Практический семинар по Математической экономике (17.М18-э + 17.М19-э)

Занятие 2

ОБРАБОТКА ДАННЫХ.

Задачи локального и глобального интерполирования.

2018/2019 уч. год

Задача локального интерполирования. Пример

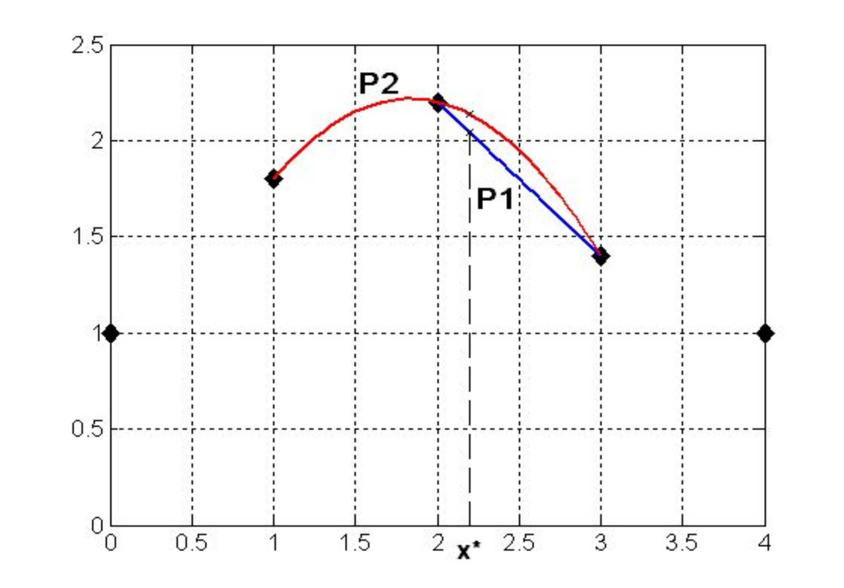
Пусть известны значения функции **y = f (x)** в 5 узлах (т. е. дана интерполяционная задача с **5** узлами):

x	0	1	2	3	4
y	1.0	1.8	2.2	1.4	1.0

Требуется найти полиномы 1-й и 2-й степени, удовлетворяющие условию интерполирования в окрестности точки x*=2.3:

$$P1: \begin{cases} P1(2) = 2.2 \\ P1(3) = 1.4 \end{cases}$$

$$P2: \begin{cases} P2(1) = 1.8 \\ P2(2) = 2.2 \\ P2(3) = 1.4 \end{cases}$$



Постановка задачи. Условие интерполирования

Пусть дана интерполяционная задача с n узлами:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

$, x_i \neq x_j, i, j = 1,2,..,n$

Найти полином степени не выше чем **(n-1)**, удовлетворяющий условию интерполирования:

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} : f(x_i) = y_i$$

$$y_1 = f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1},$$

$$y_2 = f(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = f(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1}.$$

Условие интерполирования

Матричный вид условия интерполирования:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

определитель Вандермонда

Пример решения задачи локального интерполирования

x	0	1	2	3	4
y	1.0	1.8	2.2	1.4	1.0

в окрестности точки x*=2,3

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 2 = 2{,}2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 = 1{,}4 \end{cases}$$

$$a_0 = 3{,}8;\ a_1 = -0{,}8$$

$$P1 = 3{,}8 - 0{,}8x$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 1{,}8 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 2{,}2 \\ a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 = 1{,}4 \end{cases}$$

