

Лабораторная работа №5

Численный расчет консольной балки постоянного сечения под действием поперечных распределенных и сосредоточенных сил и изгибающих моментов в статической постановке ослабленным методом Бубнова-Галеркина (ОМБГ). Распределенная сила заданной интенсивности.

ЛР-5.1 : Консольная балка постоянного сечения под действием поперечной распределенной силы постоянной интенсивностью q ;

ЛР-5.2 : Консольная балка постоянного сечения под действием поперечной распределенной силы линейно-изменяющейся интенсивности.

Рекомендуется при решении данной задачи опираться на файл ЛР-3.

ЛР-5.1: Постановка задачи и алгоритм ОМБГ

Ослабленные формулировки метода взвешенных невязок, примером которых является ослабленный метод Бубнова-Галеркина, представляют определенную трудность в применении численного алгоритма.

Рассмотрим четырехпролетную консольную балку (рис.1) постоянного сечения под действием поперечных распределенной и сосредоточенной сил и изгибающего момента. Распределенная сила постоянной интенсивности.

Пусть координатная ось X совпадает с центральной осью балки, а вертикальная Y направлена вверх (начало координат совпадает с центром левого торца балки). Рассмотрим основное уравнение прямого метода взвешенных невязок в форме метода Бубнова-Галеркина применительно к задаче изгиба стержня:

$$\int_0^L R w \, dx = 0$$

где w - весовая функция, L - длина стержня

Подставляя выражение функции невязки, получаем:

$$\int_0^L [(EJ u''(x))'' - q_y(x)] w \, dx = 0$$

ЛР-5.1: Постановка задачи и алгоритм ОМБГ (продолжение)

Вычислим интеграл от левой части выражения в скобках, путем двукратного применения формулы интегрирования произведения двух функций по частям (понижаем порядок производной под интегралом). Получаем:

$$[(EJu''(x))'w] \cdot \Big|_0^L + [(-EJu''(x))w'] \Big|_0^L + \int_0^L EJu''(x)w'' dx = \int_0^L q_y(x)w dx$$

Учитывая выражения для изгибающего момента и поперечной силы в сечении стержня, а также то, что по методу Бубнова-Галеркина для задания вида приближенного решения и весовой функции используются одинаковые базисные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям (рис.1), окончательное уравнение ослабленного варианта метода взвешенных невязок для рассматриваемой задачи изгиба стержня примет вид:

$$\int_0^L EJu''(x)w''(x) dx = \int_0^L q_y(x)w(x) dx + \varphi_1(x_p) \cdot P + Mw'(L)$$

ЛР-5.1: Постановка задачи и алгоритм ОМБГ (продолжение)

Таким образом, основной особенностью алгоритма ослабленных формулировок является то, что для минимизации функции невязки используется преобразованное интегральное уравнение, в котором порядок производной искомой функции понижен за счет применения формулы интегрирования по частям. Данное свойство приводит к двум существенным следствиям:

1. силовые граничные условия фигурируют уже в самом интегральном уравнении и могут быть приближенно удовлетворены в результате его решения;
2. пониженный порядок производной искомой функции позволяет использовать аппроксимирующие функции меньшего порядка непрерывности. При этом приближенное решение должно удовлетворять только существенным (кинематическим - в механике) граничным условиям, в то время как естественные (силовые - в механике) граничные условия выполняются приближенно в интегральном уравнении ослабленного метода взвешанных невязок.

ЛР-5.1: Расчетная схема

Согласно постановке задачи расчетная схема (рис.1) представляет собой балку длиной $4l$, постоянного сечения $b \times h$ (рис.2). На стержень в точке x_P действует постоянная сила P , в точке x_M сосредоточенный момент M и распределенная от точки x_{q1} до точки x_{q2} сила постоянной интенсивностью q .

