

Предмет
вычислительной
математики
Численные методы.

В настоящее время в науке и инженерной практике широко используется метод математического моделирования.

Математическим моделированием называется изучение реального объекта на ЭВМ с помощью математической модели этого объекта.

Сущность процесса моделирования



Сложные модели описывают объект точнее (*адекватнее*).

Математическое моделирование позволило исследовать на ЭВМ очень сложные процессы, такие, например, как глобальные климатические изменения в результате применения ядерного оружия (натурный эксперимент имеет катастрофические последствия).

В литературе математическое моделирование часто принято называть ***вычислительным экспериментом***.

Основные этапы математического моделирования:

- Разработка модели – **формализация**. Изучается в прикладных и фундаментальных науках.
- Разработка метода (алгоритма) решения уравнения модели – **алгоритмизация**. Изучается в вычислительной математике.
- Создание программы – **программирование**. Изучается в информатике.
- Расчеты, анализ результатов – **практическое использование**.



Предметом вычислительной математики являются численные методы (алгоритмы) решения математических задач, возникающих при исследовании реальных объектов методом математического моделирования.

Например, пусть нужно найти R из уравнения (1.2) или (1.4), v из уравнения (1.3) или s из уравнения (1.5). Что общего в этих задачах? То, что нужно решить уравнение вида:

$$\underline{x^2} = a \quad (1.6)$$

Вычислительная математика не рассматривает решения конкретных задач (1.2÷1.5), а изучает их решение в общем, абстрактном виде (1.6).

С точки зрения обычной математики точное решение уравнения (1.6) имеет вид:

$$x_{1,2}^* = \pm \sqrt{a} ,$$

причем если $\underline{a} > 0$, то два вещественных решения;

если $\underline{a} = 0$, то тривиальное решение $x_1^* = x_2^* = 0$;

если $\underline{a} < 0$, то вещественных решений нет.

Но знак $\sqrt{\quad}$ не решает задачу, так как не дает практического способа (алгоритма) вычисления значения \underline{x} для конкретного значения a .

Вычислительная математика предлагает следующий алгоритм вычис-

вычисления x^* :

1. Выбрать начальное значение x_0 , например $x_0 = a$. Это начальное приближение решения.
2. Вычислять новые приближения решения x_i по формуле:

$$x_i = \frac{1}{2} \left(x_{i-1} + \frac{a}{x_{i-1}} \right) \quad (1.7)$$

до достижения условия:

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \varepsilon \quad (1.8)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots$ – номер вычисления - *итерации*.
 ε – требуемая точность.

Пример. Нужно решить уравнение $x^2 - 3 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.
 Зададимся $x_0 = a = 3$,

Вычислим первое приближение: $x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{3}{3} \right) = 2$,

оценим точность $|x_1 - x_0| = |2 - 3| = 1 \geq \varepsilon$. Требуемая точность не достигнута, нужно продолжить расчет.

Вычислим второе приближение: $x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = 1,75 = \frac{7}{4}$,

оценим точность $|1,75 - 2| = 0,25 > \varepsilon$.

Вычислим третье приближение: $x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7} \right) = 1,7321$,

оценим точность $|1,7321 - 1,75| = 0,0179 > \varepsilon$.

Вычислим четвертое приближение: $x_4 = 1,73205$,

оценим точность $|1,73205 - 1,7321| = 0,00005 < \varepsilon$ – точность достигнута.

Ответ: $x_{1,2} = +1,73205$.

Рассмотренный пример демонстрирует принципы, общие для итерационных методов решения задач вычислительной математики:

1. Исходная задача (1.6) заменяется другой задачей – вычислительным алгоритмом по формулам (1.7), (1.8), где используются только арифметические операции $+ - */$. Принято называть (1.7) *формулой итерационного процесса (итерационным процессом)*, (1.8) - *условием завершения итерационного процесса*.
2. Задача (1.7) содержит новый параметр i – *номер итерации*. Очевидно, что **число итераций** влияет на **точность** решения.

Если $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x^* = \pm \sqrt{a}$, то итерационный процесс является *сходящимся* – позволяет получить решение исходной задачи (1.6).