$$a_0 = 0{,}2;\ a_1 = 2{,}2;\ a_2 = -0{,}6;$$

$$P2 = 0{,}2 + 2{,}2x - 0{,}6x^2$$

Пример 1

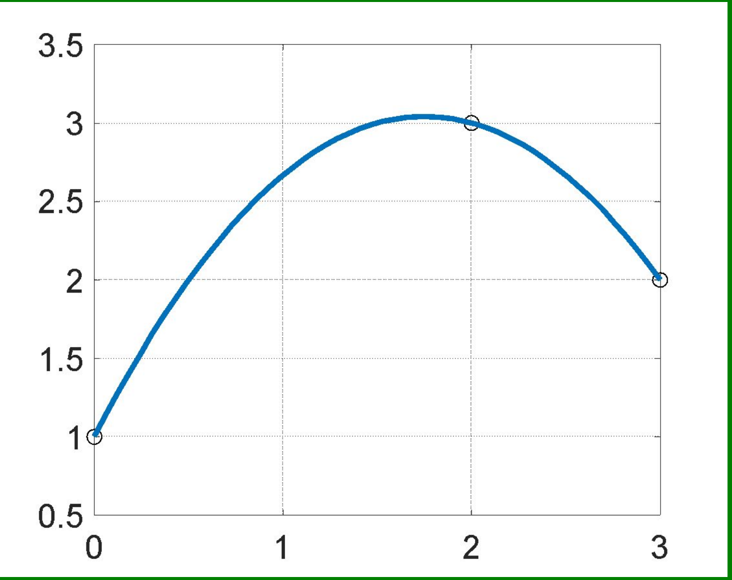
Построить интерполяционный полином по таблице

