



ВОЛГОГРАДСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ



**ИНСТИТУТ  
МАТЕМАТИКИ И  
ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ**



ВОЛГОГРАДСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ



# КОМБИНАТОРИКА



## Контакты.

Зенович Андрей Васильевич.

Почта [zenovich\\_av@volsu.ru](mailto:zenovich_av@volsu.ru)

Группа в контакте <https://vk.com/public201279088>

Телефон 8-960-873-81-93



## Комбинаторные задачи. Задача 1.

В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?



## Комбинаторные задачи. Задача 1. Решение.

В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ.  $C_7^2 + 2C_7^3$



## Комбинаторные задачи. Задача 2.

Было семь ящиков. В некоторые из них положили еще по семь ящиков (не вложенных друг в друга) и т. д. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?



## Комбинаторные задачи. Задача 2. Решение.

Было семь пустых ящиков. В некоторые из них положили еще по семь ящиков (не вложенных друг в друга) и т. д. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?

При каждой операции заполняется один пустой ящик. Поскольку стало 10 непустых ящиков, то было проведено 10 операций. При каждой операции добавлялось по семь ящиков. Поэтому в результате стало  $7 + 10 \cdot 7 = 77$  ящиков.



## Комбинаторные задачи. Задача 3.

В строку выписаны 40 знаков: 20 крестиков и 20 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно добиться того, чтобы какие-то 20 стоящих подряд знаков оказались крестиками?





## Комбинаторные задачи. Задача 3. Решение.

Для того чтобы 20 крестиков стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все нолики стояли с краев (возможно, все с одного края).

*Оценка.* Выберем самый правый и самый левый нолики. Для того чтобы один из них оказался с краю, требуется не более 10 ходов, так как либо слева от самого левого, либо справа от самого правого нолика стоит не более, чем 10 крестиков.

Далее, возьмём самый правый и самый левый нолик из оставшихся 19. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 10 ходов, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более  $20 \cdot 10 = 200$  ходов.



## Комбинаторные задачи. Задача 3. Решение.

Пример. Пусть в ряд стоят 10 крестиков, затем 20 ноликов, а затем еще 10 крестиков. В этом случае для перемещения каждого нолика к краю потребуется ровно 10 ходов.



## Комбинаторные задачи. Задача 4.

В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.



## Комбинаторные задачи. Задача 4. Решение.

Ответ.  $2^{14} - 2^7$ .

Пример. Делаем словами все наборы из  $\geq 7$  букв.

Оценка. Всего последовательностей  $2^{14} - 2$ .

Если нет ни одного 7-буквенного слова, то общее количество слов не превосходит  $2^{14} - 2 - 2^7 < 2^{14} - 2^7$ .

Пусть есть слово из 7 букв  $s$ . Тогда для каждого слова  $t$ , состоящего из 6 или менее букв,  $st$  не будет словом.

Все последовательности вида  $st$  различны. То есть, если в языке есть  $k$  слов из 6 или менее букв, то количество слов из хотя бы 7 букв  $\leq (2^7 + \dots + 2^{13}) - k = 2^{14} - 2^7 - k$ .

Общее количество слов не превосходит  $k + (2^{14} - 2^7 - k) = 2^{14} - 2^7$ , что и требовалось доказать.



## Комбинаторные задачи. Задача 5.

На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?



## Комбинаторные задачи. Задача 5. Решение.

Ответ. 33.

Пусть на вечере было  $p$  супружеских пар и  $d$  детей ( $d \leq 10p$ ). Каждый ребёнок был в  $(p - 1)(p - 2)$  тройках. Всего троек  $d \cdot (p - 1)(p - 2) = 3630$ . Поскольку  $d \leq 10p$ , получим  $3630 \leq 10p^3$ . Отсюда  $p \geq 8$ . Далее, число  $3630 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 121$  имеет два делителя  $p - 1$  и  $p - 2$ , отличающиеся на 1. Эти делители 10 и 11; тогда  $p - 2 = 10$ ,  $p - 1 = 11$  и  $d = 3630/110 = 33$ .



## Комбинаторные задачи. Задача 6.

На доске написано число 2019  $n$  раз подряд:  
20192019...2019.

Вася стирает цифры с доски до тех пор, пока на доске не останется одно число 2019.

Сколькими способами Вася может стереть цифры?



## Комбинаторные задачи. Задача 6. Решение.

Разобьем число на  $n$  блоков по 2019.

2019 2019... 2019.

1 блок 2 блок...  $n$ -й блок. Возможны 4 случая.

1. Оставшееся после стирания число 2019 лежит в одном блоке –  $n$  способов.
2. Оставшееся число 2019 распределено по четырем блокам –  $C_n^4$  способа выбрать блоки.
3. Оставшееся число 2019 распределено по двум блокам –  $C_n^2$  способа выбрать блоки, 3 варианта расположить число в блоках.
4. Оставшееся число 2019 распределено по двум блокам –  $C_n^3$  способа выбрать блоки, 3 варианта расположить число в блоках

Ответ.  $n + 3 * C_n^2 + 3 * C_n^3 + C_n^4$





## Комбинаторные задачи. Задача 7.

В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку.

Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.



## Комбинаторные задачи. Задача 8.

55 друзей одновременно узнали 55 новостей, причём каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями.

Каждый разговор длится 1 час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей.

Через какое количество часов все узнают все новости?



# Координаты ИМИТ в Интернете



Web-site: **[mf.volsu.ru](http://mf.volsu.ru)**



Социальная сеть Вконтакте:

**[vk.com/fmit\\_abiturient](https://vk.com/fmit_abiturient)**



E-mail: **[math@volsu.ru](mailto:math@volsu.ru)**



ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ  
И ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ

**Спасибо за  
внимание!**