3. Решение, полученное итерационным методом, всегда является **приближенным**, так как точное решение получить невозможно – нужны бесконечные вычисления.

Важно подчеркнуть, что формула (1.7) получена из (1.6) путём **тождественных преобразований**:

$$x^2 - a = 0 \stackrel{*(-1)}{\Leftrightarrow} a - x^2 = 0 \stackrel{+2x^2}{\Leftrightarrow} a + x^2 = 2x^2 \stackrel{:2x}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

Но не всякое тождественное преобразование позволяет получить сходящийся итерационный процесс.

Например:

а) $x^2 - a = 0 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \frac{a}{x}$,

Выполним расчет при $a=3$:

$$x_0 = 3; \quad x_1 = \frac{a}{x_0} = 1; \quad x_2 = \frac{a}{x_1} = 3; \quad x_3 = 1 \dots$$

Итерационный процесс *не сходится*; значения приближений *колеблются*.

б) $x^2 - a = 0 \Rightarrow x = x^2 + x - a$

$$x_0 = 3; \quad x_1 = 3^2 + 3 - 3 = 9; \quad x_2 = 9^2 + 9 - 3 = 87 \dots$$

Итерационный процесс *расходится*.

Рассмотренный пример иллюстрирует один из видов численных методов – *итерационный*.

Виды численных методов:

1. Прямые – решение получают за конечное число арифметических действий.
2. Итерационные – точное решение может быть получено теоретически в виде предела бесконечной сходящейся последовательности вычислений.
3. Вероятностные – методы случайного поиска решения (*угадывания*).

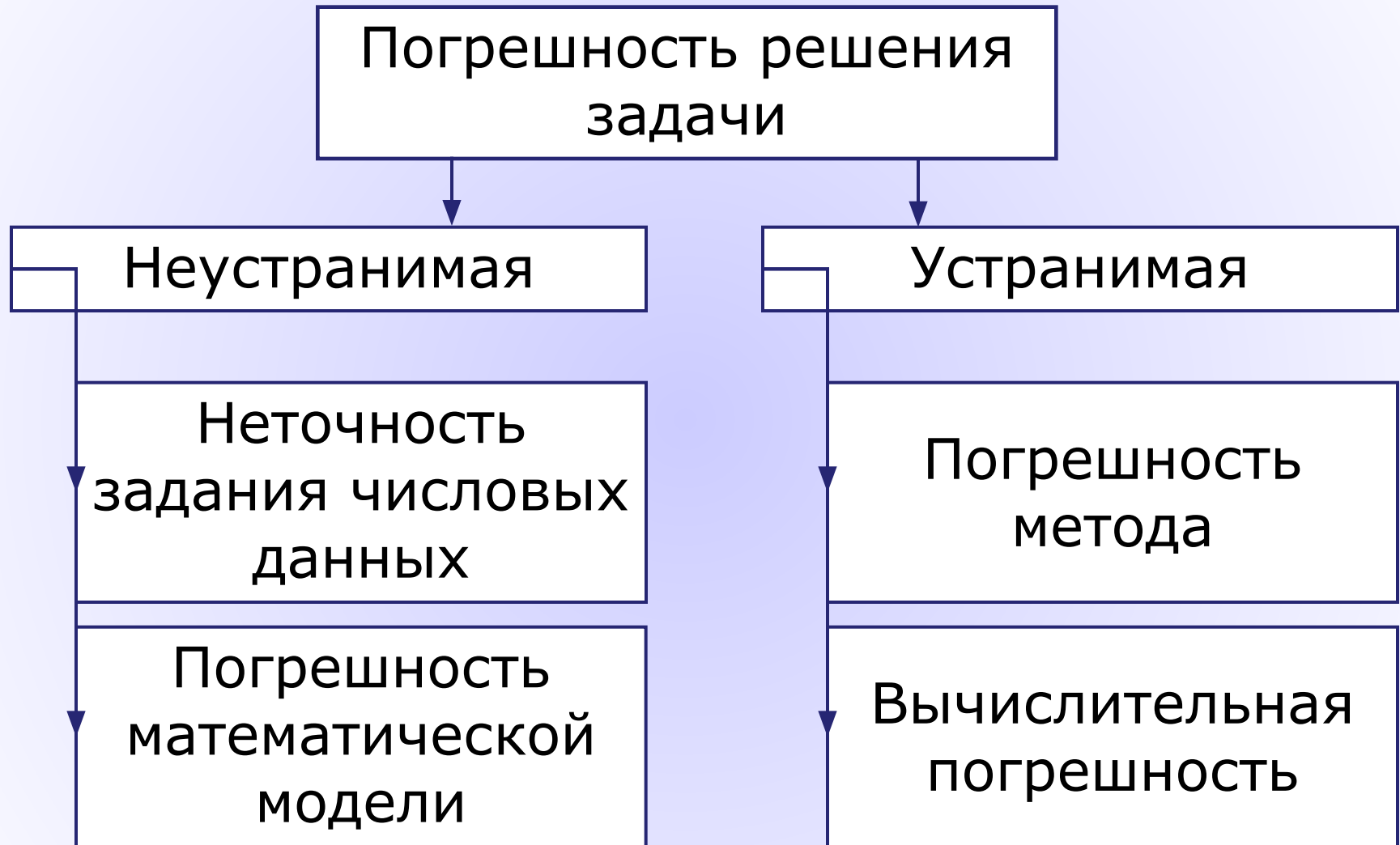
Все виды численных методов позволяют получить только **приближенное решение** задачи, то есть численное решение **всегда содержит погрешность**.

