Лабораторная работа №5

Численный расчет консольной балки постоянного сечения под действием поперечных распределенных и сосредоточенных сил и изгибающих моментов в статической постановке ослабленным методом Бубнова-Галеркина (ОМБГ). Распределенная сила заданной интенсивности.

ЛР-5.1 : Консольная балка постоянного сечения под действием поперечной распределенной силы постоянной интенсивностью q;

ЛР-5.2 : Консольная балка постоянного сечения под действием поперечной распределенной силы линейно-изменяющейся интенсивности.

Рекомендуется при решении данной задачи опираться на файл ЛР-3.

ЛР-5.1: Постановка задачи и алгоритм ОМБГ

Ослабленные формулировки метода взвешенных невязок, примером которых является ослабленный метод Бубнова-Галеркина, представляют определнную трудность в применении численного алгоритма.
Рассмотрим четырехпролетную консольную балку (рис.1) постоянного сечения под действием поперечных распределенной и сосредоточенной сил и изгибающего момента. Распределенная сила постоянной интенсивности.
Пусть координатная ось X совпадает с центральной осью балки, а вертикальная Y направлена вверх (начало координат совпадает с центром левого торца балки).
Рассмотрим основное уравнение прямого метода взвешенных невязок в форме метода Бубнова-Галеркина применительно к задаче изгиба стержня:

$$\int_0^L Rw\,dx = 0$$

где w - весовая функция, L - длина стержня

Подставляя выражение функции невязки, получаем:

$$\int_0^L [(EJu''(x))'' - q_y(x)]wdx = 0$$

ЛР-5.1: Постановка задачи и алгоритм ОМБГ (продолжение)

Вычислим интеграл от левой части выражения в скобках, путем двукратного применения формулы интегрирования произведения двух функций по частям (понижаем порядок производной под интегралом). Получаем:

$$[(EJu''(x))'w]\cdot\Big|_0^L + [(-EJu''(x))w']\Big|_0^L + \int_0^L EJu''(x)w''\,dx = \int_0^L q_y(x)\,w\,dx$$

Учитывая выражения для изгибающего момента и поперечной силы в сечении стержня, а также то, что по методу Бубнова-Галеркина для задания вида приближенного решения и весовой функции используются одинаковые базисные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям (рис.1), окончательное уравнение ослабленного варианта метода взвешенных невязок для рассматриваемой задачи изгиба стержня примет вид:

$$\int_0^L EJu''(x)\,w''(x)\,dx = \int_0^L q_y(x)\,w(x)\,dx + \varphi 1\left(x_P\right)\cdot P + Mw'(L)$$

ЛР-5.1: Постановка задачи и алгоритм ОМБГ (продолжение)

Таким образом, основной особенностью алгоритма ослабленных формулировок является то, что для минимилизации функции невязки используется преобразованное интегральное уравнение, в котором порядок производной искомой функции понижен за счет применения формулы интегрирования по частям. Данное свойство приводит к двум существенным следствиям:

1. силовые граничные условия фигурируют уже в самом интегральном уравнении и могут быть приближенно удовлетворены в результате его решения;
2. пониженный порядок производной искомой функции позволяет использовать аппроксимирующие функции меньшего порядка непрерывности. При этом приближенное решение должно удовлетворять только существенным (кинематическим - в механике) граничным условиям, в то время как естественные (силовые - в механике) граничные условия выполняются приближенно в интегральном уравнении ослабленного метода взвешанных невязок.

ЛР-5.1: Расчетная схема

Согласно постановке задачи расчетная схема (рис.1) представляет собой балку длиной $4l$, постоянного сечения bxh (рис.2). На стержень в точке x_P действует постоянная сила P, в точке x_M сосредоточенный момент M и распределенная от точки x_{q1} до точки x_{q2} сила постоянной интенсивностью q.

