1})+h_k)}{h_k^3} + y_k \frac{(x-x_{k-1})^2 (2(x_k-x)+h_k)}{h_k^3}$$

Величины m_k называются наклонами сплайна

Идея алгоритма построения ИКС

Для непрерывности $S''(x)$ m_k следует выбирать так, чтобы для внутренних узлов сетки выполнялось

$$P''_k(x_k) = P''_{k+1}(x_k), \quad k=2, \dots, N-1$$

$$P''_k(x_k) = \frac{2m_{k-1}}{h_k} + \frac{4m_k}{h_k} - 6 \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k^2} \right)$$

$$P''_{k+1}(x_k) = -\frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{4m_k}{h_{k+1}} + 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}^2} \right)$$

Идея алгоритма построения ИКС

Получим для внутренних узлов сетки

$$h_k^{-1}m_{k-1} + 2(h_k^{-1} + h_{k+1}^{-1})m_k + h_{k+1}^{-1}m_{k+1} = \\ 3(h_k^{-2}(y_k - y_{k-1}) + h_{k+1}^{-2}(y_{k+1} - y_k))$$

В частном случае, для равномерной сетки при $h=1$, уравнения принимают вид

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = 3(y_{k+1} - y_{k-1})$$

$$k=1,2,\dots,N-1$$

Граничные условия «естественный сплайн»

Число уравнений $n - 1$, число неизвестных $n + 1$, необходимы два дополнительных условия.

Наиболее популярные варианты:

1) «естественный» сплайн ($S''(a) = 0, S''(b) = 0$)

$$-\frac{2m_1}{h_1} - \frac{4m_0}{h_1} + 6\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1^2}\right) = 0$$

$$\frac{2m_{N-1}}{h_N} + \frac{4m_N}{h_N} - 6\left(\frac{y_N - y_{N-1}}{h_N^2}\right) = 0$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом $h=1$,

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_0 &= 3(y_1 - y_0) \\ m_{N-1} + 2m_N &= 3(y_N - y_{N-1}) \end{aligned}$$

Граничные условия «отсутствие узла»

2) сплайн с условием «отсутствие узла»

$$P'''_1(x_1) = P'''_2(x_1), P'''_N(x_{N-1}) = P'''_{N-1}(x_{N-1}),$$

$$2h_1^{-3} (y_0 - y_1) + h_1^{-2} (m_0 + m_1) = 2h_2^{-3} (y_1 - y_2) + h_2^{-2} (m_1 + m_2)$$

$$\begin{aligned} 2h_{N-1}^{-3} (y_{N-2} - y_{N-1}) + h_{N-1}^{-2} (m_{N-2} + m_{N-1}) = \\ = 2h_N^{-3} (y_{N-1} - y_N) + h_N^{-2} (m_{N-1} + m_N) \end{aligned}$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом $h=1$,

$$\begin{aligned} m_0 - m_2 &= 2(2y_1 - y_0 - y_2) \\ m_{N-2} - m_N &= 2(2y_{N-1} - y_N - y_{N-2}) \end{aligned}$$