x	0	2	3
f(x)	1	3	2

$$y_i = f(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c$$

$$c = 1$$
$$4a + 2b + 1 = 3$$
$$9a + 3b + c = 2$$

$$L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1$$



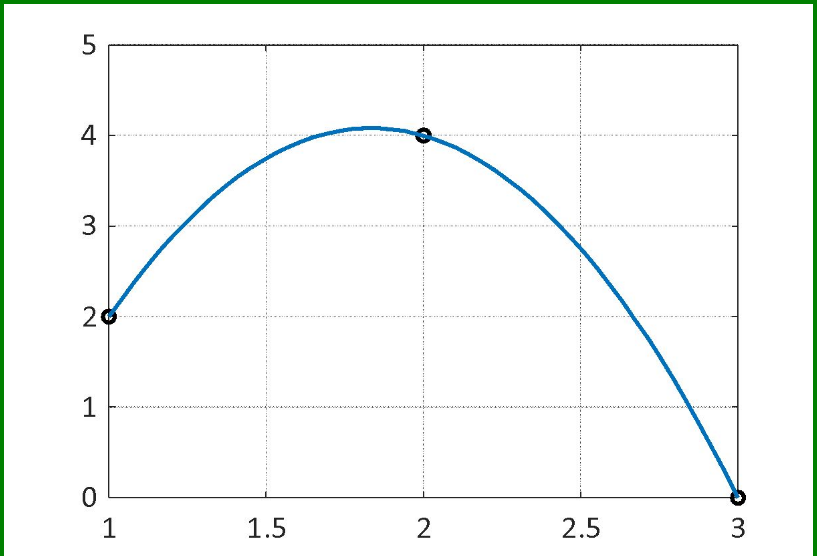
Пример 2

Построить интерполяционный полином по таблице

x	1	2	3
f(x)	2	4	0

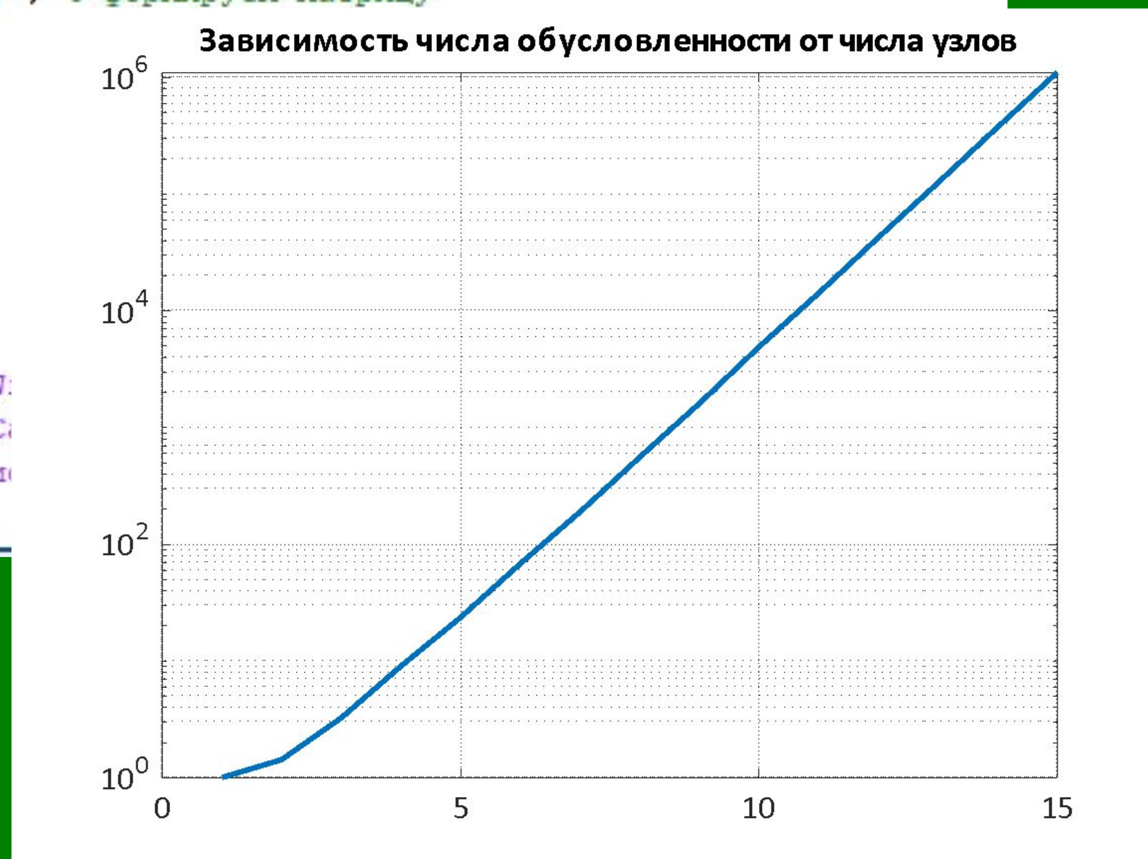
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2(x) = -3\,x^2 + 11\,x - 6$$



Замечание о применимости подхода

```
a=-1; b=1;                  % границы отрезка
N=15;                       % количество узлов
C=[];                       %  массив для записи чисел обусловленности
for n=1:N
    x=linspace(a,b,n)';     % формируем матрицу