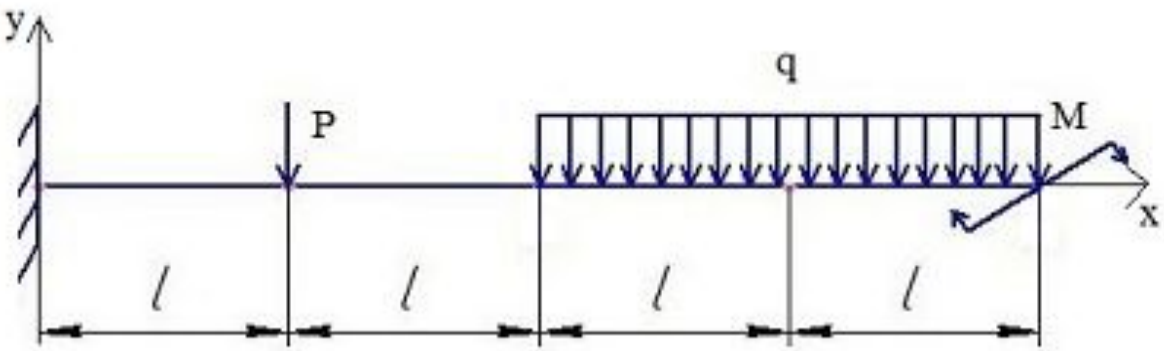

Рис.1 Расчетная схема

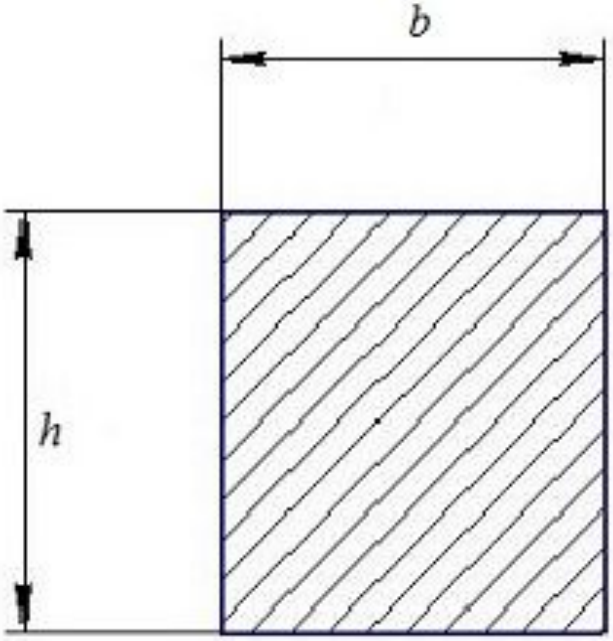

Рис.2 Сечение балки

ЛР-5.1: Исходные данные

Длина пролета балки	$l = 0.5$	м
Длина всей балки	$L = 4 \cdot l = 2$	м
Значение сосредоточенной силы	$P = -5000$	Н
Точка приложения сосредоточенной силы	$x_P = 1 \cdot l$	м
Значение распределенной нагрузки	$q = -10000$	$\frac{Н}{м}$
Точки приложения распределенной нагрузки (начало и конец соответсвенно)	$x_{q1} = 2 \cdot l$	м
	$x_{q2} = 4 \cdot l$	м
Значение сосредоточенного момента	$M = -5000$	Н·м
Точка приложения сосредоточенной силы	$x_M := 4 \cdot l$	м

Материал: сталь

Модуль Юнга для углеродистой стали	$E := 2 \cdot 10^{11}$	Па
Плотность углеродистой стали	$\rho = 7.8 \cdot 10^{3}$	$\frac{кг}{м^3}$
Сечение в виде прямоугольника (рис.2)	$b = 0.1$	м
	$h = 0.1$	м
Момент инерции сечения	$J_z = b \cdot \frac{h^3}{12} = 8.333 \times 10^{-6}$	$м^4$
Осевой момент сопротивления сечения	$W_z := b \cdot \frac{h^2}{6} = 166.667 \times 10^{-6}$	$м^3$

ЛР-5.1: Блок описания нагрузки

В данной постановке к силе $q^*(x)$ можно отнести распределенную силу $q_y(x)$ интенсивности q, приложенную в пролете балки ($2l<x<4l$), а также сосредоточенную силу P, приложенную в точке ($x_P=l$), которую можно представить в виде расределенной нагрузки с помощью дельта-функции Дирака. В результате получаем: $q^*(x)=q_y(x)+P\delta(x-l)$, где

$q_y(x)=q$ *при* $2l<x<4l$

$q_y(x)=0$ во всех остальных случаях.

