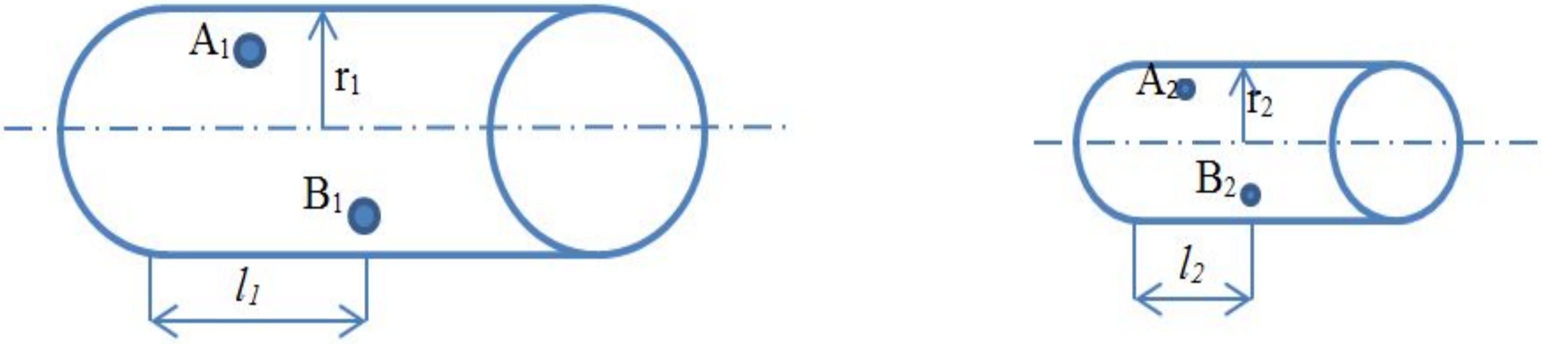
Инженерная химия. Лекция 2

Лектор: к.т.н. Таран Ю. А.

Теория гидродинамического подобия.

Два физических явления подобны, если в сходственных точках геометрически подобных систем одноименные характеристики различаются только постоянными коэффициентами (множителями подобия). Математические описания подобных систем идентичны.



$$m_w = \frac{w_2}{w_1}; m_p = \frac{p_2}{p_1}; m_\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}; m_\tau = \frac{\tau_2}{\tau_1}; m_\nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}; m_x = \frac{x_2}{x_1}; m_{P\iota} = \frac{Pi_2}{Pi_1}$$

При физическом моделировании необходимо найти условия перехода от модели к оригиналу:

$\frac{\partial w}{\partial \tau_1} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + P_{i1} + \nu_1[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \ldots]$ для оригинала

$\frac{\partial w_2}{\partial \tau_2} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + P_2 + \nu_2[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} + \ldots]$для модели привели фрагмент основного уравнения гидродинамики

Масштабные множители

$$\frac{m_w}{m_\tau}\frac{\partial w_1}{\partial \tau_1} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{m_w{}^2}{m_x} = \frac{m_p}{m_\rho m_x}\frac{\partial p_1}{\rho_1 \partial x_1} + m_{P_i} P_{i1} + \frac{m_\nu m_w}{m_x^2}\nu_1 * [\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} + \ldots]$$

$\frac{m_w}{m_\tau} = \frac{m_w{}^2}{m_x} = \frac{m_p}{m_\rho m_x} = m_{Pi} = \frac{m_\nu m_w}{m_x^2}$ условие перехода от оригинала к модели, равенство комплексов масштабных множителей.

Каждый из комплексов масштабов стоит в уравнении Навье-Стокса при множителе, соответствующем определенной силе ($\frac{m_w{}^2}{m_x}$- силы инерции; $\frac{m_p}{m_\rho m_x}$- силы давления; m_{Pi}- массовые силы; $\frac{m_\nu m_w}{m_x^2}$-силы вязкости). Для выявления соотношения действующих сил соответствующие комплексы масштабных множителей нормируют по множителю соответствующему силе инерции. Таким образом, получают комплексы соотношений масштабов действующих сил. Эти комплексы называются критериями гидродинамического подобия.

Критерий Струхаля (гомохронности)

$H_o = \frac{m_w}{m_\tau} \frac{m_x}{m^2{}_w} = \frac{m_x}{m_\tau m_w} = \frac{x_0}{\tau w_0}$ - мера нестационарности процесса.

