

**Курс лекций по
дисциплине
«СТАТИСТИЧЕСКАЯ
РАДИОТЕХНИКА»**

**Лектор - Куроедов Сергей
Константинович**

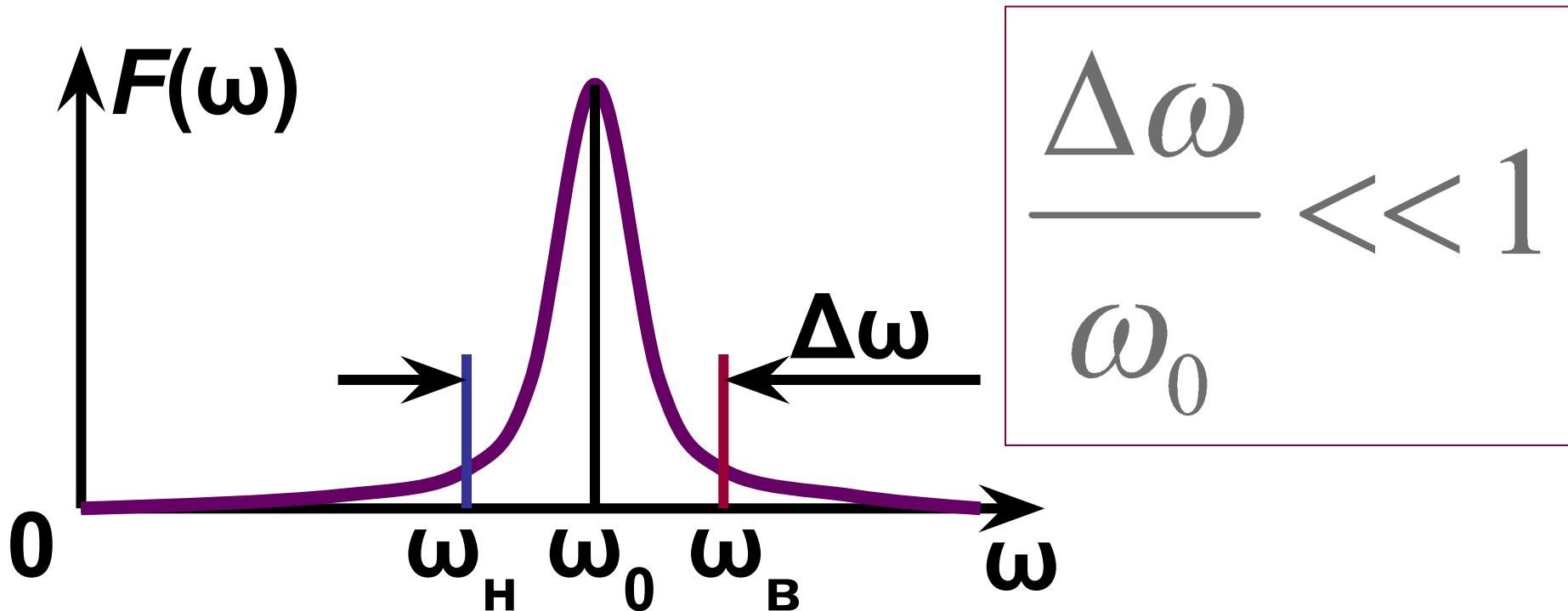
Лекция 1-5

ПЛАН ЛЕКЦИИ 1-5

- 1. Узкополосный случайный процесс (УСП), функция корреляции УСП**
- 2. Спектральные и корреляционные характеристики сопряженных УСП**
- 3. Корреляционные свойства синфазных и квадратурных амплитуд УСП**
- 4. Характеристики нормальных УСП, распределение Релея**
- 5. Характеристики суммы гармонического колебания и нормального УСП, распределение Райса**

УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (УСП)

Случайный процесс называется **узкополосным**, если относительное значение **эффективной ширины** его спектра много меньше **единицы**



ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП

Теорема Винера-Хинчина:

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega$$

Замена частотной переменной:

$$\Omega = \omega - \omega_0, \omega = \Omega + \omega_0$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП

$$R(\tau) = a(\tau)\cos(\omega\tau) - b(\tau)\sin(\omega\tau)$$

$a(\tau)$ - огибающая синфазной составляющей **$R(\tau)$** :

$$a(\tau) = \int_{-\omega_0(-\infty)}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega)\cos(\Omega\tau)d\Omega$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП

$b(\tau)$ - огибающая квадратурной составляющей $R(\tau)$:

$$b(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega) \sin(\Omega \tau) d\Omega$$

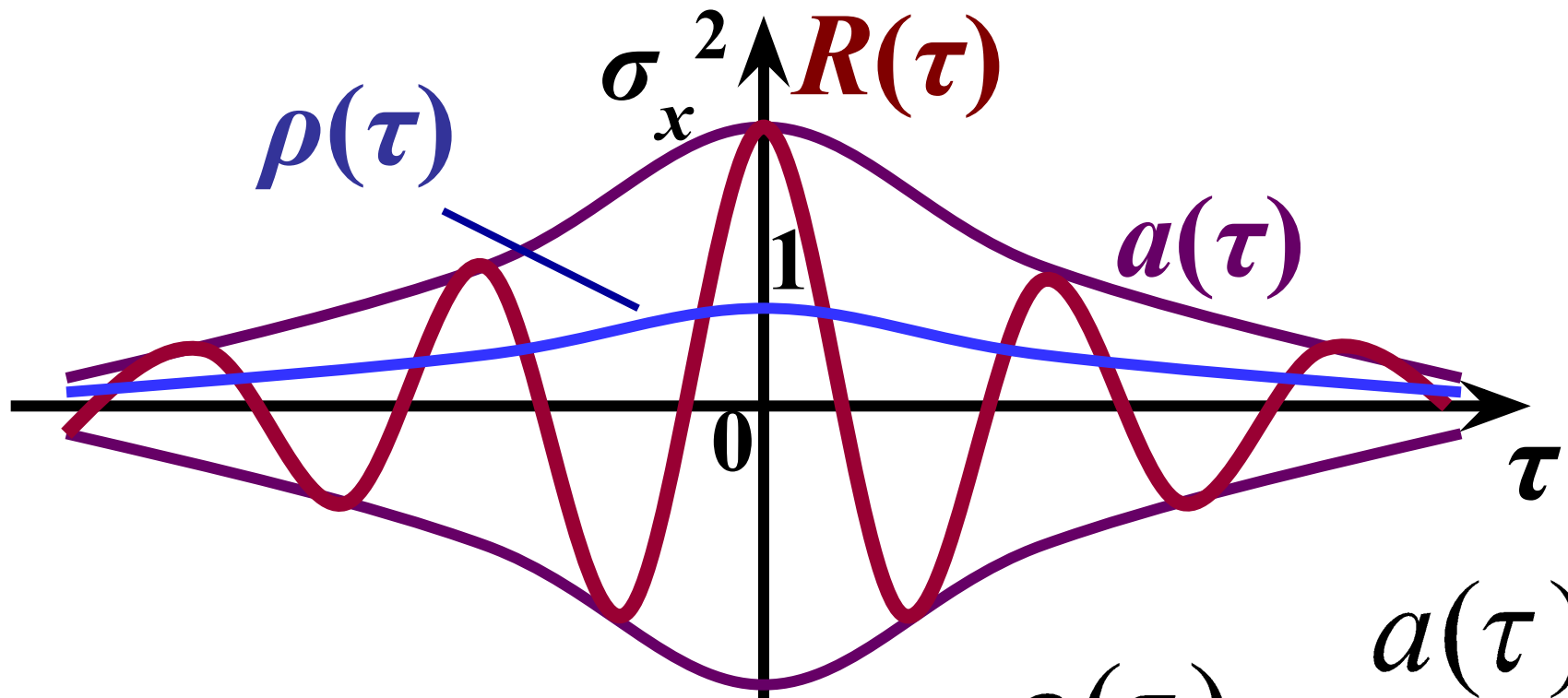
Условие симметричности спектра мощности относительно частоты ω_0 :

$$F(\omega_0 + \Omega) = F(\omega_0 - \Omega)$$

$$b(\tau) = 0$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП С СИММЕТРИЧНЫМ СПЕКТРОМ МОЩНОСТИ

$$R(\tau) = a(\tau) \cos(\omega\tau)$$



$\rho(\tau)$ - нормированная
огибающая

$$\rho(\tau) = \frac{a(\tau)}{\sigma_x^2}$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСП

**Реализации сопряженных по
Гильберту УСП:**

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t) - B(t)\sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = \hat{x}(t) = H[x(t)]$$

$$y(t) = B(t)\cos(\omega_0 t) + A(t)\sin(\omega_0 t)$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСП

Спектральные плотности реализаций
сопряженных по Гильберту УСП:

$$S_x(\omega) \leftrightarrow x(t), S_y(\omega) \leftrightarrow y(t)$$

$$S_y(\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega) S_x(\omega)$$

$$|S_x(\omega)| = |S_y(\omega)|$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСП

**Спектры мощности сопряженных по
Гильберту УСП:**

$$W_x(\omega) = W_y(\omega)$$

**Функции корреляции сопряженных
по Гильберту УСП:**

$$R_x(\tau) = R_y(\tau)$$

ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \overline{x(t)y(t+\tau)} = \\ &= x(t) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t+\tau-\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)x(\xi)}{t+\tau-\xi} d\xi \end{aligned}$$

ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_x(\xi - t)}{\tau - (\xi - t)} d\xi$$

**Функция взаимной корреляции
сопряженных УСП сопряжена по
Гильберту с функцией корреляции
УСП:**

$$R_{xy}(\tau) = H[R_x(\tau)]$$

ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} F_x(\omega) \sin(\omega\tau) d\omega$$

$$R_{xy}(\tau) = a(\tau) \sin(\omega_0\tau) + b(\tau) \cos(\omega_0\tau)$$

Свойства *функции взаимной корреляции* сопряженных УСП :

1. Нечетность: $R_{xy}(\tau) = -R_{xy}(-\tau)$

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

**2. Некоррелированность
сопряженных УСП в совмещенных
сечениях:**

$$R_{xy}(0) = 0$$

3. Свойство перестановки:

$$R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau)$$

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИНФАЗНОЙ И КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУД УСП

Реализации сопряженных по
Гильберту УСП:

$$\begin{cases} x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t) - B(t)\sin(\omega_0 t) \\ y(t) = B(t)\cos(\omega_0 t) + A(t)\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Синфазная и **квадратурные**
амплитуды реализации УСП:

$$A(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) - y(t)\sin(\omega_0 t)$$

$$B(t) = -x(t)\sin(\omega_0 t) + y(t)\cos(\omega_0 t)$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ СИНФАЗНОЙ АМПЛИТУДЫ УСП

$$R_A(\tau) = \overline{A(t)A(t+\tau)} = \frac{1}{2} \cos(\omega_0\tau) \cdot$$
$$\cdot \left[\overline{x(t)x(t+\tau)} + \overline{y(t)y(t+\tau)} \right] + \frac{1}{2} \cdot$$
$$\cdot \sin(\omega_0\tau) \left[\overline{x(t)y(t+\tau)} - \overline{y(t)x(t+\tau)} \right]$$
$$R_A(\tau) = R_x(\tau) \cos(\omega_0\tau) + R_{xy}(\tau) \sin(\omega_0\tau)$$

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИНФАЗНОЙ И КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУД УСП

$$R_A(\tau) = a(\tau), R_B(\tau) = a(\tau)$$

$$R_{AB}(\tau) = b(\tau)$$

**Дисперсии синфазной и
квадратурной амплитуд УСП:**

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = a(0) = \sigma_x^2$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

Синфазная и **квадратурная**
амплитуды **нормального УСП**
распределены по **закону Гаусса**

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП

Двумерная плотность вероятности нормальных **синфазной** и **квадратурной** амплитуд УСП:

$$p(A, B) = p(A) p(B)$$

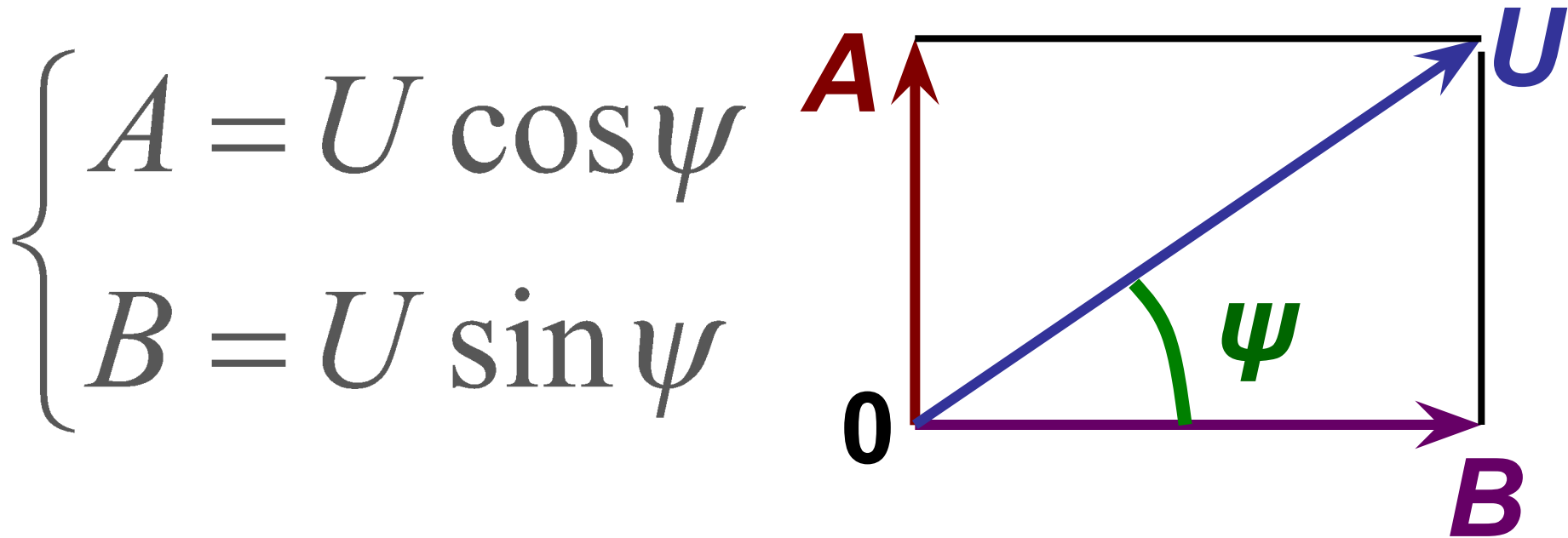
$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A}} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП

$$p(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} e^{-\frac{B^2}{2\sigma_B^2}}$$

$$p(A, B) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2 + B^2}{2\sigma_x^2}}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП



U – огибающая УСП

ψ – аргумент комплексной огибающей УСП

ЯКОБИАН ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial U} & \frac{\partial A}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial B}{\partial U} & \frac{\partial B}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \cos \psi & -U \sin \psi \\ \sin \psi & U \cos \psi \end{vmatrix} = U$$

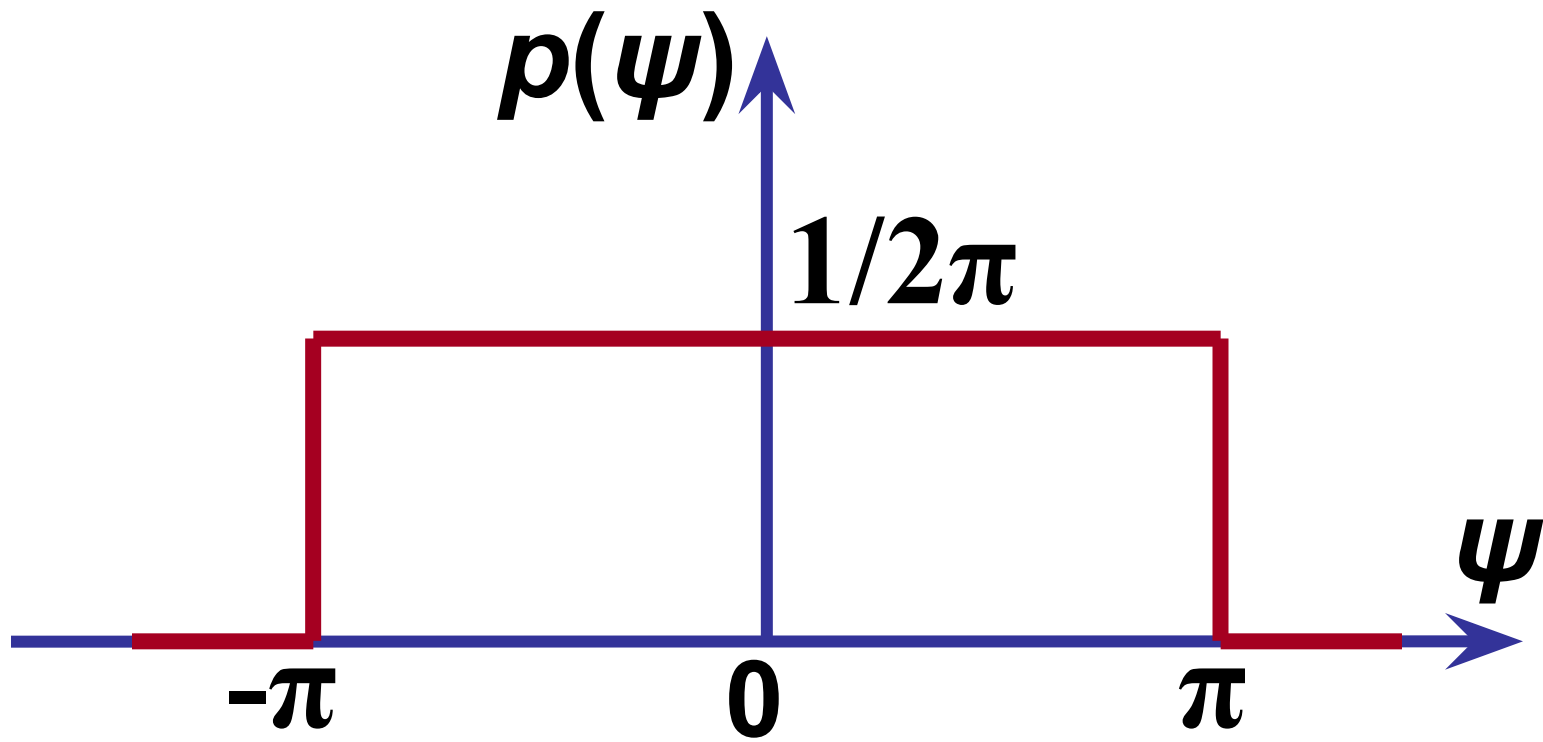
ДВУМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ УСП