Смоделируем $q_y(x)$ (рис.3) согласно постановке задачи (рис.1)

$$q_y(x) = q\cdot\left(\Phi\left(x - x_{q1}\right) - \Phi\left(x - x_{q2}\right)\right)$$

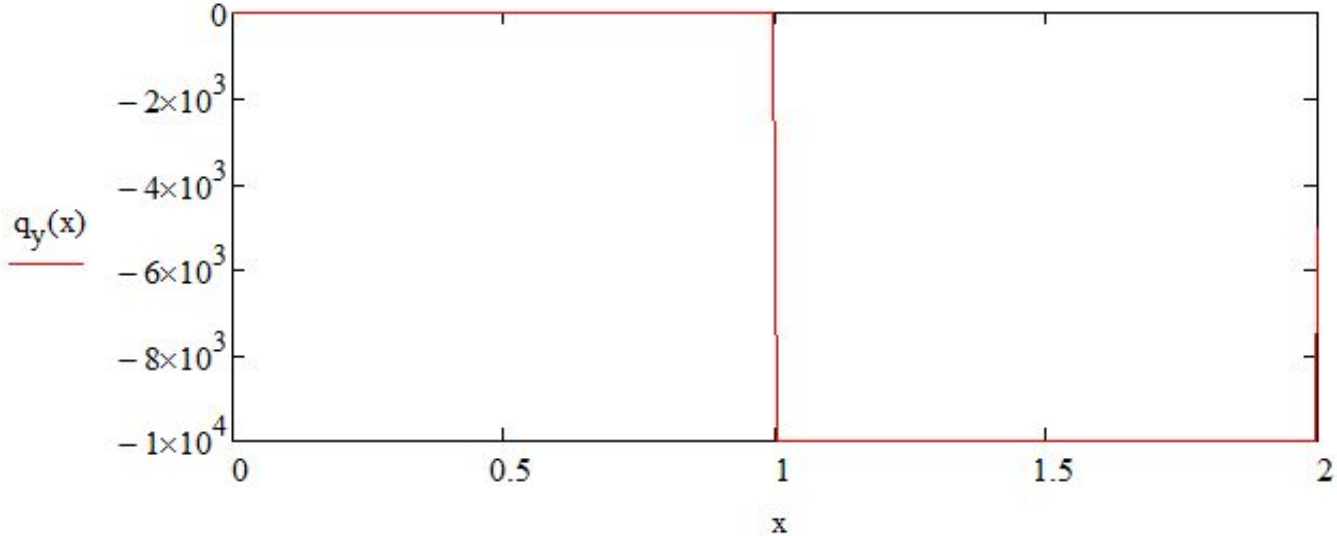

Рис.3 Распределенная нагрузка с постоянной интенсивностью

ЛР-5.1: ГУ

Существенные (кинематические) условия для данной задачи имеют вид:

$v(0)=0$ - *прогиб в жесткой заделке*

$v'(0)=0$ - *угол поворота в жесткой заделке*

ЛР-5.1:ОМБГ: Первое приближение (1П)

Используя описанные выше свойства ослабленных формулировок, построим приближенное решение в виде полиномов второго порядка, то есть на два порядка меньше, чем ранее использованное приближенное решение для прямых методов:

$$v(x, a0, a1, a2) = a0 + a1 \cdot x + a2 \cdot x^2$$

$$v1(x, a0, a1, a2) = \frac{d}{dx} v(x, a0, a1, a2)$$

Неизвестные коэффициенты $a_0 \ldots a_2$ определяются из граничных условий (рис.1) и записываются в виде системы уравнений:

Given

$$v(0, a0, a1, a2) = 0$$

$$v1(0, a0, a1, a2) = 0$$

$$A(a2) = \mathrm{Find}(a0, a1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 1П (продолжение)

Тогда необходимый вид приближенного решения можно записать в виде функции, зависящей от a_2:

$$V(x,a2) = A(a2)_0 + A(a2)_1 \cdot x + a2 \cdot x^2$$

$$U(x,a2) = V(x,a2)$$

$$U(x,a2) \rightarrow x^2 \cdot a2$$

где *φ1(x)* - базисная функция:

$$\varphi 1(x) = x^2$$

$$U2(x,a2) = \frac{d^2}{dx^2}(U(x,a2)) \rightarrow 2 \cdot a2$$

$$U2(x,a2) \rightarrow 2 \cdot a2$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 1П (продолжение)

Для упрощения вычислений введем дополнительные функции - первую и вторую производные от базисных функций:

$$\varphi 11(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 1(x) \rightarrow 2\cdot x$$

$$\varphi 12(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 11(x) \rightarrow 2$$

Given

$$\int_0^L E\cdot J_z\cdot U2(x,a2)\cdot\varphi 12(x)\,dx = \int_0^L q_y(x)\cdot\varphi 1(x)\,dx + \varphi 1\left(x_P\right)\cdot P + M\cdot\varphi 11\left(x_M\right)$$

$$S := \mathrm{Find}(a2) \rightarrow -3.344\times 10^{-3}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 1П: Анализ результатов (Displ)

Перемещения $\quad Displ(x) := U(x, S)$

Значения прогибов, полученные численным методом (красная линия на рис. 4.1)

$Displ(0) = 0$ м

$Displ(l) = -835.937 \times 10^{-6}$ м

$Displ(2 \cdot l) = -3.344 \times 10^{-3}$ м

$Displ(3 \cdot l) = -7.523 \times 10^{-3}$ м

$Displ(4 \cdot l) = -13.375 \times 10^{-3}$ м

Значения прогибов, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 4.1)

$$aDispl := \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \cdot 10^{-3} \\ -5.3 \cdot 10^{-3} \\ -10.7 \cdot 10^{-3} \\ -17 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ м} \qquad al := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \cdot l \\ 3 \cdot l \\ 4 \cdot l \end{pmatrix} \text{ м}$$

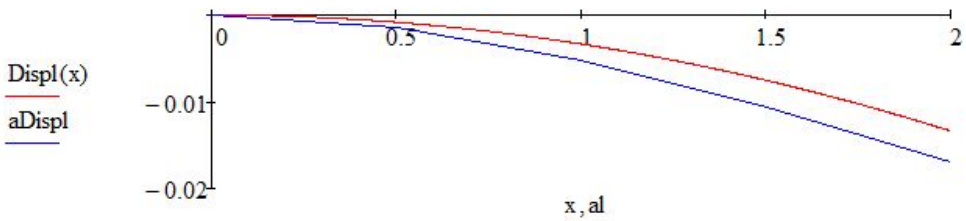

Рис. 4.1 Прогиб балки

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$\Delta_{Displ0} := 0 \quad \%$

$$\Delta_{Displ4l} := \left| \frac{Displ(4 \cdot l) - aDispl_4}{Displ(4 \cdot l)} \right| \cdot 100 = 27.103 \quad \%$$

Графики внутренних силовых факторов (Q_y и M_z) и напряжений (σ) постройте самостоятельно на основе ЛР-3.

Анализируя полученные данные, можно сделать вывод, что в первом приближении ОМБГ дает результат с высокой погрешностью.

Для дальнейшего исследования получим значения при решении задачи в третьем приближении.