    M=[];
    for k=0:n
        M=[M x.^k];
    end
    cc=cond(M);
    C=[C cc];
end
figure
semilogy(1:N,C,'LineW
set(gca,'Fontname','C
title('Зависимость чи
grid
```



Полином Лагранжа

$$P_n(x) = L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i)$$

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}$$

В частности,

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

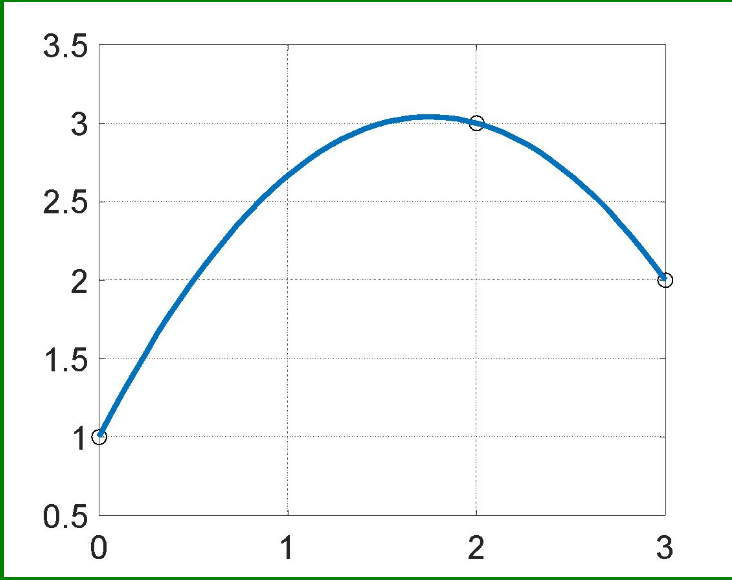
Пример 1а

Построить полином Лагранжа по таблице

x	0	2	3
f(x)	1	3	2

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-2)(-3)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)}{2(-1)} \cdot 3 + \frac{x(x-2)}{3 \cdot 1} \cdot 2 =$$

