Импульс.
Закон сохранения импульса.

Импульс.

Импульс – векторная физическая величина, Мера механического движения.

В классической механике импульс тела равен произведению массы этого тела на его скорость, направление импульса совпадает с направлением вектора скорости.

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульс.

Импульс системы материальных точек *равен векторной сумме импульсов каждой материальной точки*, т.е.:

$$\vec{P}_{системы} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \ldots + m_n\vec{V}_n .$$

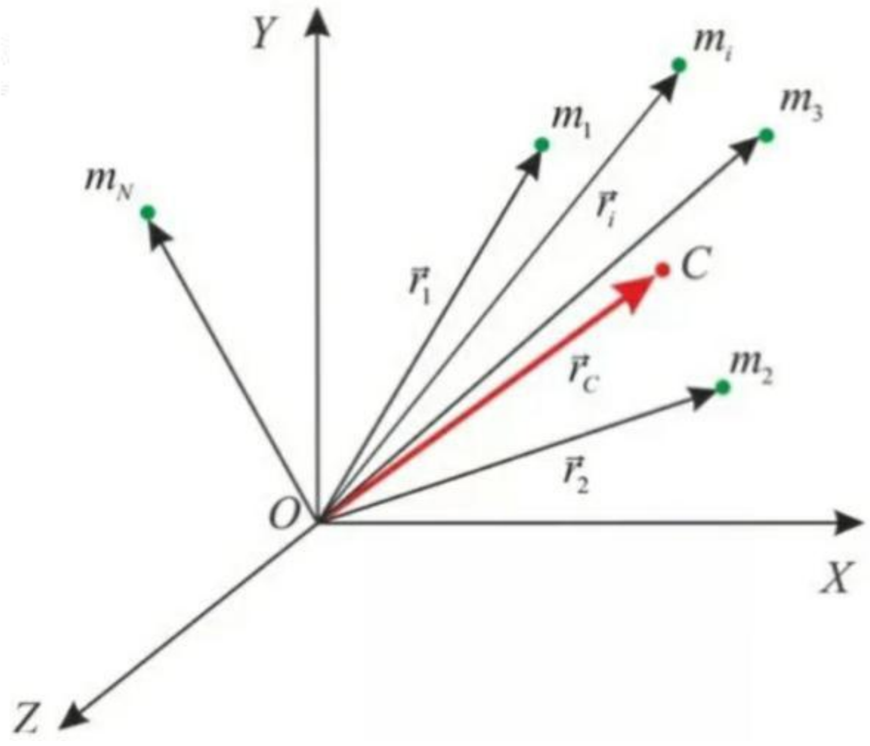
Используя данное определение, можно показать, что импульс системы материальных точек равен произведению массы всех материальных точек на скорость их центра масс, т.е.:

$$\vec{P}_{системы} = m\vec{V}_{центра\ масс} ,$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ - масса системы материальных точек.

Центр масс системы.

Центром масс (центром тяжести) или центром инерции системы называется та единственная точка системы, которая под действием внешних сил будет двигаться так же, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием тех же сил.



Центр масс системы.

Координаты центра масс

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \\ y_c &= \frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \\ z_c &= \frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} \end{aligned}\right\}$$

Координаты радиус-вектора центра масс

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m};$$

$m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ – масса всей системы.

Теорема о движении центра масс.

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила – геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

$$\vec{a}_c = \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i}{m}$$ - ускорение центра масс;

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F},$$ - второй закон Ньютона;

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$ - равнодействующая внешних сил.

Закон сохранения импульса.

Импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени.

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i \vec{v}_i = 0\,,$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}\,.$$

Система называется замкнутой, если на неё не действуют внешние силы.

Энергия.
Работа. Мощность.
Закон сохранения энергии.

Определение энергии.

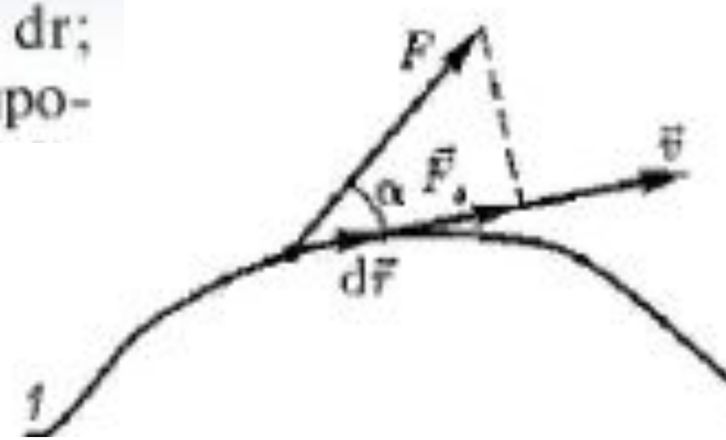
Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

Работа – это мера изменения энергии.