ЛР-5.1: ОМБГ: Третье приближение (3П)

Используя описанные выше свойства ослабленных формулировок, построим приближенное решение в виде полиномов высшего порядка:

$$v(x, a0, a1, a2, a3, a4) = a0 + a1 \cdot x + a2 \cdot x^2 + a3 \cdot x^3 + a4 \cdot x^4$$

$$v1(x, a0, a1, a2, a3, a4) = \frac{d}{dx} v(x, a0, a1, a2, a3, a4)$$

Неизвестные коэффициенты $a_0 \ldots a_4$ определяются из граничных условий (рис.1) и записываются в виде системы уравнений:

Given

$$v(0, a0, a1, a2, a3, a4) = 0$$

$$v1(0, a0, a1, a2, a3, a4) = 0$$

$$A(a2, a3, a4) = \mathrm{Find}(a0, a1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: ЗП (продолжение)

Тогда необходимый вид приближенного решения можно записать в виде функции, зависящей от a_4:

$$V(x, a2, a3, a4) = A(a2, a3, a4)_0 + A(a2, a3, a4)_1 \cdot x + a2 \cdot x^2 + a3 \cdot x^3 + a4 \cdot x^4$$

$$U(x, a2, a3, a4) = V(x, a2, a3, a4)$$

$$U(x, a2, a3, a4) \rightarrow x^2 \cdot a2 + x^3 \cdot a3 + x^4 \cdot a4$$

где $\varphi(x)$ - базисные функции:

$$\varphi1(x) = x^2$$

$$\varphi2(x) = x^3$$

$$\varphi3(x) = x^4$$

$$U2(x, a2, a3, a4) = \frac{d^2}{dx^2}(U(x, a2, a3, a4)) \rightarrow 12 \cdot a4 \cdot x^2 + 6 \cdot a3 \cdot x + 2 \cdot a2$$

$$U2(x, a2, a3, a4) \rightarrow 2 \cdot a2 + 6 \cdot x \cdot a3 + 12 \cdot x^2 \cdot a4$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П (продолжение)

Для упрощения вычислений введем дополнительные функции - первую и вторую производные от базисных функций:

$$\varphi 1_{11}(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 1(x) \rightarrow 2\cdot x$$

$$\varphi 1_{12}(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 1_{11}(x) \rightarrow 2$$

$$\varphi 2_{11}(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 2(x) \rightarrow 3\cdot x^2$$

$$\varphi 2_{12}(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 2_{11}(x) \rightarrow 6\cdot x$$

$$\varphi 3_{11}(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 3(x) \rightarrow 4\cdot x^3$$

$$\varphi 3_{12}(x) = \frac{d^1}{dx^1}\varphi 3_{11}(x) \rightarrow 12\cdot x^2$$

ЛР-5.1: ОМБГ: ЗП (продолжение)

Given

$$\int_0^L E\cdot J_z\cdot U2(x,a2,a3,a4)\cdot \varphi 1_{12}(x)\,dx = \int_0^L q_y(x)\cdot \varphi 1(x)\,dx + \varphi 1(x_P)\cdot P + M\cdot \varphi 1_{11}(x_M)$$

$$\int_0^L E\cdot J_z\cdot U2(x,a2,a3,a4)\cdot \varphi 2_{12}(x)\,dx = \int_0^L q_y(x)\cdot \varphi 2(x)\,dx + \varphi 2(x_P)\cdot P + M\cdot \varphi 2_{11}(x_M)$$

$$\int_0^L E\cdot J_z\cdot U2(x,a2,a3,a4)\cdot \varphi 3_{12}(x)\,dx = \int_0^L q_y(x)\cdot \varphi 3(x)\,dx + \varphi 3(x_P)\cdot P + M\cdot \varphi 3_{11}(x_M)$$

$$S := \mathrm{Find}(a2,a3,a4) \rightarrow \begin{pmatrix} -6.779\times 10^{-3} \\ 1.654\times 10^{-3} \\ -190.918\times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: ЗП: Анализ результатов (Displ)

Перемещения $\mathrm{Displ}(x) := U(x, S_0, S_1, S_2)$

Значения прогибов, полученные численным методом (красная линия на рис. 4.2)