$$p(U, \psi) = p(A, B) |D| =$$
$$= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}$$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ УСП

$$\begin{aligned} p(\psi) &= \int_0^{\infty} p(U, \psi) dU = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ УСП



Фаза УСП распределена **равномерно** на интервале $(-\pi, \pi)$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ УСП

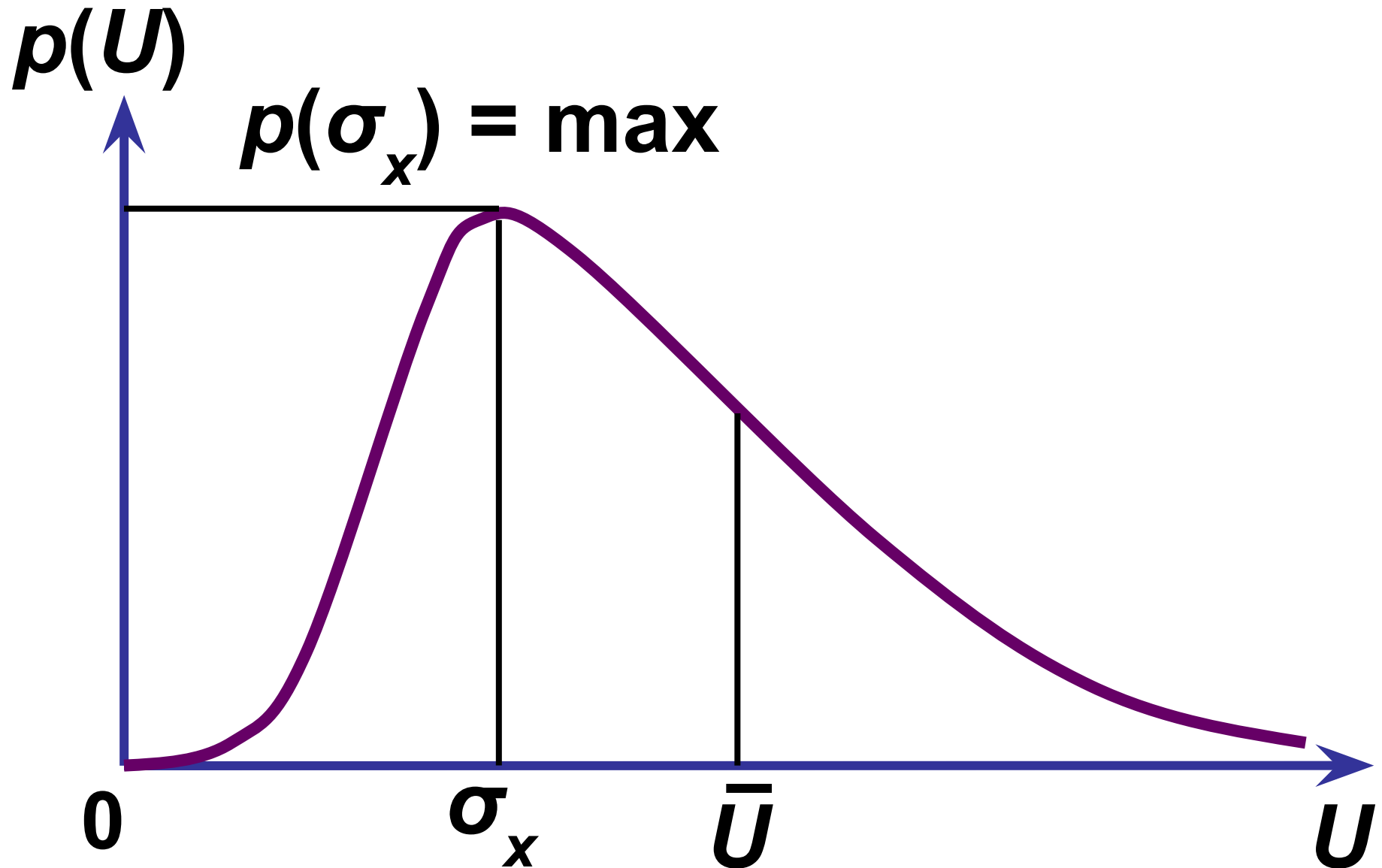
$$\begin{aligned} p(U) &= \int_{-\pi}^{\pi} p(U, \psi) d\psi = \\ &= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \end{aligned}$$