Элементарной работой силы F на перемещении $\mathrm{d}r$ называется *скалярная* величина

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = F_s\,\mathrm{d}s,$$

где α — угол между векторами F и $\mathrm{d}r$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$ — элементарный путь; F_s — проекция вектора F на вектор $\mathrm{d}\vec{r}$



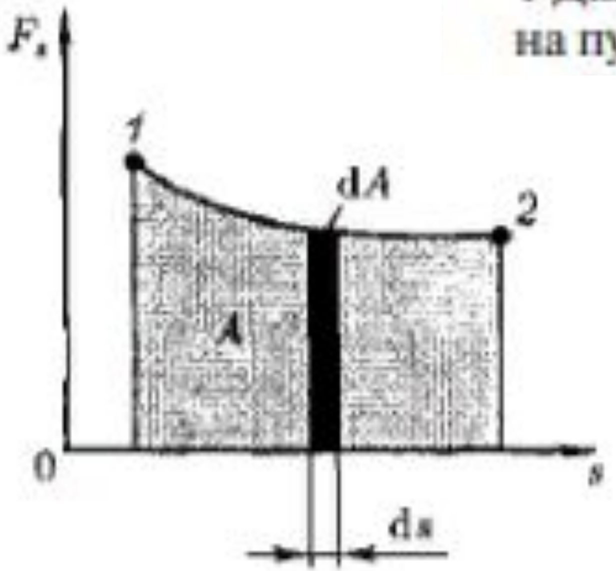
Работа силы на участке траектории от точки *1* до точки *2* равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F ds \cos\alpha = \int_1^2 F_s ds. \quad (11.2)$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F_s от пути s вдоль траектории *1 — 2*. Пусть эта зависимость представлена графически (рис. 14), тогда искомая работа A определяется на графике площадью затонированной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила F= const и a = const, то получим

$$A = \int_1^2 F ds \cos\alpha = F\cos\alpha \int_1^2 ds = Fs\cos\alpha,$$

где s — путь, пройденный телом [см.



Из формулы (11.1) следует, что при $\alpha < \frac{\pi}{2}$ работа силы положительна, в этом случае составляющая F_s совпадает по направлению с вектором скорости движения $\vec{v}$ (СМ. рис. 13). Если а > —, то работа силы отрицательна. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.

Единица работы* — *джоуль (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н • м).

Мощность.

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие ***мощности:***

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}. \tag{11.3}$$

За время *dt* сила *F* совершает работу *Fdr*, и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v},$$

т.е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; *N* — величина *скалярная.*

Единица мощности — ***ватт*** (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт = = 1 Дж/с).

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия механической системы — энергия механического движения этой системы.

Сила F, действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа dA силы F на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до v, идет на увеличение кинетической энергии $\mathrm{d}T$ тела, т.е.

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}T.$$

Используя второй закон Ньютона $\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ и умножая на перемещение $\mathrm{d}\vec{r}$, получим

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}A.$$

Так как $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, то $\mathrm{d}A = m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} = mv\mathrm{d}v = \mathrm{d}T$, откуда

$$T = \int_0^v mv\mathrm{d}v = \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом, тело массой m, движущееся со скоростью v, обладает кинетической энергией

$$T = \frac{mv^2}{2}. \qquad (12.1)$$

Из формулы (12.1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т.е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее механического движения.

Кинетическая энергия

При выводе формулы (12.1) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему. Так, кинетическая энергия системы из n материальных точек равна

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}$$

где v_i — скорость i-й материальной точки массой m_i.

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются ***потенциальными,*** а силы, действующие в них, — ***консервативными.*** Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется ***диссипативной;*** ее примером является сила трения.

Потенциальная энергия

Тела, находясь в ***потенциальном поле сил,*** обладают потенциальной энергией П. ***Потенциальная энергия*** — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Работа *консервативных сил* при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком «—» (работа совершается за счет убыли потенциальной энергии):

$$dA = -d\Pi. \qquad (12.2)$$

Согласно формуле (12.3), потенциальная энергия

$$\Pi = -\int \vec{F} d\vec{r} + C,$$

где C — постоянная интегрирования, т. е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это, однако, не существенно, так как в физические соотношения входит или разность потенциальных энергий в двух точках, или производная функции П по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении условно считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а потенциальную энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня.

Для консервативных сил

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

или в векторном виде

$$\vec{F} = -\text{grad}\,\Pi, \qquad (12.4)$$

где

$$\text{grad}\,\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\vec{k} \qquad (12.5)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей). Вектор, определяемый выражением (12.5), называется *градиентом* ***скаляра*** П.