$\mathrm{Displ}(0) = 0$ м

$\mathrm{Displ}(l) = -1.5 \times 10^{-3}$ м

$\mathrm{Displ}(2 \cdot l) = -5.316 \times 10^{-3}$ м

$\mathrm{Displ}(3 \cdot l) = -10.637 \times 10^{-3}$ м

$\mathrm{Displ}(4 \cdot l) = -16.937 \times 10^{-3}$ м

Значения прогибов, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 4.2)

$$\mathrm{aDispl} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \cdot 10^{-3} \\ -5.3 \cdot 10^{-3} \\ -10.7 \cdot 10^{-3} \\ -17 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ м} \qquad \mathrm{al} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \cdot l \\ 3 \cdot l \\ 4 \cdot l \end{pmatrix} \text{ м}$$

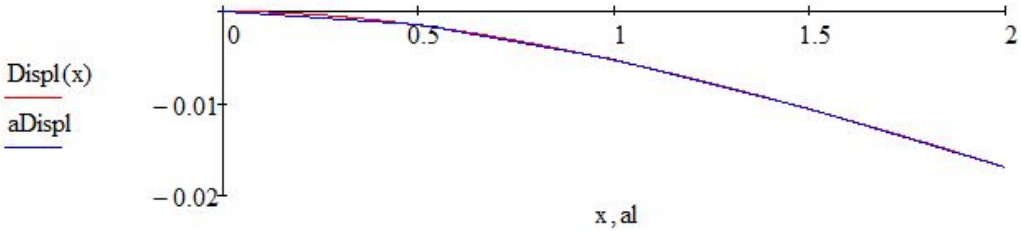

Рис. 4.2 Прогиб балки

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$\Delta_{\mathrm{Displ0}} := 0$ %

$$\Delta_{\mathrm{Displ4l}} := \left| \frac{\mathrm{Displ}(4 \cdot l) - \mathrm{aDispl}_4}{\mathrm{Displ}(4 \cdot l)} \right| \cdot 100 = 369.004 \times 10^{-3} \quad \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: ЗП: Анализ результатов (Q_y)

Поперечная сила $Q_y(x) = E \cdot J_z \cdot \left(\frac{d^3}{dx^3} Displ(x) \right)$

Значения силы, полученные численным методом (красная линия на рис. 5.2)

$Q_y(0) = 16.543 \times 10^3$ Н

$Q_y(l) = 12.725 \times 10^3$ Н

$Q_y(2 \cdot l) = 8.906 \times 10^3$ Н

$Q_y(3 \cdot l) = 5.088 \times 10^3$ Н

$Q_y(4 \cdot l) = 1.27 \times 10^3$ Н

Значения силы, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 5.2)

$$aQ_y := \begin{pmatrix} 15 \cdot 10^3 \\ 15 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 5 \cdot 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ м} \qquad al := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \text{ м}$$

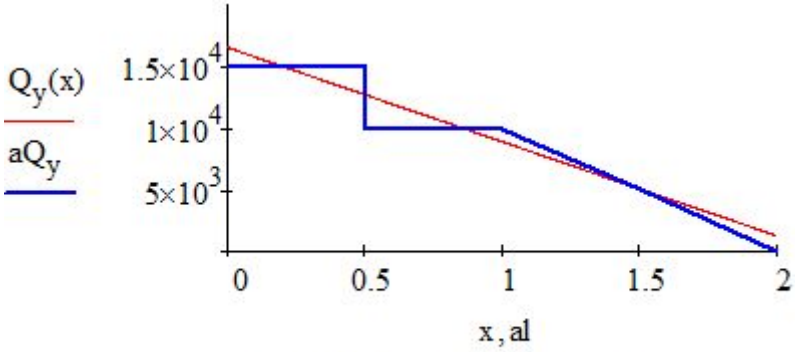

Рис.5.2 Эпюра поперечной силы

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{Qy0} := \left| \frac{Q_y(0) - aQ_{y_0}}{Q_y(0)} \right| \cdot 100 = 9.327 \quad \%$$

$$\Delta_{Qy4l} := \left| \frac{Q_y(4l) - aQ_{y_5}}{Q_y(4l)} \right| \cdot 100 = 100 \quad \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: ЗП: Анализ результатов (M_z)