Специфика вычислительной математики

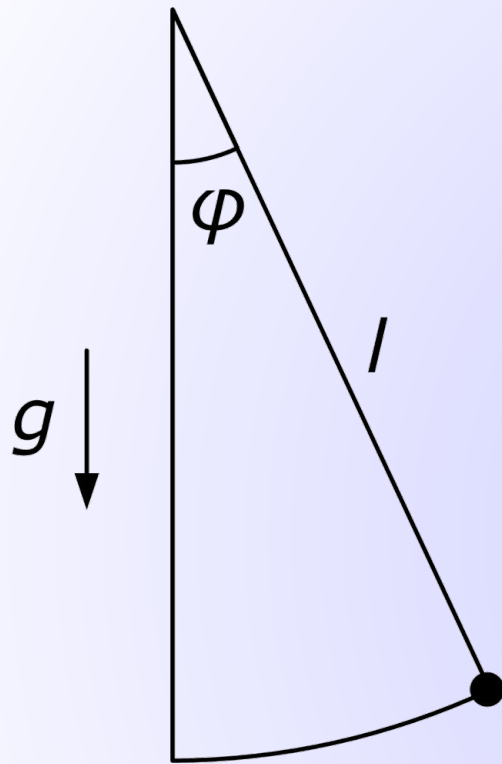
- Вычислительная математика имеет дело не только с непрерывными, но и с дискретными объектами → погрешность метода;
- Погрешность вычислений в связи с ошибками округления;
- Имеет значение обусловленность задач, т.е. чувствительность решения к малым изменениям входных данных;
- Выбор вычислительного алгоритма, вообще говоря, влияет на результат вычислений;
- Важная черта численного метода – экономичность, т.е. требование минимизации числа операций.

Классификация погрешностей

Классификация погрешностей



Пример – колебания математического маятника



$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g \sin \varphi + \mu \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