Критерий Эйлера

$E_u = \frac{m_p}{m_\rho \; m_w{}^2} = \frac{p}{\rho w^2}$; $E_u = \frac{\Delta p}{\rho w^2}$

Критерий Фруда

$F_r = \frac{m_F m_x}{m_w^2} = \frac{gx}{w^2}$.

Критерий Рейнольдса

$\frac{1}{R_e} = \frac{m_\nu m_w m_x}{m_x^2 m_w^2} = \frac{\nu}{wx}$

$R_e = \frac{xw}{\nu}$ – критерий Рейнольдса

Турбулентное течение. Полуэмпирическая теория турбулентности.

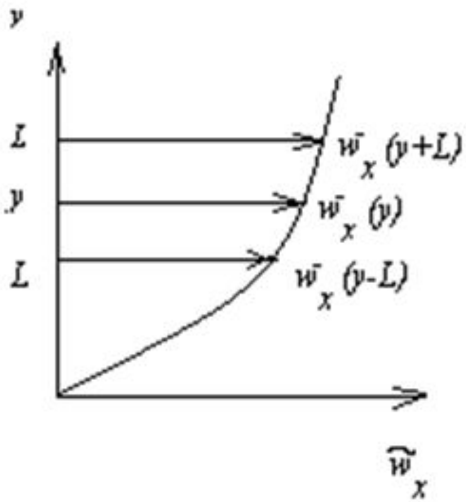
Правила осреднения, обозначаемого чертой над символом:

$\overline{\widetilde{w}} = \widetilde{w}$,

$\overline{w'} = 0$

$\overline{\widetilde{w}w'} = 0$

$\overline{w'w'} \neq 0$



Изменение средней скорости на масштабе турбулентности $\Delta\widetilde{w}$

$\Delta\widetilde{w_x} = 1/2\left(\Delta\widetilde{w_x}_1 + \Delta\widetilde{w_x}_2\right) = \mathrm{L}\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y} = \text{к}y\,\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}$,

Выражение получается взаимной подстановкой друг в друга приведенных ниже зависимостей.

$\Delta\widetilde{w_x}_1 = \widetilde{w_x}(y + L) - \widetilde{w_x}(y) \cong L\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}$, так как разложение $\widetilde{w}(y + L)$ в ряд и ограничение его первым членом дает

$\widetilde{w_x}(y + L) = \widetilde{w_x}(y) + \mathrm{L}\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}$

$\Delta\widetilde{w_x}_2 = \widetilde{w_x}(y)$ - $\widetilde{w_x}(y - L) \cong \mathrm{L}\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}$, так как разложение $\widetilde{w}(y - L)$в ряд и ограничение его первым членом дает

$\widetilde{w_x}(y - L) = \widetilde{w_x}(y) - \mathrm{L}\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}$,

$\mathrm{Re_L} = \frac{\Delta\widetilde{w_x}L}{\nu} \gg \mathrm{Re_x} = \frac{\Delta\widetilde{w_x}x}{\nu}$, L - крупномасштабная пульсация, x мелкомасштабная пульсация и $\mathrm{L} \gg x$, таким образом диссипирует энергию мелкомасштабной пульсаци, так как малый критерий Re- это большая сила трения, большая вязкость, а, следовательно, большая величина диссипированной энергии.

На основе теории размерности можно получить выражение для турбулентной вязкости:

$\Delta\widetilde{w_x}$[м]; L [м]; $\rho\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right]$; $\tilde{p}$[Па] – параметры потока, характеризующие течение:

$$\nu_\text{т}\left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right] = \Delta\widetilde{w_x}L = \text{L}^2\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y} = \kappa^2\text{y}^2\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}$$

$$\mu_\text{т}\,[\text{Па}\ c] = \nu_\text{т}\ \rho = \rho\kappa^2\text{y}^2\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}$$

$$\tau_{\text{тр}}{}^{\text{т}} = \mu_\text{г}\frac{\partial w_x}{\partial y} = \rho\kappa^2\text{y}^2\left(\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}\right)^2$$

$$\overline{w_x{}'w_y{}'} = -\ \kappa^2\text{y}^2\left(\frac{\partial\widetilde{w_x}}{\partial y}\right)^2$$

После определения значений $\mu_\text{т}$ и $\nu_\text{т}$ можно решать конкретные задачи с использованием уравнения Рейнольдса.