Изгибающий момент $M_z(x) = E \cdot J_z \cdot \frac{d^2}{dx^2}(Displ(x))$

Значения моментов, полученные численным методом (красная линия на рис. 6.2)

$M_z(0) = -22.598 \times 10^3$ Н·м

$M_z(l) = -15.281 \times 10^3$ Н·м

$M_z(2 \cdot l) = -9.873 \times 10^3$ Н·м

$M_z(3 \cdot l) = -6.375 \times 10^3$ Н·м

$M_z(4 \cdot l) = -4.785 \times 10^3$ Н·м

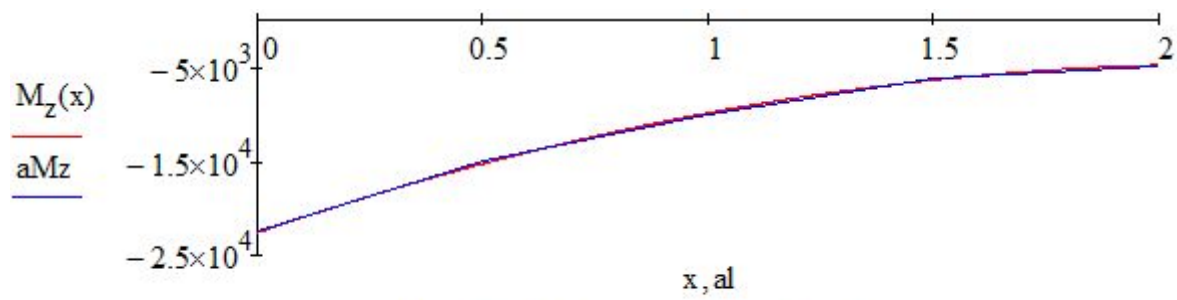

Рис. 6.2 Эпюра изгибающего момента

Значения моментов, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 6.2)

$$aMz := \begin{pmatrix} -22.5 \cdot 10^3 \\ -15 \cdot 10^3 \\ -10 \cdot 10^3 \\ -6.25 \cdot 10^3 \\ -5 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \text{ Н·м} \qquad al := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \cdot l \\ 3 \cdot l \\ 4 \cdot l \end{pmatrix} \text{ м}$$

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{Mz0} := \left| \frac{M_z(0) - aMz_0}{M_z(0)} \right| \cdot 100 = 432.152 \times 10^{-3} \quad \%$$

$$\Delta_{Mz4l} := \left| \frac{M_z(4l) - aMz_4}{M_z(4l)} \right| \cdot 100 = 4.49 \quad \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: ЗП: Анализ результатов (σ)

Напряжения $\sigma(x) = \dfrac{M_z(x)}{W_z}$

Значения напряжений, полученные численным методом (красная линия на рис. 7.2)

$\sigma(0) = -135.586 \times 10^6$ Па

$\sigma(l) = -91.685 \times 10^6$ Па

$\sigma(2 \cdot l) = -59.238 \times 10^6$ Па

$\sigma(3 \cdot l) = -38.247 \times 10^6$ Па

$\sigma(4 \cdot l) = -28.711 \times 10^6$ Па

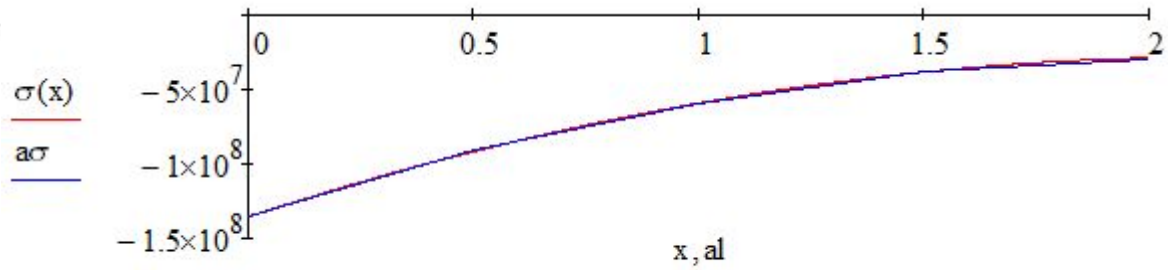

Рис. 7.2 Эпюра нормальных напряжений

Значения напряжений, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 7.2)

$$a\sigma := \begin{pmatrix} -135 \cdot 10^6 \\ -90 \cdot 10^6 \\ -60 \cdot 10^6 \\ -37.5 \cdot 10^6 \\ -30 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \text{ Па} \qquad al := \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 2 \cdot l \\ 3 \cdot l \\ 4 \cdot l \end{pmatrix} \text{ м}$$