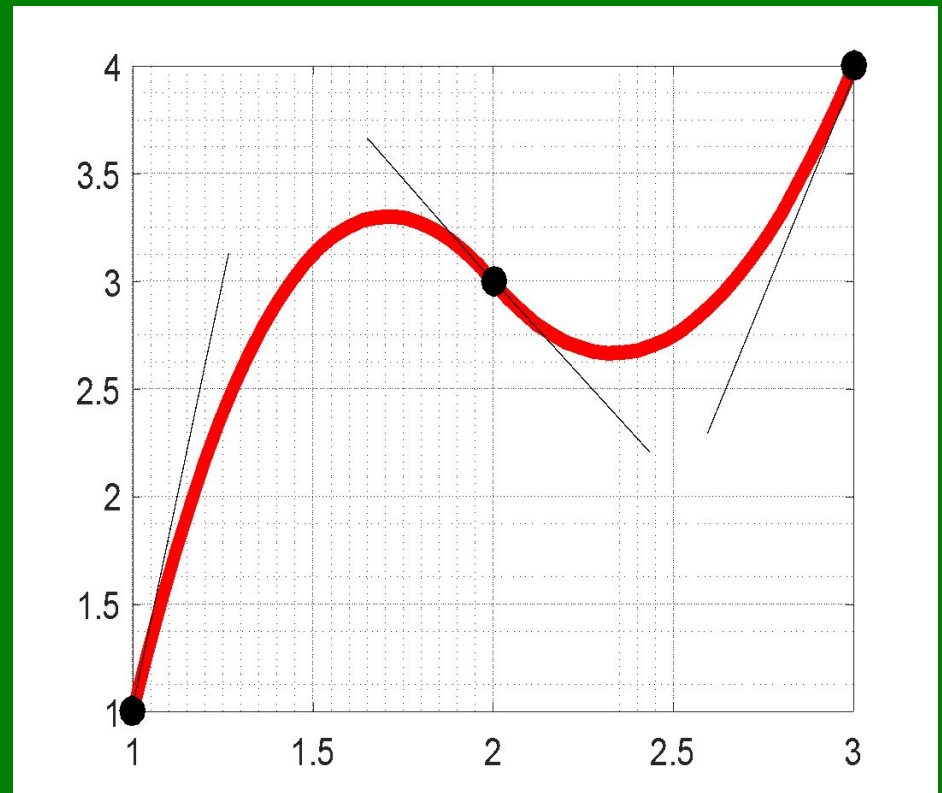
Пример 5. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	4.0

Построить «естественный» сплайн.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



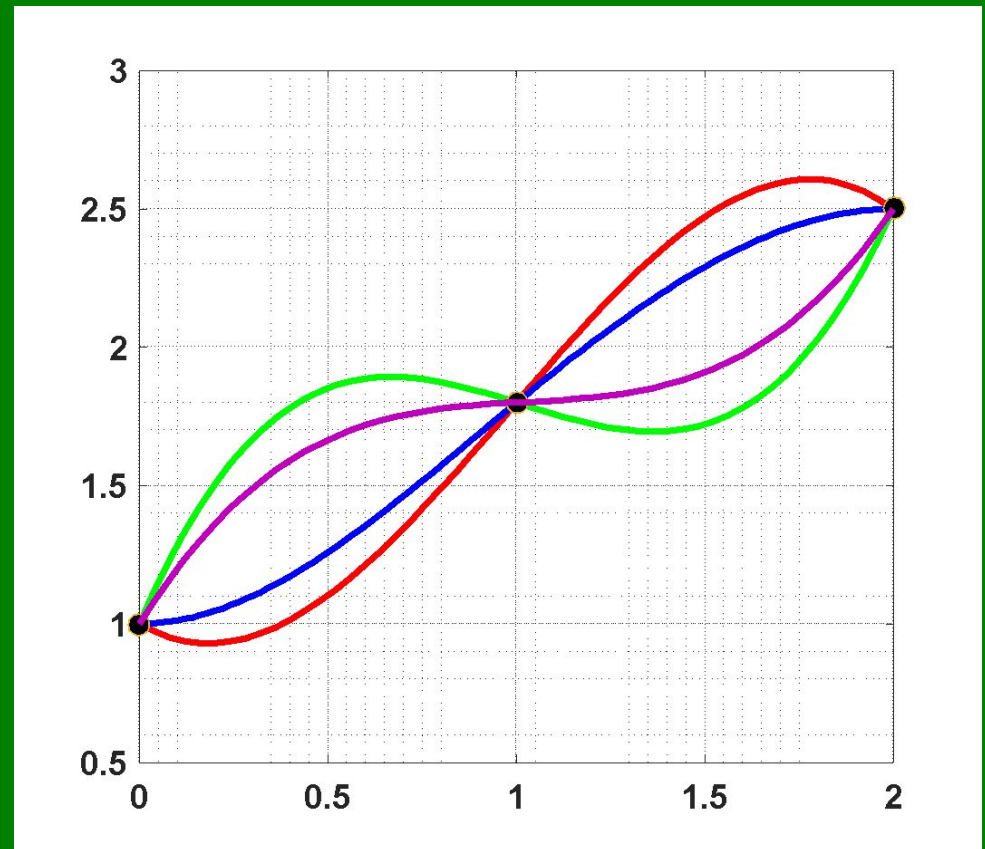
Пример 6. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	5.0