$$= -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1$$

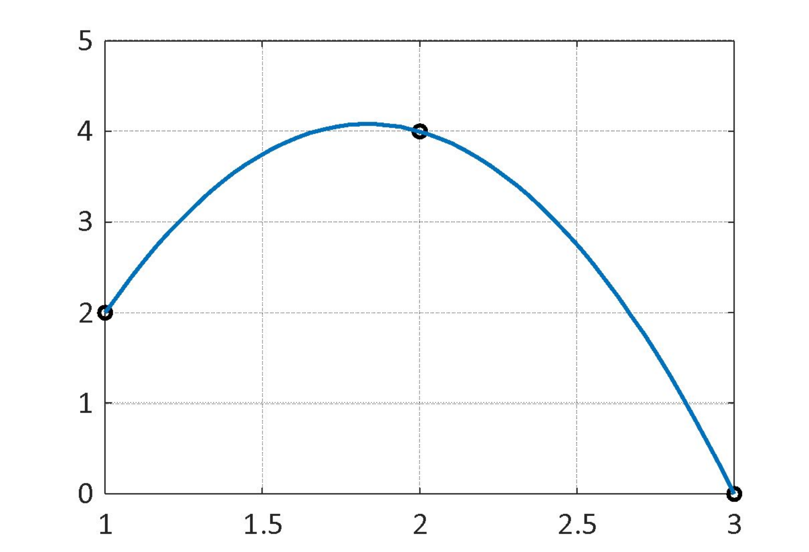


Пример 2а

Построить полином Лагранжа по таблице

x	1	2	3
f(x)	2	4	0

$$L_2(x) = -3\,x^2 + 11\,x - 6$$



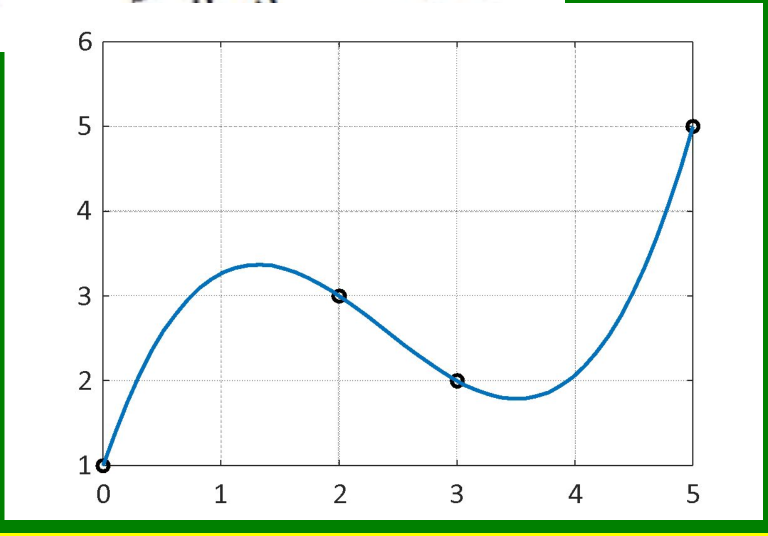
Пример 3

Построить полином Лагранжа по таблице

x	0	2	3	5
f(x)	1	3	2	5

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} \cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(-1)(-3)} \cdot 3 + \\ + \frac{x(x-2)(x-5)}{3 \cdot 1 \cdot (-2)} \cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 5 =$$