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТ ФАЗЫ И ОГИБАЮЩЕЙ УСП

$$p(\psi) p(U) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} =$$
$$= p(U, \psi)$$

Модуль и аргумент комплексной
огибающей УСП **статистически**
независимы

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

- **мода** $U = \sigma_x$ -
- максимум
распределения

$$p(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{e}}$$

- **математическое
ожидание
огнбающей**

$$\bar{U} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

- **средний квадрат**

$$\overline{U^2} = 2\sigma_x^2$$

- **дисперсия**

$$\sigma_U^2 = \overline{U^2} - \overline{U}^2 = \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

$$p(U, U_\tau) = \frac{UU_\tau}{\sigma_x^4 (1 - \rho^2)} e^{-\frac{U^2 + U_\tau^2}{2\sigma_x^2 (1 - \rho^2)}}.$$

$$\cdot J_0 \left(\frac{\rho UU_\tau}{\sigma_x^2 (1 - \rho^2)} \right)$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ОГИБАЮЩЕЙ НОРМАЛЬНОГО УСП

$$R_U(\tau) = \overline{UU_\tau} - \bar{U}^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty UU_\tau p(U, U_\tau) dU dU_\tau -$$

$$-\frac{\pi}{2} \sigma_x^2 = \frac{\pi}{2} \sigma_x^2 \left[\frac{\rho^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{2^{2n} (n!)^2} \rho^{2n} \right]$$

$$r_U(\tau) = \frac{R_U(\tau)}{\sigma_U^2} = 0,914\rho^2(\tau) + 0,058\rho^4(\tau) + \boxtimes$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СУММЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ И НОРМАЛЬНОГО УСП

$$\begin{aligned}y(t) &= U_m \cos \omega_0 t + x(t) = \\&= [U_m + A(t)] \cos \omega_0 t - B(t) \sin \omega_0 t = \\&= U(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A = U \cos \psi - U_m \\ B = U \sin \psi \end{cases}$$

ЯКОБИАН ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial A}{\partial U} & \frac{\partial A}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial B}{\partial U} & \frac{\partial B}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} \cos \psi & -U \sin \psi \\ \sin \psi & U \cos \psi \end{vmatrix} = U$$

$$p(U, \psi) = p(A, B) |D| =$$

$$= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2 + B^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2 + U_m^2 - 2U_m U \cos \psi}{2\sigma_x^2}}$$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(U, \psi) d\psi =$$
$$= \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma_x^2}} J_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right)$$

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos \psi} d\psi$$

$$J_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{UU_m \cos \psi}{\sigma_x^2}} d\psi$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЙСА

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma_x^2}} J_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

$$\frac{U_m}{\sigma_x} = 0, p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}$$

НОРМАЛИЗАЦИЯ ОГИБАЮЩЕЙ

$$x \gg 1, J_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x}$$

$$\frac{U_m}{\sigma_x} \gg 1, p(U) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(U-U_m)^2}{\sigma_x^2}}$$

НОРМАЛИЗАЦИЯ ОГИБАЮЩЕЙ

