Курс лекций по дисциплине «СТАТИСТИЧЕСКАЯ РАДИОТЕХНИКА»

Лектор - Куроедов Сергей Константинович

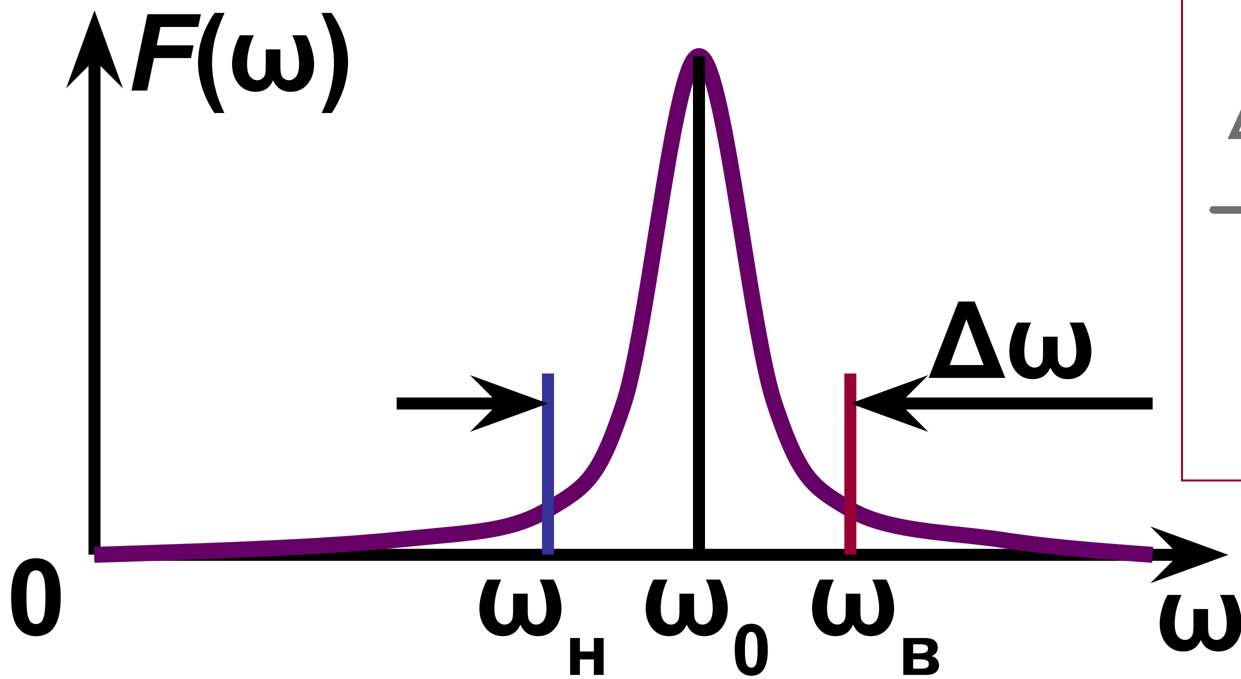
Лекция 1-5

ПЛАН ЛЕКЦИИ 1-5

1. Узкополосный случайный процесс (УСП), функция корреляции УСП
2. Спектральные и корреляционные характеристики сопряженных УСП
3. Корреляционные свойства синфазных и квадратурных амплитуд УСП
4. Характеристики нормальных УСП, распределение Релея
5. Характеристики суммы гармонического колебания и нормального УСП, распределение Райса

УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ (УСП)

Случайный процесс называется *узкополосным*, если относительное значение эффективной ширины его спектра много меньше единицы



$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП

Теорема Винера-Хинчина:

$$R(\tau) = \int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos(\omega\tau)\,d\omega$$

Замена частотной переменной:

$$\Omega = \omega - \omega_0, \omega = \Omega + \omega_0$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП

$$R(\tau) = a(\tau)\cos(\omega\tau) - b(\tau)\sin(\omega\tau)$$

$a(\tau)$ - огибающая синфазной составляющей $R(\tau)$:

$$a(\tau) = \int\limits_{-\omega_0\,(-\infty)}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega)\cos(\Omega\tau)\,d\Omega$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП

$b(\tau)$ - огибающая квадратурной составляющей $R(\tau)$:

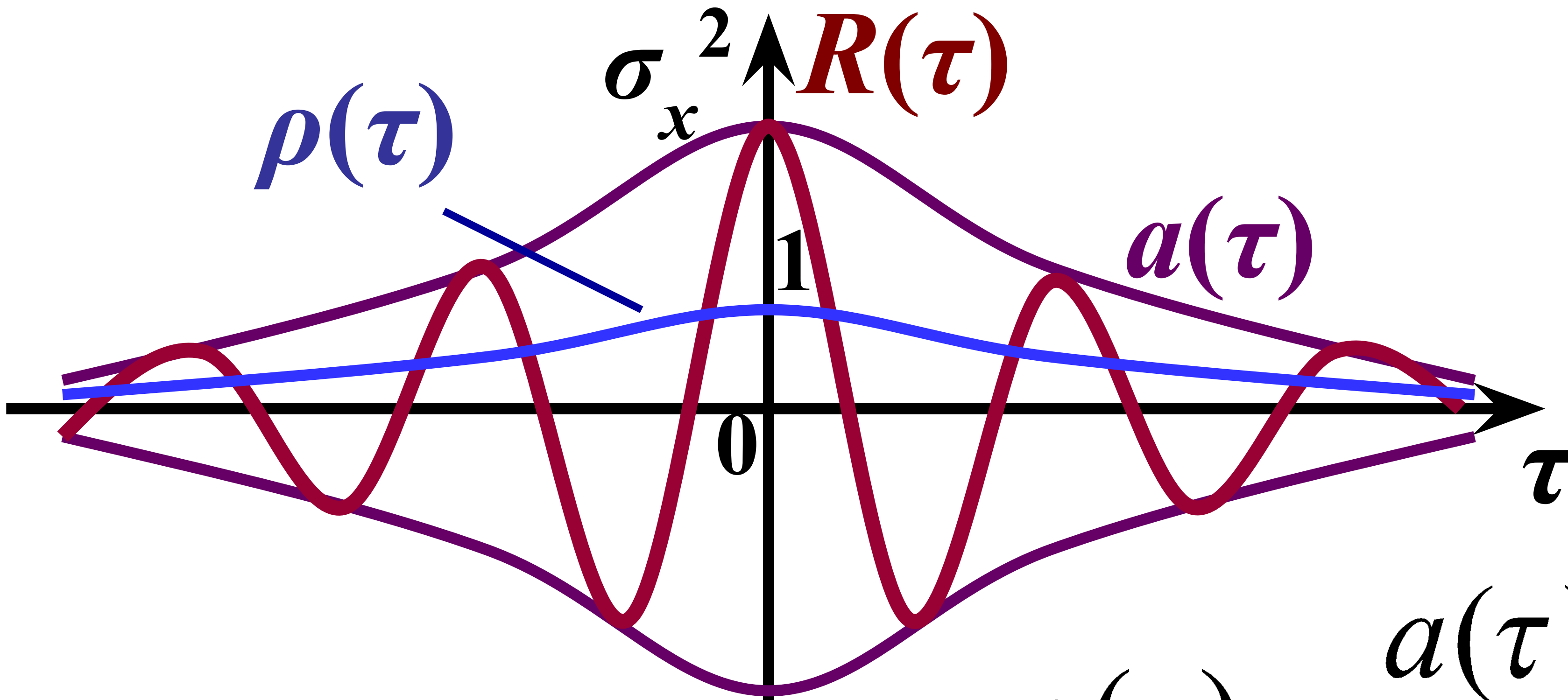
$$b(\tau) = \int_{-\omega_0(-\infty)}^{\infty} F(\omega_0 + \Omega)\sin(\Omega\tau)d\Omega$$

Условие симметричности спектра мощности относительно частоты ω_0:

$$\boxed{F(\omega_0 + \Omega) = F(\omega_0 - \Omega)} \quad \boxed{b(\tau) = 0}$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ УСП С СИММЕТРИЧНЫМ СПЕКТРОМ МОЩНОСТИ

$$\boxed{R(\tau) = a(\tau)\cos(\omega\tau)}$$



$$\rho(\tau) = \frac{a(\tau)}{\sigma_x^2}$$

$\rho(\tau)$ - нормированная огибающая

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСП

Реализации сопряженных по Гильберту УСП:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t) - B(t)\sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = \hat{x}(t) = \mathrm{H}[x(t)]$$

$$y(t) = B(t)\cos(\omega_0 t) + A(t)\sin(\omega_0 t)$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСП

Спектральные плотности реализаций сопряженных по Гильберту УСП:

$$S_x(\omega) \leftrightarrow x(t), S_y(\omega) \leftrightarrow y(t)$$

$$S_y(\omega) = -j\,\mathrm{sign}(\omega) S_x(\omega)$$

$$\boxed{\left|S_x(\omega)\right| = \left|S_y(\omega)\right|}$$

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСП

Спектры мощности сопряженных по Гильберту УСП:

$$\boxed{W_x(\omega) = W_y(\omega)}$$

Функции корреляции сопряженных по Гильберту УСП:

$$\boxed{R_x(\tau) = R_y(\tau)}$$

ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} =$$

$$= \overline{x(t)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\xi)}{t+\tau-\xi}d\xi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{x(t)x(\xi)}}{t+\tau-\xi}d\xi$$

ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_x(\xi - t)}{\tau - (\xi - t)}d\xi$$

Функция взаимной корреляции **сопряженных УСП сопряжена по Гильберту с *функцией корреляции УСП*:**

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = H[R_x(\tau)]}$$

ФУНКЦИЯ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^\infty F_x(\omega)\sin(\omega\tau)d\omega$$

$$R_{xy}(\tau) = a(\tau)\sin(\omega_0\tau) + b(\tau)\cos(\omega_0\tau)$$

Свойства *функции взаимной корреляции* сопряженных УСП :

1. Нечетность: $R_{xy}(\tau) = -R_{xy}(-\tau)$

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СОПРЯЖЕННЫХ УСП

2. Некоррелированность сопряженных УСП в совмещенных сечениях:

$$\boxed{R_{xy}(0) = 0}$$

3. Свойство перестановки:

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau)}$$

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИНФАЗНОЙ И КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУД УСП

Реализации сопряженных по Гильберту УСП:

$$\begin{cases} x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t) - B(t)\sin(\omega_0 t) \\ y(t) = B(t)\cos(\omega_0 t) + A(t)\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

Синфазная и квадратурные амплитуды реализации УСП:

$$A(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) - y(t)\sin(\omega_0 t)$$

$$B(t) = -x(t)\sin(\omega_0 t) + y(t)\cos(\omega_0 t)$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ СИНФАЗНОЙ АМПЛИТУДЫ УСП

$$R_A(\tau) = \overline{A(t)A(t+\tau)} = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)\cdot$$

$$\cdot[\overline{x(t)x(t+\tau)} + \overline{y(t)y(t+\tau)}] + \frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot\sin(\omega_0\tau)[\overline{x(t)y(t+\tau)} - \overline{y(t)x(t+\tau)}]$$

$$R_A(\tau) = R_x(\tau)\cos(\omega_0\tau) + R_{xy}(\tau)\sin(\omega_0\tau)$$

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СИНФАЗНОЙ И КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУД УСП

$$R_A(\tau) = a(\tau), R_A(\tau) = a(\tau)$$

$$R_{AB}(\tau) = b(\tau)$$

Дисперсии синфазной и квадратурной амплитуд УСП:

$$\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = a(0) = \sigma_x^2$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

Синфазная и квадратурная амплитуды нормального УСП распределены по закону Гаусса

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП

Двумерная плотность вероятности нормальных синфазной и квадратурной амплитуд УСП:

$$p(A,B) = p(A)\,p(B)$$

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A} e^{-\frac{A^2}{2\sigma_A^2}}$$

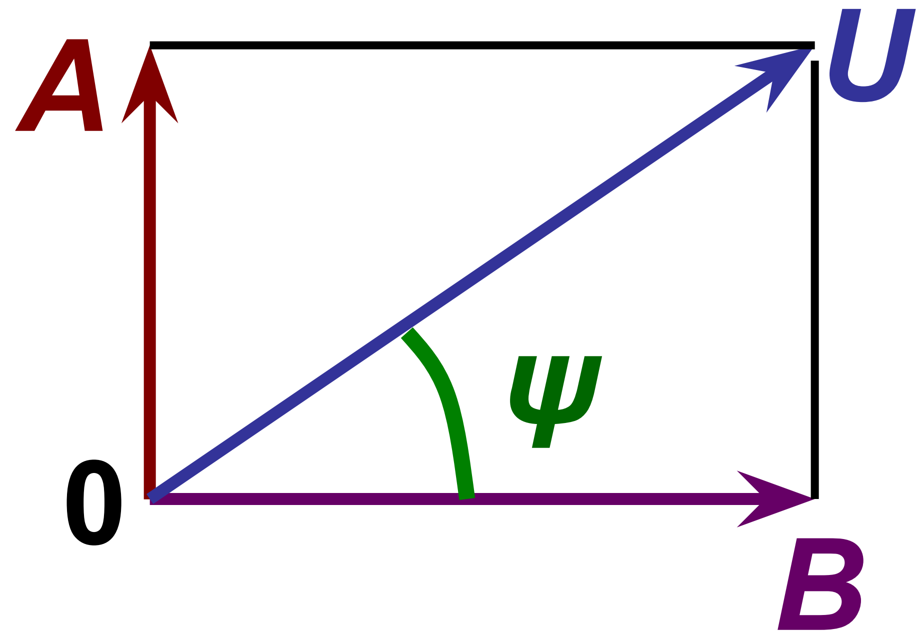
ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП

$$p(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} e^{-\frac{B^2}{2\sigma_B^2}}$$

$$p(A, B) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2 + B^2}{2\sigma_x^2}}$$

ХАРАКТЕРИСТИКИ НОРМАЛЬНЫХ УСП

$$\begin{cases} A = U\cos\psi \\ B = U\sin\psi \end{cases}$$



U – огибающая УСП

ψ – аргумент комплексной огибающей УСП

ЯКОБИАН ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial U} & \dfrac{\partial A}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial B}{\partial U} & \dfrac{\partial B}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\psi & -U\sin\psi \\ \sin\psi & U\cos\psi \end{vmatrix} = U$$

ДВУМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ И ФАЗЫ УСП

$$p(U,\psi) = p(A,B)\left|D\right| =$$

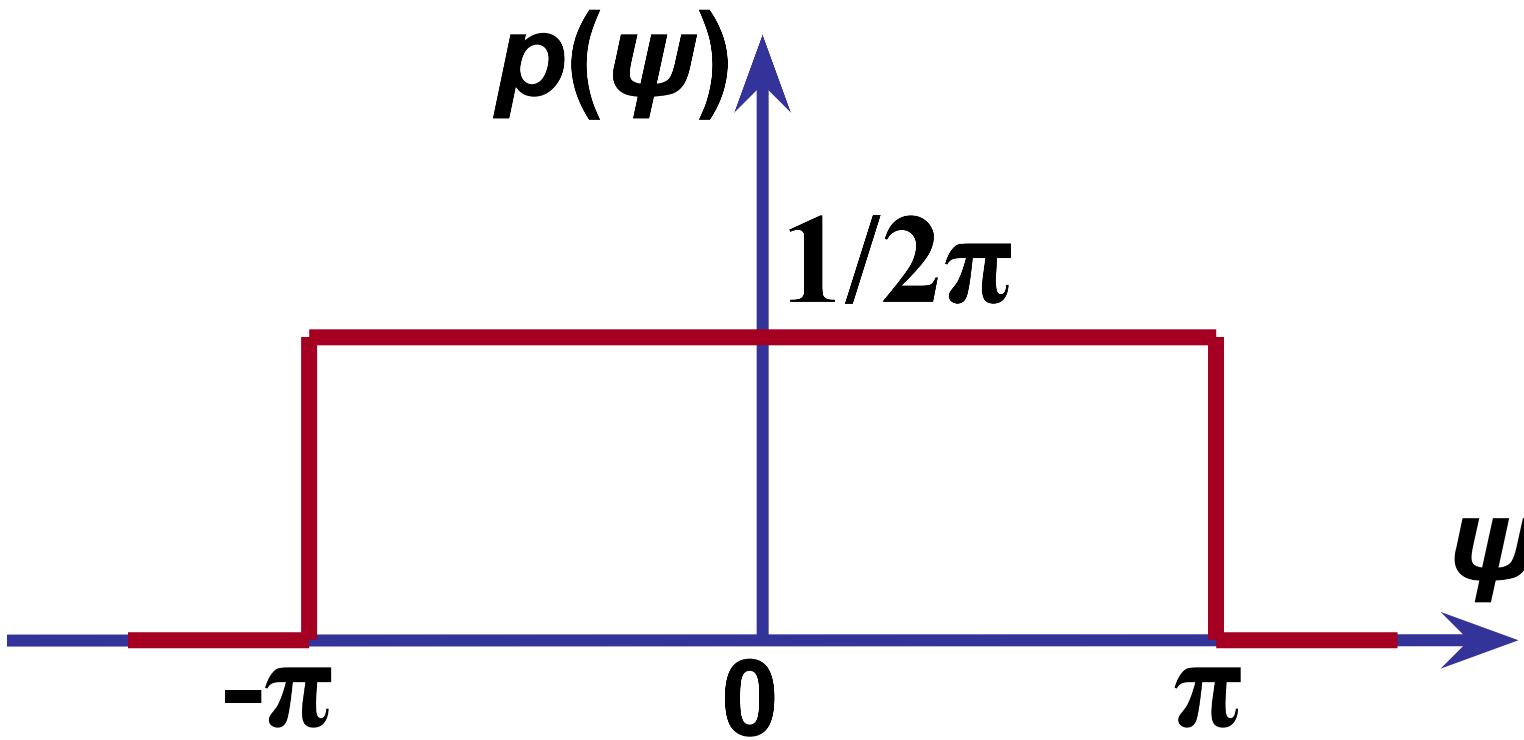
$$= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}$$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ УСП