$$= \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1$$



Пример 4

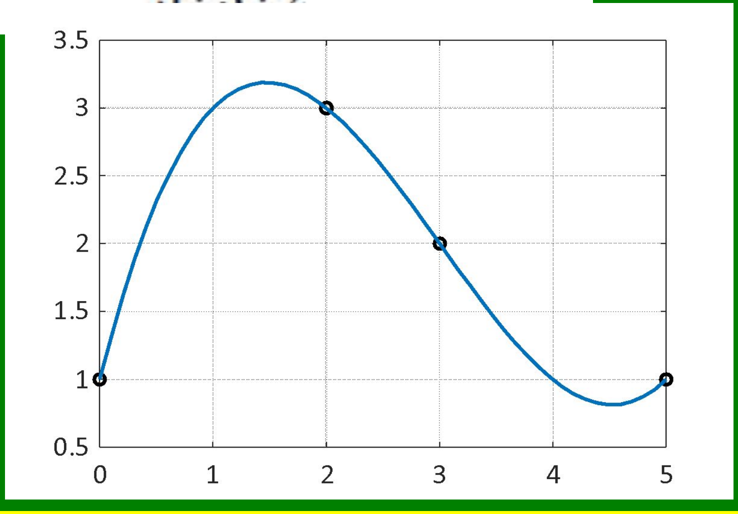
Построить полином Лагранжа по таблице

x	0	2	3	5
f(x)	1	3	2	1

$$L_3(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)}\cdot 1 + \frac{x(x-3)(x-5)}{2(-1)(-3)}\cdot 3 +$$

$$+\frac{x(x-2)(x-5)}{3\cdot 1\cdot(-2)}\cdot 2 + \frac{x(x-2)(x-3)}{5\cdot 3\cdot 2}\cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x + 1$$



Интерполяционный кубический сплайн (ИКС)

Определение

Пусть $\{x_i\}$ - интерполяционная сетка на отрезке [a,b] и (x_i,y_i) - точки данных. Интерполяционным кубическим сплайном называется функция S(x) , обладающая следующими свойствами:

1. Функция S(x) непрерывна на отрезке [a,b] вместе со своими производными S'(x) и S''(x);

2. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ S(x) совпадает с некоторым алгебраическим многочленом третьей степени

$$P_{3,k}(x)=a_0+a_1(x-x_{k-1})+a_2(x-x_{k-1})^2+a_3(x-x_{k-1})^3$$

3. S(x) удовлетворяет условию интерполирования

$$S(x_i) = y_i, \quad i=1, 2,\ldots,n$$

Две формы записи ИКС

$$S(x) \equiv P_k(x) = \sum_{k=0}^{3} a_i^{(k)} (x_k - x)^i =$$

$$a_0^{(k)} + a_1^{(k)} (x_k - x) + a_2^{(k)} (x_k - x)^2 + a_3^{(k)} (x_k - x)^3$$

$$S(x) \equiv P_k(x) = m_{k-1} \frac{(x - x_k)^2 (x - x_{k-1})}{{h_k}^2} + m_k \frac{(x - x_{k-1})^2 (x - x_k)}{{h_k}^2} +$$

$$+ y_{k-1} \frac{(x - x_k)^2 (2(x - x_{k-1}) + h_k)}{{h_k}^3} + y_k \frac{(x - x_{k-1})^2 (2(x_k - x) + h_k)}{{h_k}^3}$$

Величины m_k называются наклонами сплайна

Идея алгоритма построения ИКС

Для непрерывности S''(x) m_k следует выбирать так, чтобы для внутренних узлов сетки выполнялось

$$P''_k(x_k) = P''_{k+1}(x_k),\ k=2,\ldots,N\text{-}1$$

$$P''_k(x_k) = \frac{2m_{k-1}}{h_k} + \frac{4m_k}{h_k} - 6\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k{}^2}\right)$$

$$P''_{k+1}(x_k) = -\frac{2m_{k+1}}{h_{k+1}} + \frac{4m_k}{h_{k+1}} + 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}{}^2}\right)$$