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{\sigma 0} := \left| \frac{\sigma(0) - a\sigma_0}{\sigma(0)} \right| \cdot 100 = 432.152 \times 10^{-3} \quad \%$$

$$\Delta_{\sigma 4l} := \left| \frac{\sigma(4l) - a\sigma_4}{\sigma(4l)} \right| \cdot 100 = 4.49 \quad \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: Итоги

Данная работа наглядно продемонстрировала улучшение результатов при повышении порядка приближения. Существенным недостатком осталось численное моделирование кусочно-постоянных функций.

Дальнейшее исследование: необходимо для заданной схемы нагружения (рис.1) сравнить значения перемещений, внутренних силовых факторов и напряжений, полученные в третьем приближении прямым и ослабленным методами Бубнова-Галеркина.
Полученные результаты оформить в таблицу и сделать выводы о достоинствах и недостатках каждого метода.

ЛР-5.2: Постановка задачи

Опираясь на ЛР-3.2, произвести численный расчет консольной балки постоянного сечения под действием поперечных распределенных и сосредоточенных сил и изгибающих моментов в статической постановке (ОМБГ). Распределенная сила линейно-изменяющейся интенсивности.

Согласно постановке задачи расчетная схема (рис.1) представляет собой стержень длиной $4l$, постоянного сечения bxh (рис.2). На стержень в точке x_P действует постоянная сила P, в точке x_M сосредоточенный момент M и распределенная от точки x_{q1} до точки x_{q2} сила линейно-изменяющейся от 0 до 10кН интенсивностью q.

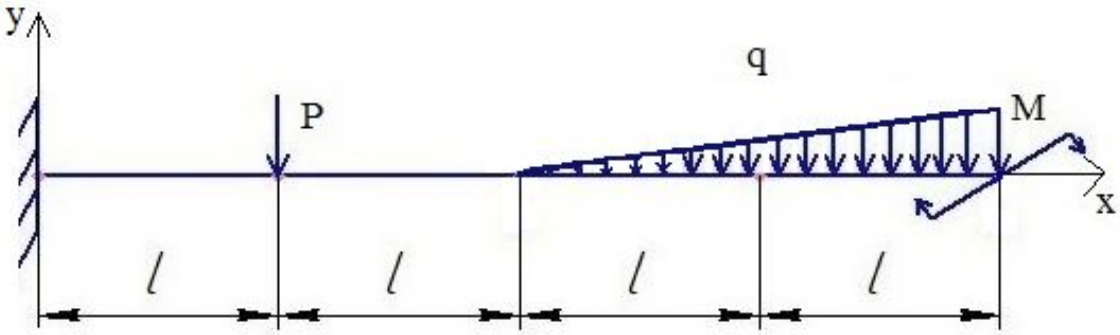

Рис.1 Расчетная схема

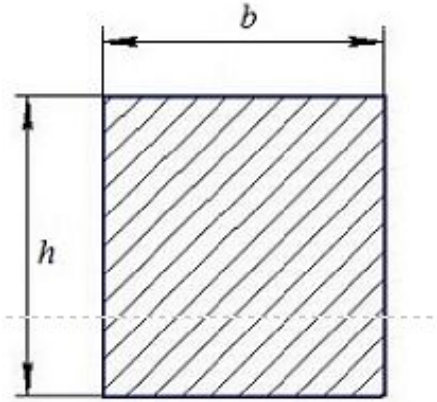

Рис.2 Сечение балки