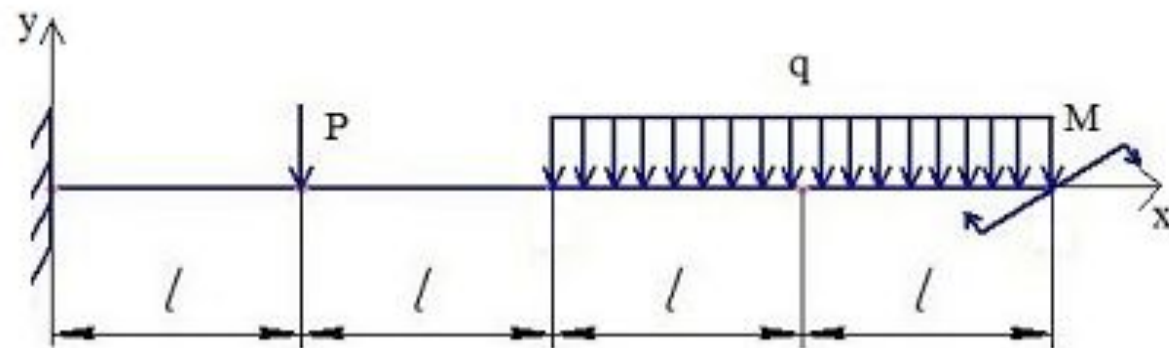


Рис.1 Расчетная схема

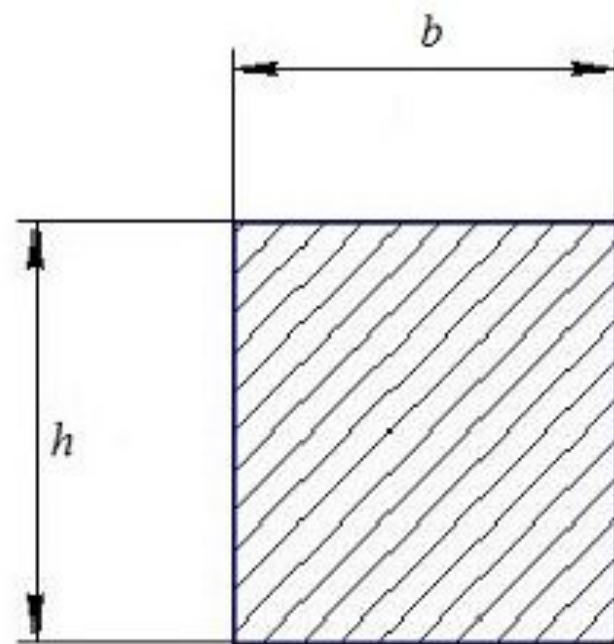


Рис.2 Сечение балки

ЛР-5.1: Исходные данные

Длина пролета балки	$l = 0.5$	м	Материал: сталь		
Длина всей балки	$L = 4 \cdot l = 2$	м	Модуль Юнга для углеродистой стали	$E := 2 \cdot 10^{11}$	Па
Значение сосредоточенной силы	$P = -5000$	Н	Плотность углеродистой стали	$\rho = 7.8 \cdot 10^3$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
Точка приложения сосредоточенной силы	$x_P = 1 \cdot l$	м	Сечение в виде прямоугольника (рис.2)	$b = 0.1$ $h = 0.1$	м м
Значение распределенной нагрузки	$q = -10000$	$\frac{\text{Н}}{\text{м}}$	Момент инерции сечения	$J_Z = b \cdot \frac{h^3}{12} = 8.333 \times 10^{-6}$	м^4
Точки приложения распределенной нагрузки (начало и конец соответственно)	$x_{q1} = 2 \cdot l$ $x_{q2} = 4 \cdot l$	м м	Осевой момент сопротивления сечения	$W_Z := b \cdot \frac{h^2}{6} = 166.667 \times 10^{-6}$	м^3
Значение сосредоточенного момента	$M = -5000$	Н·м			
Точка приложения сосредоточенной силы	$x_M := 4 \cdot l$	м			

ЛР-5.1: Блок описания нагрузки

В данной постановке к силе $q^*(x)$ можно отнести распределенную силу $q_y(x)$ интенсивности q , приложенную в пролете балки ($2l < x < 4l$), а также сосредоточенную силу P , приложенную в точке ($x_P = l$), которую можно представить в виде распределенной нагрузки с помощью дельта-функции Дирака. В результате получаем: $q^*(x) = q_y(x) + P\delta(x-l)$, где
 $q_y(x) = q$ при $2l < x < 4l$
 $q_y(x) = 0$ во всех остальных случаях.