Идея алгоритма построения ИКС

Получим для внутренних узлов сетки

$$h_k^{-1}m_{k-1} + 2\left(h_k^{-1} + h_{k+1}^{-1}\right)m_k + h_{k+1}^{-1}m_{k+1} =$$

$$3\left(h_k^{-2}(y_k - y_{k-1}) + h_{k+1}^{-2}(y_{k+1} - y_k)\right)$$

В частном случае, для равномерной сетки при h=1, уравнения принимают вид

$$\boxed{m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = 3(y_{k+1} - y_{k-1})}$$

k=1,2,...,N-1

Граничные условия «естественный сплайн»

Число уравнений n – 1, число неизвестных n + 1, необходимы два дополнительных условия.

Наиболее популярные варианты:

1) «естественный» сплайн ($S''(a)\ =0,\ S''(b)\ =0$)

$$-\frac{2m_1}{h_1}-\frac{4m_0}{h_1}+6\left(\frac{y_1-y_0}{{h_1}^2}\right)=0$$

$$\frac{2m_{N-1}}{h_N}+\frac{4m_N}{h_N}-6\left(\frac{y_N-y_{N-1}}{{h_N}^2}\right)=0$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом h=1,

$$\boxed{\begin{aligned} m_1+2m_0&=3(y_1-y_0)\\ m_{N-1}+2m_N&=3(y_N-y_{N-1})\end{aligned}}$$

Граничные условия «отсутствие узла»

2) сплайн с условием «отсутствие узла»

$$P'''_1(x_1) = P'''_2(x_1),\ P'''_N(x_{N-1}) = P'''_{N-1}(x_{N-1}),$$

$$2h_1^{-3}\,(y_0 - y_1) + h_1^{-2}\,(m_0 + m_1) = 2h_2^{-3}\,(y_1 - y_2) + h_2^{-2}\,(m_1 + m_2)$$

$$2h_{N-1}^{-3}\,(y_{N-2} - y_{N-1}) + h_{N-1}^{-2}\,(m_{N-2} + m_{N-1}) =$$

$$= 2h_N^{-3}\,(y_{N-1} - y_N) + h_N^{-2}\,(m_{N-1} + m_N)$$

В частном случае, для равномерной сетки с шагом h=1,

$$m_0 - m_2 = 2(2y_1 - y_0 - y_2)$$

$$m_{N-2} - m_N = 2(2y_{N-1} - y_N - y_{N-2})$$

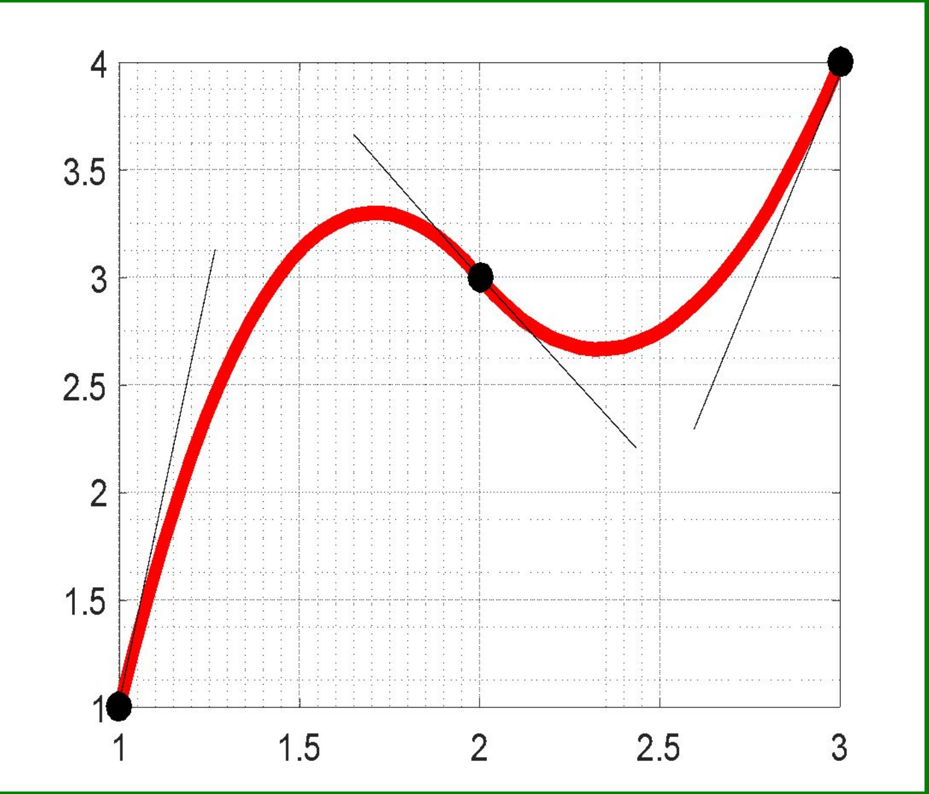
Пример 5. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	4.0

