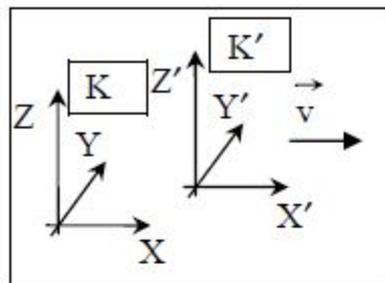
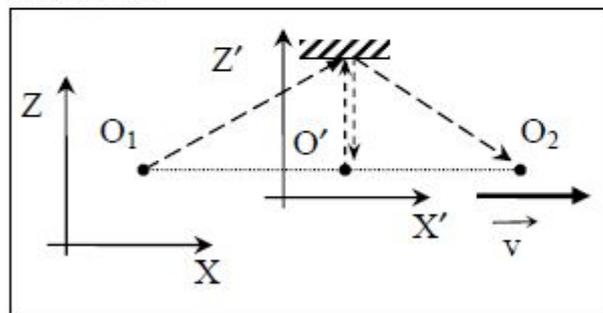


Файл для методической
части



Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' . Пусть система K' поступательно движется вдоль оси X системы K со скоростью v так, что соответствующие оси обеих систем остаются параллельными друг другу.

Так как при малых скоростях поперечные координаты тел во всех инерциальных системах отсчета одинаковы, то это должно выполняться и при релятивистских скоростях. Действительно, если рассмотреть последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся в одном направлении, значение скоростей которых возрастает на небольшую величину при переходе от одной системы к другой, то получим, что при любых попарных сравнениях всегда поперечные размеры не меняются.



В системе K' рассмотрим сигнал, пущенный вдоль оси Z' из точки O' . Пусть этот сигнал отразившись от покоящегося в этой системе отсчета зеркала вернется обратно в точку O' . Если расстояние между точкой O' и зеркалом равно S , то по собственным часам системы K' пройдет промежуток времени $\Delta t' = \frac{2S}{c}$. Расстояние

вдоль вертикальной оси в обеих системах одинаковое.

Скорость светового сигнала тоже одинаковая. Так как точка O' движется относительно системы K , то в этой системе отсчета сигнал будет испущен в точке O_1 и принят в точке O_2 . Поэтому по собственным часам системы K промежуток времени надо определить из равенства

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{S^2 + \left(v \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)^2}}{c}. \text{ Откуда } \Delta t = \frac{2S}{\sqrt{(c)^2 - (v)^2}}. \text{ Поэтому } \frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{2S}{c} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{2S} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \text{ Таким}$$

образом, промежутки времени в обеих системах отсчёта связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Пусть в подвижной системе отсчёта K' параллельно оси X' расположен стержень длиной L_0 . При движении этого стержня со скоростью V вдоль оси X неподвижной системы K он пройдет неподвижные часы за время $\Delta t_0 = \frac{L}{V}$. В системе K' эти же часы пролетят стержень за время

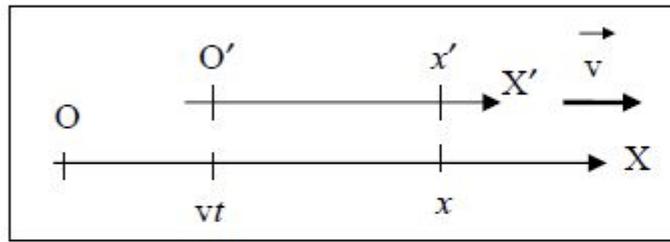
$\Delta t = \frac{L_0}{V}$. Так как часы движутся со скоростью V , то их показания в неподвижной системе отсчёта связаны с показаниями в подвижной системе $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Откуда получаем

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ или}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Таким образом, понятие длины является *относительным*. Однако, уменьшение длины – это кинематический эффект, поэтому в теле не возникает никаких деформаций.

