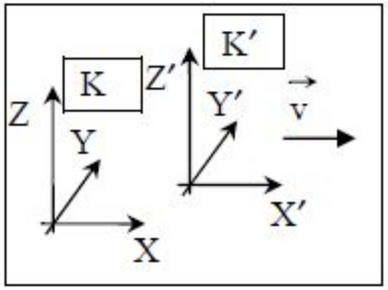
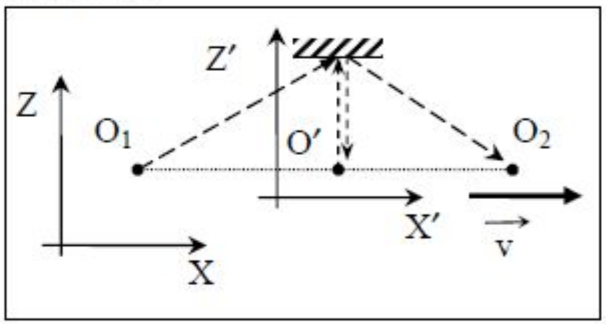
Файл для методической части

c



Рассмотрим две инерциальные системы отсчета К и К′. Пусть система К′ поступательно движется вдоль оси X системы К со скоростью v так, что соответствующие оси обеих систем остаются параллельными друг другу.

Так как при малых скоростях поперечные координаты тел во всех инерциальных системах отсчета одинаковы, то это должно выполняться и при релятивистских скоростях. Действительно, если рассмотреть последовательность инерциальных систем отсчета, движущихся в одном направлении, значение скоростей которых возрастает на небольшую величину при переходе от одной системы к другой, то получим, что при любых попарных сравнениях всегда поперечные размеры не меняются.



В системе К′ рассмотрим сигнал, пущенный вдоль оси Z' из точки О′. Пусть этот сигнал отразившись от покоящегося в этой системе отсчета зеркала вернется обратно в точку О′. Если расстояние между точкой О′ и зеркалом равно S, то по собственным часам системы К′ пройдет промежуток времени $\Delta t' = \dfrac{2S}{c}$. Расстояние вдоль вертикальной оси в обеих системах одинаковое. Скорость светового сигнала тоже одинаковая. Так как точка О′ движется относительно системы К, то в этой системе отсчета сигнал будет испущен в точке O_1 и принят в точке O_2. Поэтому по собственным часам системы К промежуток времени надо определить из равенства

$\Delta t = \dfrac{2\sqrt{S^2 + \left(\mathrm{v}\cdot\dfrac{\Delta t}{2}\right)^2}}{c}$. Откуда $\Delta t = \dfrac{2S}{\sqrt{(c)^2 - (\mathrm{v})^2}}$. Поэтому $\dfrac{\Delta t'}{\Delta t} = \dfrac{2S}{c}\dfrac{\sqrt{c^2 - \mathrm{v}^2}}{2S} = \sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$. Таким образом, промежутки времени в обеих системах отсчёта связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}.$$

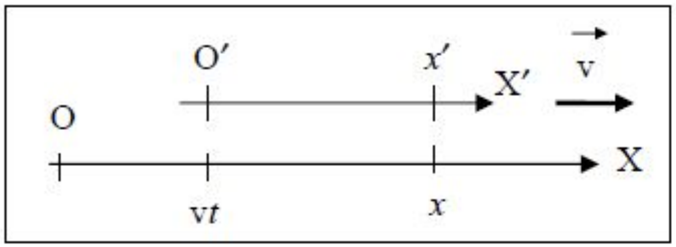
Пусть в подвижной системе отсчета K′ параллельно оси X′ расположен стержень длиной L_0. При движении этого стержня со скоростью V вдоль оси X неподвижной системы K он пройдет неподвижные часы за время $\Delta t_0 = \dfrac{L}{\mathrm{V}}$. В системе K′ эти же часы пролетят стержень за время $\Delta t = \dfrac{L_0}{\mathrm{V}}$. Так как часы движутся со скоростью V, то их показания в неподвижной системе отсчета связаны с показаниями в подвижной системе $\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}$. Откуда получаем

$\dfrac{L}{L_0} = \dfrac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1 - \dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}}$ или

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,.$$

Таким образом, понятие длины является *относительным*. Однако, уменьшение длины – это кинематический эффект, поэтому в теле не возникает никаких деформаций.

