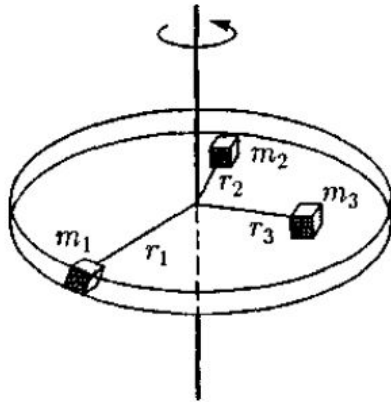


Динамика вращения.

Закон динамики вращения

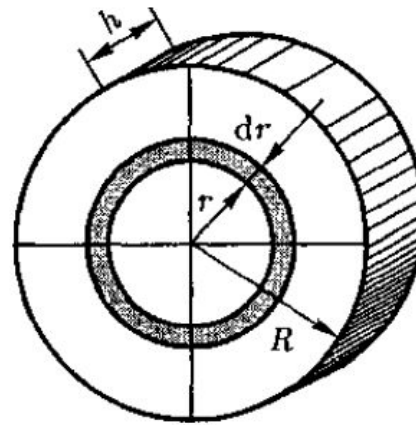
Основные понятия

- Момент инерции



$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

$$J = \int r^2 dm,$$



$$dJ = r^2 dm$$

$$2\pi r h dr$$




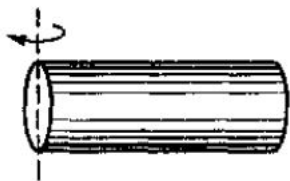
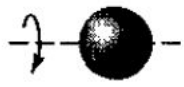
$$dm = 2\pi r h \rho dr$$

$$dJ = 2\pi h \rho r^3 dr.$$

$$J = \int dJ = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi h R^4 \rho,$$

$$J = \frac{1}{2} m R^2.$$

Моменты инерции тел

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии 	$J = mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии 	$J = \frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину 	$J = \frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец 	$J = \frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара 	$J = \frac{2}{5}mR^2$

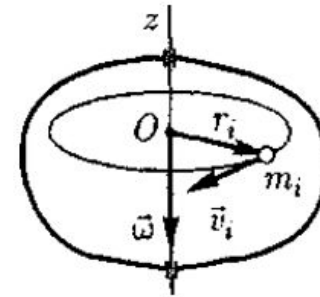
Теорема Штейнера. Кинетическая энергия вращения

- Теорема Штейнера $J = J_C + ma^2$.

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}.$$

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$



$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

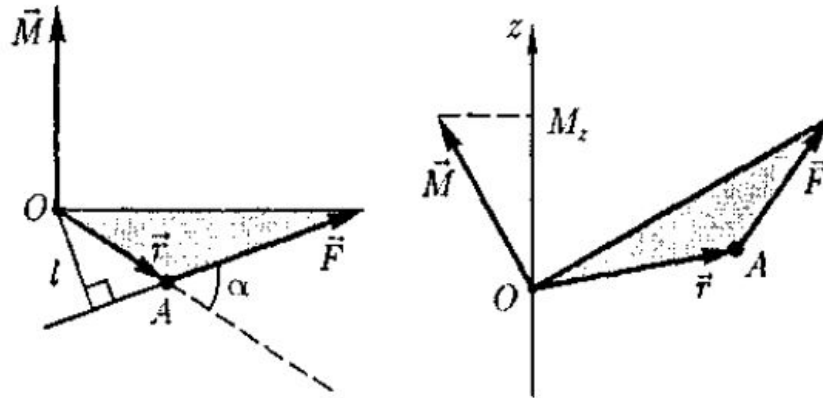
$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2}.$$

Момент силы

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}],$$

$$M = Fr \sin \alpha = Fl,$$

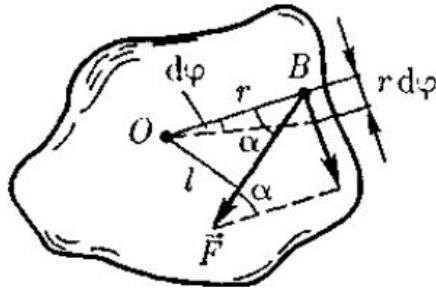


Момент силы относительно оси

$$\vec{M}_z = [\vec{r} \vec{F}]_z.$$

Закон динамики вращения твёрдого тела

- Работа
-



$$dA = F \sin \alpha r d\varphi.$$

$$dA = M_z d\varphi,$$

$$dA = dT,$$

$$dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega,$$

$$M_z d\varphi = J_z \omega d\omega,$$

$$M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon$$

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon},$$

Закон сохранения момента импульса

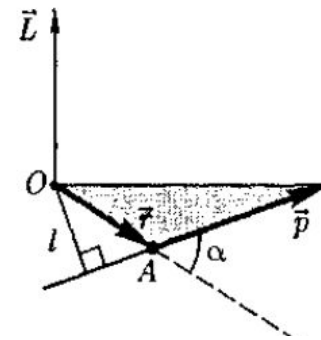
$$L = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}],$$

$$L = rp \sin \alpha = mvr \sin \alpha = vl.$$

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \quad L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i.$$

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega,$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad M = 0 \quad L = \text{const.}$$



$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Таблица соответствия величин

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	\vec{F}	Момент силы	M_z или \vec{M}
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a};$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon;$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{J_z\omega^2}{2}$