$$p(\psi) = \int_0^\infty p(U,\psi)dU =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} dU = \frac{1}{2\pi}$$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ УСП



Фаза УСП распределена равномерно на интервале $(-\pi, \pi)$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ УСП

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(U,\psi)\,d\psi =$$

$$= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}$$

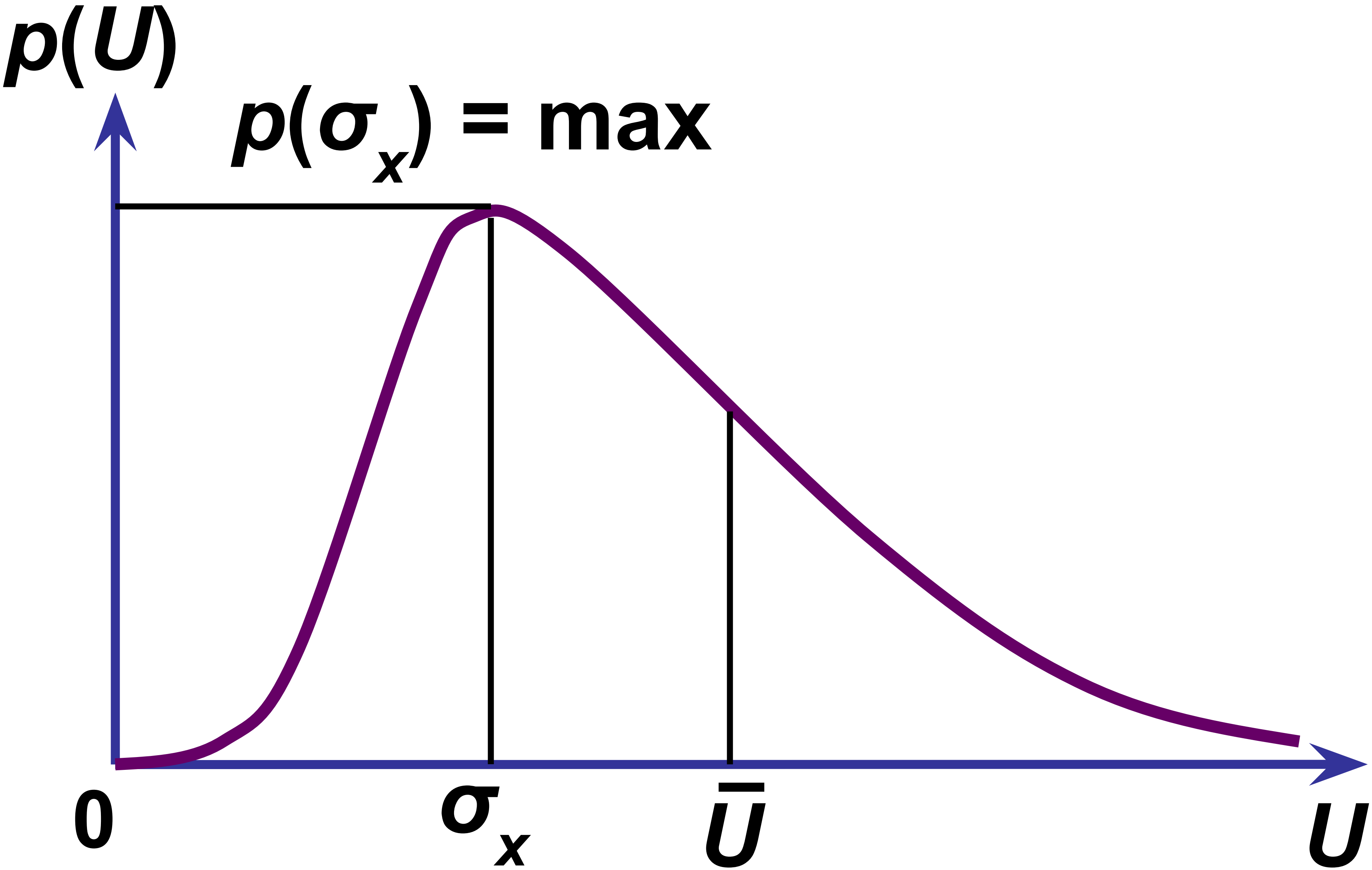
ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТ ФАЗЫ И ОГИБАЮЩЕЙ УСП