Построить «естественный» сплайн.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



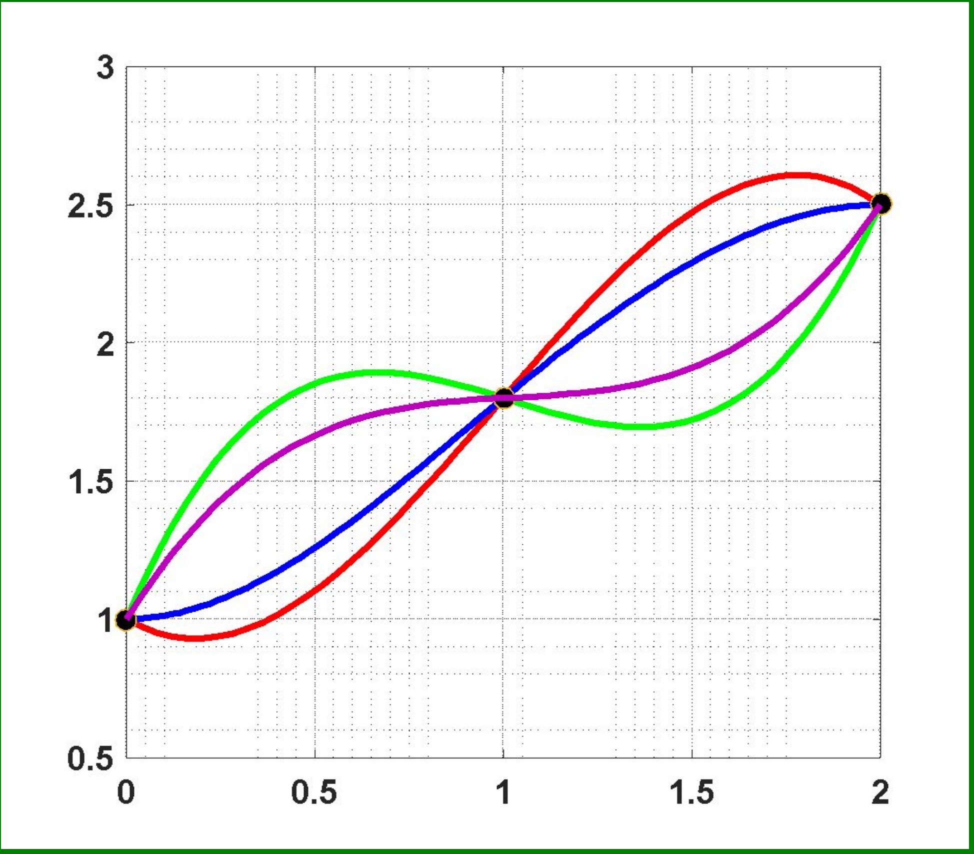
Пример 6. Построение ИКС

x	1	2	3
y	1.0	3.0	5.0

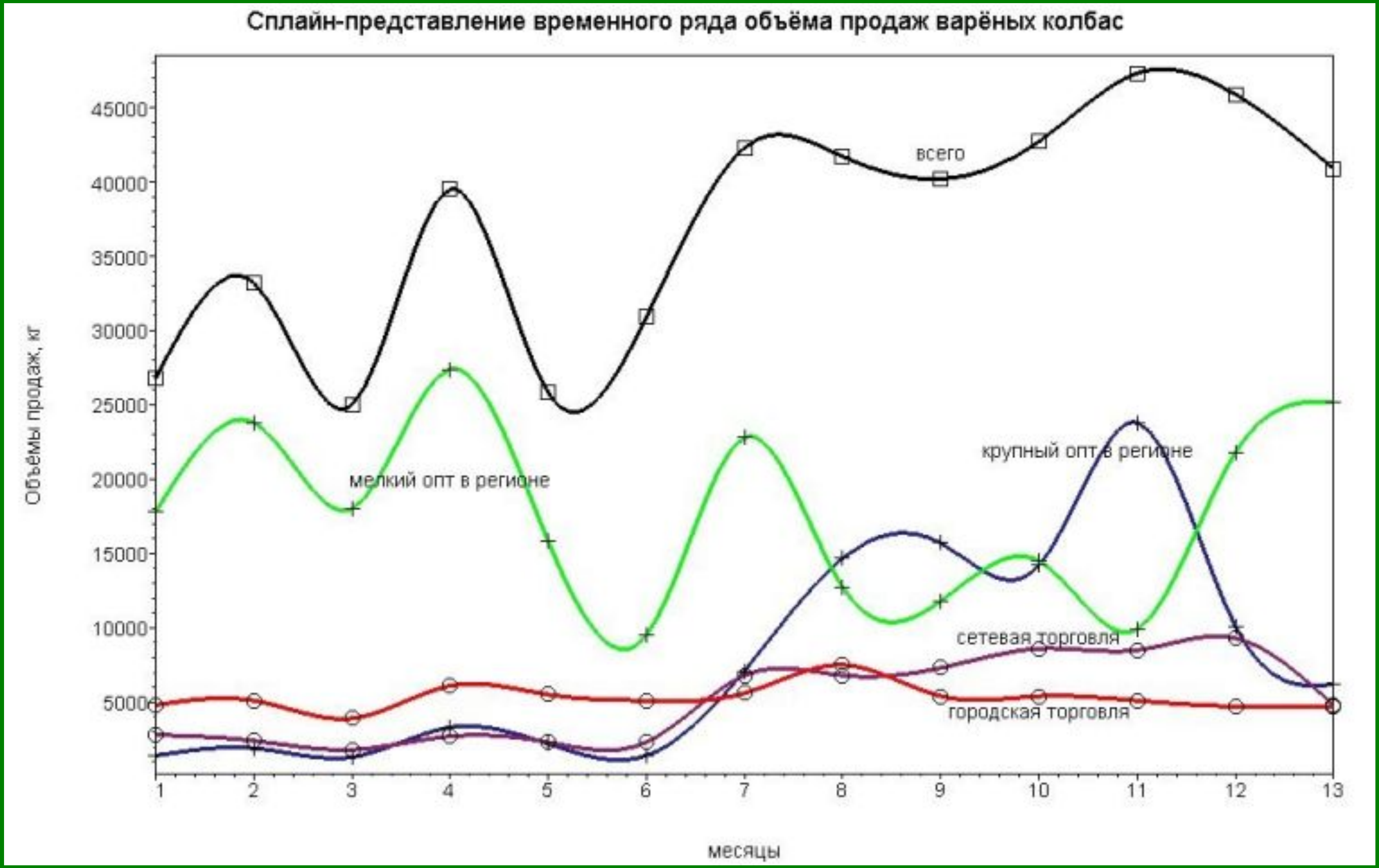
Построить сплайн с условием «отсутствие узла».

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + 6 \\ \alpha \end{pmatrix}$$



Сплайн-технологии экономического анализа. Сплайн-сглаживание



Сплайн-технологии экономического анализа. Фазовый портрет динамики продаж