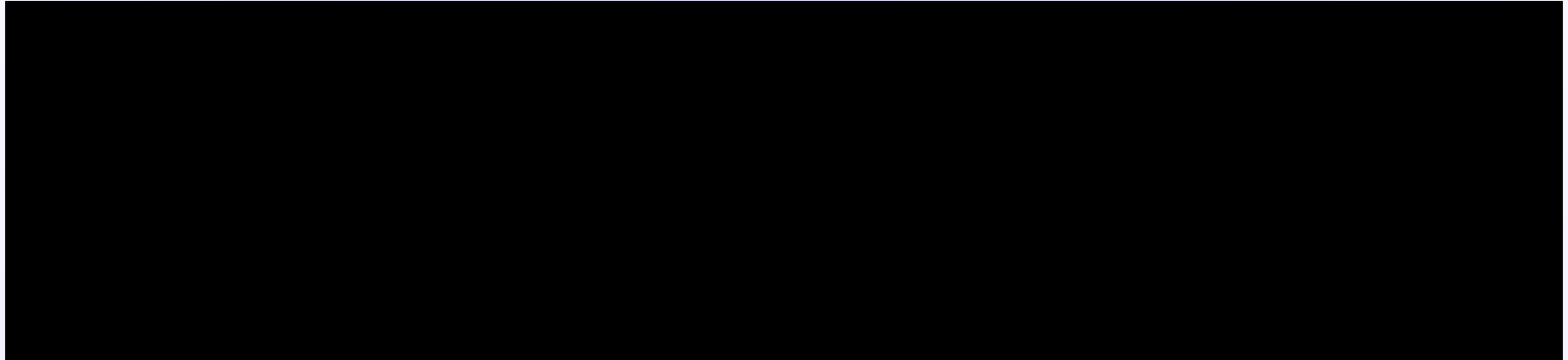
- Неустраняемая погрешность – трение зависит от скорости не совсем линейно + погрешность определения g , l , начальных условий; $\Delta_1 = | \varphi_1 - \varphi |$.
- Погрешность метода – дифференциальное уравнение не решается точно, требуется применить какой-либо численный метод; $\Delta_2 = | \varphi_2 - \varphi_1 |$.
- Вычислительная погрешность связана, например, с конечностью разрядной сетки; $\Delta_3 = | \varphi_3 - \varphi_2 |$.

$$\Delta_{\Sigma} = | \varphi_3 - \varphi | = | \varphi_3 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi | \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

$$\Delta_{\Sigma} \leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

Вычислительная погрешность

Машинное представление вещественных чисел:



Утверждение 1.1. Относительная погрешность округления при представлении вещественного числа в ЭВМ $\epsilon \approx 2^{-t}$, где t – разрядность мантииссы.

В расчетах с двойной точностью $t = 52$, $\epsilon_{double} \approx 10^{-16}$

Приближенное вычисление значения синуса с помощью разложения в ряд Тейлора

Ряд сходится для любого значения x

(Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2001. – С. 439.)

Напишем программу для вычисления значения синуса при:

- $X_1 = \pi / 6 \approx 0.52366$
- $X_2 = 12\pi + \pi / 6 \approx 38.22277$

Иллюстрация понятия вычислительной погрешности (2)

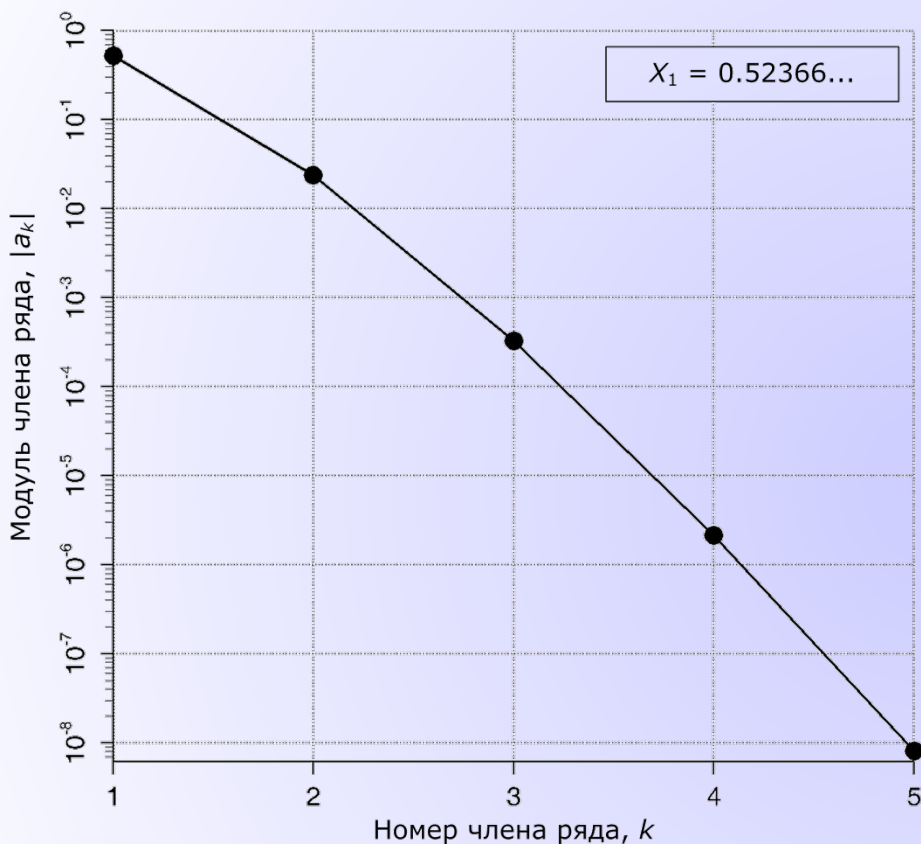
```
#define EPS 1.e-8
#define X0.52366
...
int i, k = 0;
double curr_sum = 0.0, curr_sum_old = 0.0, fact;
do {
    fact = 1.0;
    for ( i = 1; i<= 2*k+1; i++ )
        fact *= i;
    curr_sum_old = curr_sum;
    curr_sum += pow( -1, k) * pow( X, 2*k+1 ) / fact;
    k++;
} while ( fabs( curr_sum - curr_sum_old ) > EPS );
```