$$p(\psi)p(U) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= p(U,\psi)$$

Модуль и аргумент комплексной огибающей УСП статистически независимы

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ



РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

- **мода** $U = \sigma_x$ -
  - максимум распределения

$$p(\sigma_x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{e}}$$

- **математическое ожидание** огибающей

$$\overline{U} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_x$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

- **средний квадрат**

$$\boxed{\overline{U^2} = 2\sigma_x^2}$$

- **дисперсия**

$$\boxed{\sigma_U^2 = \overline{U^2} - \overline{U}^2 = \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

ДВУМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

$$p(U,U_\tau)=\frac{UU_\tau}{\sigma_x^4(1-\rho^2)}e^{-\frac{U^2+U_\tau^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}}\cdot$$

$$\cdot J_0\left(\frac{\rho UU_\tau}{\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right)$$

ФУНКЦИЯ КОРРЕЛЯЦИИ ОГИБАЮЩЕЙ НОРМАЛЬНОГО УСП

$$R_U(\tau) = \overline{UU_\tau} - \overline{U}^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty UU_\tau\, p(U, U_\tau)\, dU dU_\tau -$$

$$-\frac{\pi}{2}\sigma_x^2 = \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 \left[\frac{\rho^2}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(2n-3)!!]^2}{2^{2n}(n!)^2} \rho^{2n} \right]$$

$$r_U(\tau) = \frac{R_U(\tau)}{\sigma_U^2} = 0{,}914\rho^2(\tau) + 0{,}058\rho^4(\tau) + \ldots$$

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СУММЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ И НОРМАЛЬНОГО УСП

$$y(t) = U_m \cos\omega_0 t + x(t) =$$

$$= \left[U_m + A(t)\right]\cos\omega_0 t - B(t)\sin\omega_0 t =$$

$$= U(t)\cos[\omega_0 t + \psi(t)]$$

$$\begin{cases} A = U\cos\psi - U_m \\ B = U\sin\psi \end{cases}$$

ЯКОБИАН ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial U} & \dfrac{\partial A}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial B}{\partial U} & \dfrac{\partial B}{\partial \varphi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\psi & -U\sin\psi \\ \sin\psi & U\cos\psi \end{vmatrix} = U$$

$$p(U,\psi) = p(A,B)\left|D\right| =$$

$$= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{A^2+B^2}{2\sigma_x^2}} =$$

$$= \frac{U}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2+U_m^2-2U_mU\cos\psi}{2\sigma_x^2}}$$

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ОГИБАЮЩЕЙ

$$p(U) = \int_{-\pi}^{\pi} p(U,\psi)\,d\psi =$$

$$= \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma_x^2}} J_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right)$$

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\psi} d\psi$$

$$J_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{UU_m \cos\psi}{\sigma_x^2}} d\psi$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЙСА

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2 + U_m^2}{2\sigma_x^2}} J_0\left(\frac{UU_m}{\sigma_x^2}\right)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

$$\frac{U_m}{\sigma_x} = 0, \; p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}}$$

НОРМАЛИЗАЦИЯ ОГИБАЮЩЕЙ

$$x >> 1, J_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{x}$$

$$\frac{U_m}{\sigma_x} >> 1, p(U) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{\frac{(U-U_m)^2}{\sigma_x^2}}$$

НОРМАЛИЗАЦИЯ ОГИБАЮЩЕЙ