Для него наряду с обозначением grad П применяется также обозначение ∇П. ∇ («набла») означает символический вектор, называемый ***оператором Гамильтона***[1] или ***«набла»-оператором:***

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \qquad (12.6)$$

Конкретный вид функции П зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой *m*, поднятого на высоту *h* над поверхностью Земли,

$$\Pi = mgh, \qquad (12.7)$$

где высота *h* отсчитывается от нулевого уровня, для которого П = 0. Выражение (12.7) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты *h* на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение *(кинетическая энергия всегда положительна!)*. Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина h'), $\Pi = -mgh'$.

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x\ упр} = -kx,$$

где $F_{x\ упр}$ — проекция силы упругости на ось x; k — ***коэффициент упругости*** (для пружины — ***жесткость***), а знак «—» указывает на то, что $F_{x\ упр}$ направлена в сторону, противоположную деформации x.

По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и направлена противоположно ей , т. е.

$$F_x = -F_{x\ упр} = kx.$$

Элементарная работа dA, совершаемая силой F_x при бесконечно малой деформации dx,

$$dA = F_x dx = kx\,dx,$$

а полная работа

$$A = \int_0^x kx\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Достаточным условием равновесия является то, что потенциальная энергия принимает минимальное значение.

Полная механическая энергия.

Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

Полная механическая энергия системы — энергия механического движения и взаимодействия:

$$E = \mathrm{T} + \Pi,$$

т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

Закон сохранения полной механической энергии.

Рассмотрим систему материальных точек массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, движущихся со скоростями $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Пусть $F'_1, F'_2, \ldots, F'_n$ — равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а F_1, F_2, ..., F_n — равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим f_1, f_2, ..., f_n. При $v \ll c$ массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 + f_1,$$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 + f_2,$$

. . . .

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}'_n + \vec{F}_n + f_n.$$

Двигаясь под действием сил, материальные точки системы за интервал времени dt совершают перемещения, соответственно равные $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \ldots, d\vec{r}_n$. Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$, получим

$$m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}'_1 + \vec{F}_1) d\vec{r}_1 = f_1 d\vec{r}_1,$$

$$m_2(\vec{v}_2 d\vec{v}_2) - (\vec{F}'_2 + \vec{F}_2) d\vec{r}_2 = f_2 d\vec{r}_2,$$

. . . .

$$m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}'_n + \vec{F}_n) d\vec{r}_n = f_n d\vec{r}_n.$$

$$m_n(\vec{v}_n d\vec{v}_n) - (\vec{F}'_n + \vec{F}_n) d\vec{r}_n = f_n d\vec{r}_n.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} f_i d\vec{r}_i. \qquad (13.1)$$

Первое слагаемое левой части равенства (13.1)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_i d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dT,$$

где dT — приращение кинетической энергии системы.

Второе слагаемое $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}'_i + \vec{F}_i) d\vec{r}_i$ равно элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком «-», т.е. равно элементарному приращению потенциальной энергии $d\Pi$ системы [см. (12.2)].

Правая часть равенства (13.1) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем

$$d(T+\Pi)=dA. \qquad (13.2)$$

При переходе системы из состояния *1* в какое-либо состояние *2*

$$\int_1^2 d(T+\Pi)=A_{12},$$

т.е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними не консервативными силами. Если внешние не консервативные силы отсутствуют, то из (13.2) следует, что

$$d(T+\Pi)=0,$$

откуда

$$T+\Pi=E=\text{const}, \qquad (13.3)$$

т. е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной. Выражение (13.3) представляет собой ***закон сохранения механической энергии:*** в системе тел, между которыми действуют только *консервативные* силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются ***консервативными системами***. ***Закон сохранения механической энергии*** можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени.* Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Существует еще один вид систем — ***диссипативные системы,*** в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название ***диссипации*** (или ***рассеяния) энергии.*** Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.

Абсолютно упругий и неупругий удары.

Удар (или ***соударение***) — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновения атомов или бильярдных шаров) сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т.д.

Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (*ударные* или

Тела во время удара испытывают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают,

мися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется ***коэффициентом восстановления*** ε:

$$\varepsilon = \frac{v'_n}{v_n}.$$

Если для сталкивающихся тел ε = 0, то такие тела называются *абсолютно* ***неупругими,*** если ε = 1 — ***абсолютно упругими.*** На практике для всех тел 0 < ε < 1 (например, для стальных шаров ε ≈ 0,56, для шаров из слоновой кости ε ≈ 0,89, для свинца ε ≈ 0). Однако в некоторых случаях тела можно с большой степенью точности рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Абсолютно упругий удар — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (подчеркнем, что это *идеализированный случай*).

Абсолютно неупругий удар — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое. Продемонстрировать абсолютно неупругий удар можно с помощью шаров из пластилина (глины), движущихся навстречу друг другу (рис. 23).

Абсолютно неупругий удар — пример того, как происходит «потеря» механической энергии под действием диссипативных сил.