Результат расчета значения синуса:

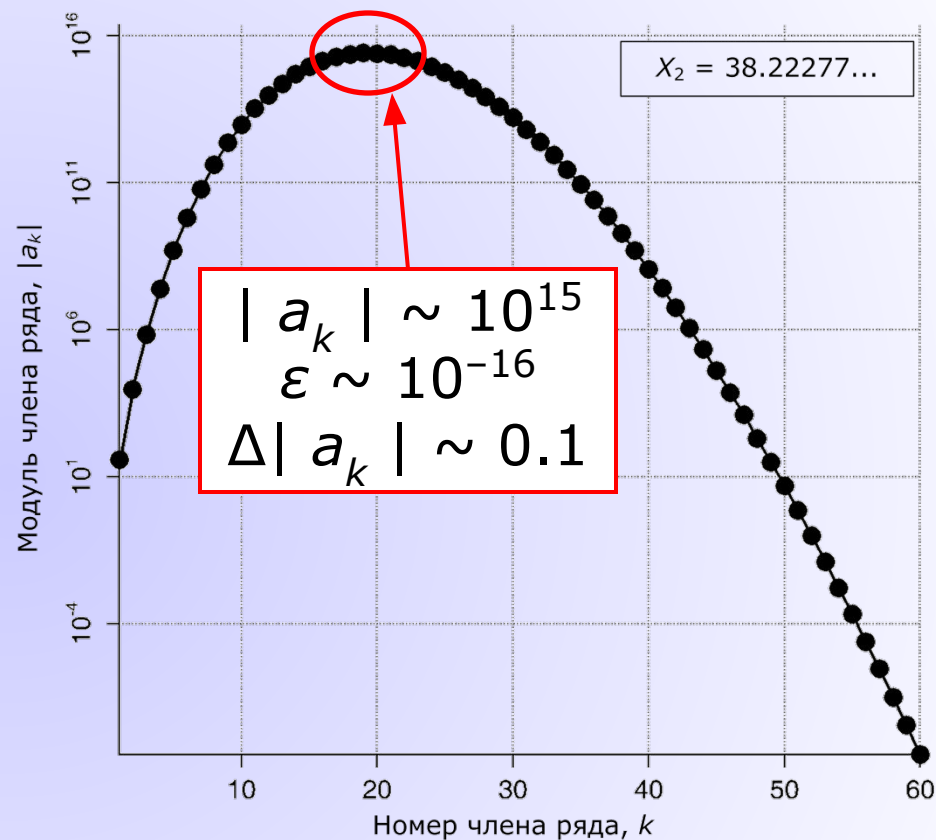
- Для $X_1 = 0.52366$: **0.500053...**
- Для $X_2 = 38.22277$: **1.165079...**

Иллюстрация понятия вычислительной погрешности (3)

Причина – быстрый рост ошибок округления



Для $|X| < 1$: $|a_k|$
монотонно убывают



Для $|X| > 1$: $|a_k|$
сначала возрастают, а
затем убывают