Закон преобразования координат



Так как координата – это расстояние вдоль координатной оси от нулевой точки, то координате x' в движущейся системе K' соответствует отрезок $O'x'$, длина которого $|x'|$. Поэтому в системе K ему соответствует длина $|x'| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. В системе K координата

та точки O' равна vt , поэтому $|x'| \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = |x - vt|$. В координатной записи справедливо равенст-

во $x = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + vt$ или

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Но системы отсчета K и K' равноправны. Поэтому можно считать, что система K движется относительно K' в противоположном направлении оси X' со скоростью $-v$. Поэтому $x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Используя эти формулы, найдем формулы преобразования для времени

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt' - vt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad x' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = x' + vt' - vt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$vt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = x' \frac{v^2}{c^2} + vt', \quad \text{откуда}$$

$$t = \frac{\frac{v}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогично,

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Окончательно формулы преобразования координат и времени при переходе от одной системы отсчета к другой в данном случае движения имеют вид:

$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Таким образом, в СТО время является координатой. Т.е. положение точки задается 4-мя координатами (t, x, y, z) . Это 4х мерное пространство называется *мировым пространством*.

Каждая точка мирового пространства называется *мировой точкой*. Траектория точки в мировом пространстве называется *мировой линией*. Например, если точка покоится в обычном 3х мерном пространстве, то её мировой линией является прямая, параллельная оси t .

Интервалом между двумя событиями (мировыми точками) в СТО называется величина, квадрат которой определяется соотношением

$$s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2].$$

Найдем квадрат интервал между двумя событиями в системе K' :

$$s'^2 = c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2]$$

$$s'^2 = c^2 \left[\frac{t_2 - t_1 - \left(\frac{v}{c}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]^2 - \left[\left[\frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right]^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right]$$

$$s'^2 = \left(\frac{(c+v)(t_2-t_1) - \left(1 + \left(\frac{v}{c}\right)\right)(x_2-x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \left(\frac{(c-v)(t_2-t_1) + \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)\right)(x_2-x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$

$$s'^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - [(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2] = s^2$$

Получается, что величина интервала не зависит от системы отсчета. Как принято говорить, интервал является *инвариантной* величиной $s'^2 = inv$.

При преобразованиях Галилея время абсолютно, поэтому инвариантность интервала эквивалентна сохранению расстояния между двумя точками в обычном трехмерном пространстве при переходе от одной системы отсчета к другой. *Поэтому интервал в СТО является аналогом расстояния между двумя мировыми точками.*

Интервал называется *временеподобным*, если $s^2 > 0$ и *пространственноподобным*, если $s^2 < 0$. Для светового луча всегда $s^2 = 0$, что равносильно уравнению

$$c^2(t_2-t_1)^2 - [(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2] = 0,$$

определяющую в обычном трехмерном пространстве расширяющуюся с течением времени сферу $(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = R^2$, квадрат радиуса которой $R^2 = c^2(t_2-t_1)^2$.

Поверхность в *мировом* пространстве, для которой $s^2 = 0$ называется *световым конусом*. Световой конус можно задать для любой точки пространства. Если два события как две мировые точки связаны *временеподобным* интервалом, то одна из этих точек лежит внутри светового конуса другой точки и существует такая трехмерная система отсчета, в которой два события, соответствующие этим мировым точкам, произошли *в одном месте, но в разное время*.

И наоборот, если два события как две мировые точки связаны пространственноподобным интервалом, т.е. ни одна из этих точек не лежит внутри светового конуса другой точки, то существует такая трехмерная система отсчета, в которой эти два события произошли *одновременно, но в разных точках*.

Если между двумя событиями можно установить причинно-следственную связь, то есть можно сказать, что одно событие является причиной другого, тогда мировые точки, соответствующие этим событиям *должны* быть связаны времениподобным интервалом.

Преобразование скорости.

Пусть точка движется в системе отсчета К вдоль оси X со скоростью v_x . Найдем ее скорость в системе К'. Используем формулы для преобразования координат и времени

$$dt' = \frac{dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} (dx - v dt)}{\left(dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx\right) \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) v_x} \Rightarrow v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) v_x}.$$

Пусть точка движется в системе отсчета К вдоль оси Y со скоростью v_y . Тогда ее скорость в

системе К':
$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\left(dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{\left(1 - \left(\frac{v}{c^2}\right) \frac{dx}{dt}\right)} = v_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Rightarrow v'_y = v_y \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$