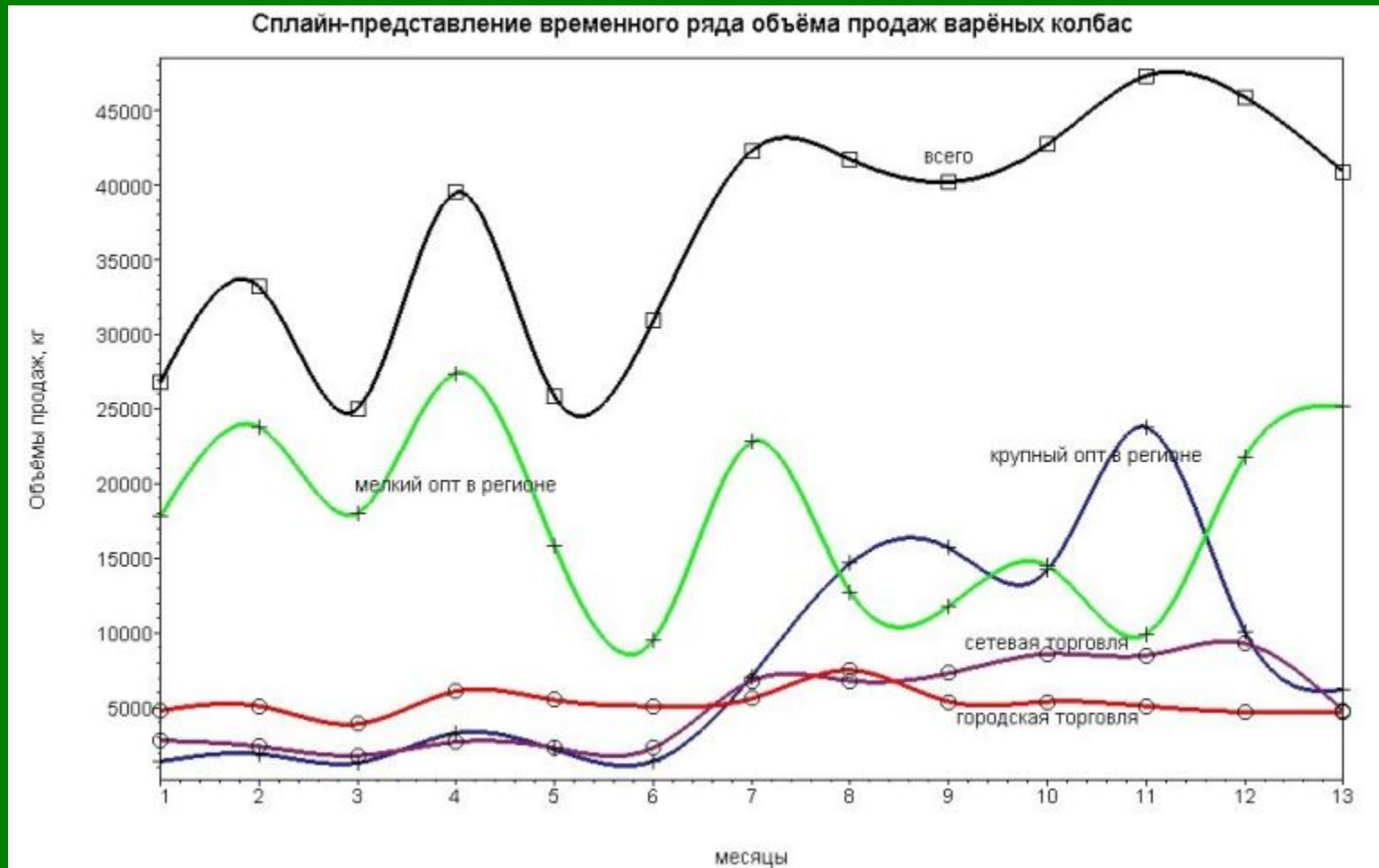
Построить сплайн с условием «отсутствие узла».

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + 6 \\ \alpha \end{pmatrix}$$



Сплайн-технологии экономического анализа. Сплайн-сглаживание



Сплайн-технологии экономического анализа. Фазовый портрет динамики продаж