Закон преобразования координат



Так как координата – это расстояние вдоль координатной оси от нулевой точки, то координате x' в движущейся системе К′ соответствует отрезок $O'x'$, длина которого $|x'|$. Поэтому в системе К ему соответствует длина $|x'|\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. В системе К координата точки О′ равна vt, поэтому $|x'|\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = |x - vt|$. В координатной записи справедливо равенство $x = x'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + vt$ или

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Но системы отсчета К и К′ равноправны. Поэтому можно считать, что система К движется относительно К′ в противоположном направлении оси X′ со скоростью -v. Поэтому $x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Используя эти формулы, найдем формулы преобразования для времени

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x' + vt' - vt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v^2}{c^2}},\quad x'\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = x' + vt' - vt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$vt\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = x'\dfrac{v^2}{c^2} + vt'$, откуда

$$t = \frac{\dfrac{v}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Аналогично,

$$t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Окончательно формулы преобразования координат и времени при переходе от одной системы отсчета к другой в данном случае движения имеют вид:

$$t' = \frac{t - \left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)x}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - \mathrm{v}t}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}},$$

$$y' = y, \qquad z' = z.$$

Таким образом, в СТО время является координатой. Т.е. положение точки задается 4-мя координатами (t, x, y, z). Это 4х мерное пространство называется *мировым пространством*.

Каждая точка мирового пространства называется *мировой точкой*. Траектория точки в мировом пространстве называется *мировой линией*. Например, если точка покоится в обычном 3х мерном пространстве, то её мировой линией является прямая, параллельная оси t.

Интервалом между двумя событиями (мировыми точками) в СТО называется величина, квадрат которой определяется соотношением

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right].$$

Найдем квадрат интервал между двумя событиями в системе К$'$:

$$s'^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 - \left[(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2\right]$$

$$s'^2 = c^2\left(\frac{t_2 - t_1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}\right)^2 - \left[\left(\frac{x_2 - x_1 - \mathrm{v}(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}\right)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]$$

$$s'^2 = \left(\frac{(c+\mathrm{v})(t_2-t_1) - \left(1+\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\right)(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}} \right) \left(\frac{(c-\mathrm{v})(t_2-t_1) + \left(1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)\right)(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}} \right) - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2$$

$$s'^2 = c^2(t_2-t_1)^2 - \left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right] = s^2$$

Получается, что величина интервала не зависит от системы отсчета. Как принято говорить, интервал является *инвариантной* величиной $s'^2 = inv$.

При преобразованиях Галилея время абсолютно, поэтому инвариантность интервала эквивалентна сохранению расстояния между двумя точками в обычном трехмерном пространстве при переходе от одной системы отсчета к другой. *Поэтому интервал в СТО является аналогом расстояния между двумя мировыми точками.*

Интервал называется *времениподобным*, если $s^2 > 0$ и *пространственноподобным*, если $s^2 < 0$. Для светового луча всегда $s^2 = 0$, что равносильно уравнению

$$c^2(t_2-t_1)^2 - \left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right] = 0,$$

определяющую в обычном трехмерном пространстве расширяющуюся с течением времени сферу $(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = R^2$, квадрат радиуса которой $R^2 = c^2(t_2-t_1)^2$.

Поверхность в *мировом* пространстве, для которой $s^2 = 0$ называется *световым конусом.* Световой конус можно задать для любой точки пространства. Если два события как две мировые точки связаны времениподобным интервалом, то одна из этих точек лежит внутри светового конуса другой точки и существует такая трехмерная система отсчета, в которой два события, соответствующие этим мировым точкам, произошли *в одном месте*, но *в разное время*.

И наоборот, если два события как две мировые точки связаны пространственноподобным интервалом, т.е. ни одна из этих точек не лежит внутри светового конуса другой точки, то существует такая трехмерная система отсчета, в которой эти два события произошли *одновременно*, но *в разных точках*.

Если между двумя событиями можно установить причинно-следственную связь, то есть можно сказать, что одно событие является причиной другого, тогда мировые точки, соответствующие этим событиям *должны* быть связаны времениподобным интервалом.

Преобразование скорости.

Пусть точка движется в системе отсчета K вдоль оси X со скоростью v_x. Найдем ее скорость в системе K′. Используем формулы для преобразования координат и времени

$$dt' = \frac{dt - \left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}},\ dx' = \frac{dx - \mathrm{v}dt}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}\,(dx - \mathrm{v}dt)}{\left(dt - \left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)dx\right)\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}} = \frac{\frac{dx}{dt} - \mathrm{v}}{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - \mathrm{v}}{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)v_x} \Rightarrow v'_x = \frac{v_x - \mathrm{v}}{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)v_x}.$$

Пусть точка движется в системе отсчета K вдоль оси Y со скоростью v_y. Тогда ее скорость в системе K′: $v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}{\left(dt - \left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}}{\left(1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c^2}\right)\frac{dx}{dt}\right)} = v_y\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2} \Rightarrow v'_y = v_y\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}$.