Смоделируем $q_y(x)$ (рис.3) согласно постановке задачи (рис.1)

$$q_y(x) = q \cdot (\Phi(x - x_{q1}) - \Phi(x - x_{q2}))$$

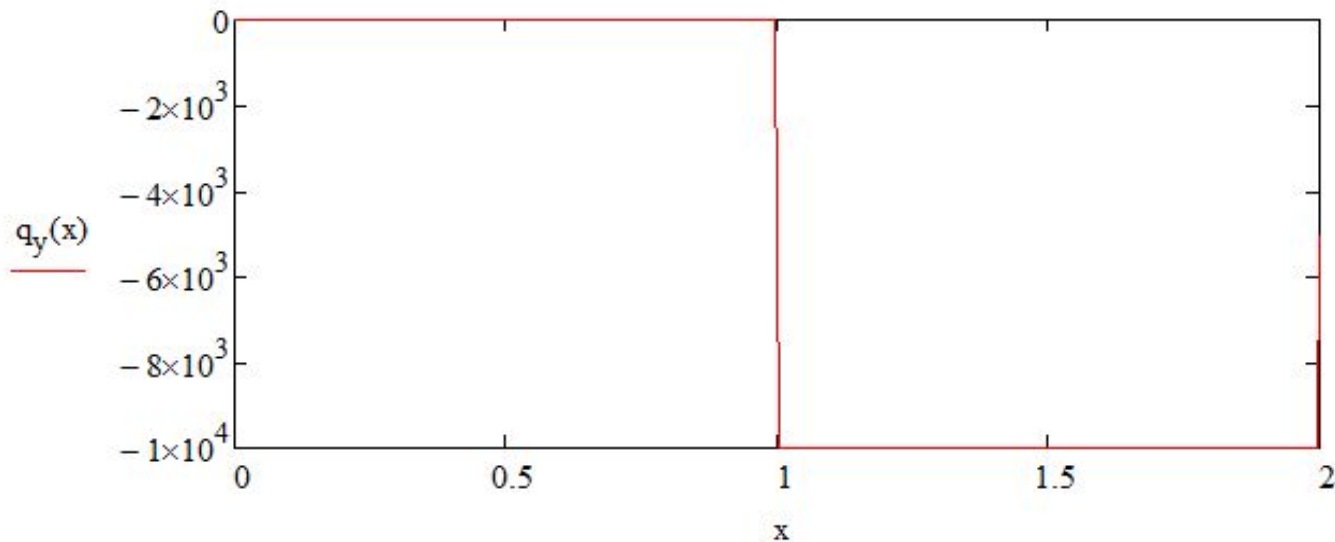


Рис.3 Распределенная нагрузка с постоянной интенсивностью

ЛР-5.1: ГУ

Существенные (кинематические) условия для данной задачи имеют вид:

$v(0)=0$ - прогиб в жесткой заделке

$v'(0)=0$ - угол поворота в жесткой заделке

ЛР-5.1:ОМБГ: Первое приближение (1П)

Используя описанные выше свойства ослабленных формулировок, построим приближенное решение в виде полиномов второго порядка, то есть на два порядка меньше, чем ранее использованное приближенное решение для прямых методов:

$$v(x, a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$v_1(x, a_0, a_1, a_2) = \frac{d}{dx} v(x, a_0, a_1, a_2)$$

Неизвестные коэффициенты a_0, \dots, a_2 определяются из граничных условий (рис.1) и записываются в виде системы уравнений:

Given

$$v(0, a_0, a_1, a_2) = 0$$

$$v_1(0, a_0, a_1, a_2) = 0$$

$$\underline{\underline{A}}(a_2) = \text{Find}(a_0, a_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 1П (продолжение)

Тогда необходимый вид приближенного решения можно записать в виде функции, зависящей от a_2 :

$$V(x, a_2) = A(a_2)_0 + A(a_2)_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$U(x, a_2) = V(x, a_2)$$

$$U(x, a_2) \rightarrow x^2 \cdot a_2$$

где $\varphi_1(x)$ - базисная функция:

$$\varphi_1(x) = x^2$$

$$U_2(x, a_2) = \frac{d^2}{dx^2}(U(x, a_2)) \rightarrow 2 \cdot a_2$$

$$U_2(x, a_2) \rightarrow 2 \cdot a_2$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 1П (продолжение)

Для упрощения вычислений введем дополнительные функции - первую и вторую производные от базисных функций:

$$\varphi_{11}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_1(x) \rightarrow 2 \cdot x$$

$$\varphi_{12}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_{11}(x) \rightarrow 2$$

Given

$$\int_0^L E \cdot J_z \cdot U_2(x, a_2) \cdot \varphi_{12}(x) dx = \int_0^L q_y(x) \cdot \varphi_1(x) dx + \varphi_1(x_P) \cdot P + M \cdot \varphi_{11}(x_M)$$

$$S := \text{Find}(a_2) \rightarrow -3.344 \times 10^{-3}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 1П:

Анализ результатов (Displ)

Перемещения $\text{Displ}(x) := U(x, S)$

Значения прогибов, полученные численным методом (красная линия на рис. 4.1)

$$\text{Displ}(0) = 0 \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(1) = -835.937 \times 10^{-6} \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(2) = -3.344 \times 10^{-3} \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(3) = -7.523 \times 10^{-3} \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(4) = -13.375 \times 10^{-3} \quad \text{м}$$

Значения прогибов, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 4.1)

$$\text{aDispl} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \cdot 10^{-3} \\ -5.3 \cdot 10^{-3} \\ -10.7 \cdot 10^{-3} \\ -17 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{м} \quad \text{a1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{м}$$

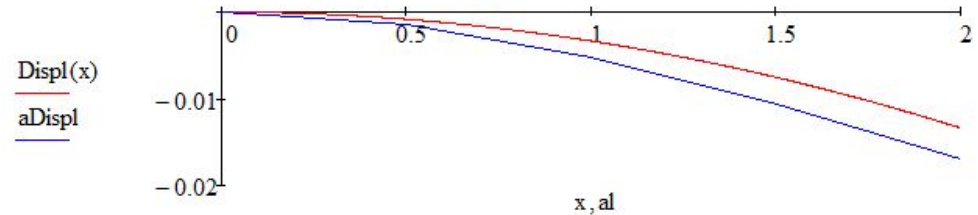


Рис. 4.1 Прогиб балки

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{\text{Displ0}} := 0 \quad \%$$

$$\Delta_{\text{Displ4}} := \left| \frac{\text{Displ}(4) - \text{aDispl}_4}{\text{Displ}(4)} \right| \cdot 100 = 27.103 \quad \%$$

Графики внутренних силовых факторов (Q_y и M_z) и напряжений (σ) постройте самостоятельно на основе ЛР-3.

Анализируя полученные данные, можно сделать вывод, что в первом приближении ОМБГ дает результат с высокой погрешностью.

Для дальнейшего исследования получим значения при решении задачи в третьем приближении.

ЛР-5.1: ОМБГ: Третье приближение (3П)

Используя описанные выше свойства ослабленных формулировок, построим приближенное решение в виде полиномов высшего порядка:

$$v(x, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

$$v_1(x, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{d}{dx} v(x, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

Неизвестные коэффициенты a_0, \dots, a_4 определяются из граничных условий (рис.1) и записываются в виде системы уравнений:

Given

$$v(0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$$

$$v_1(0, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$$

$$\underline{A}(a_2, a_3, a_4) = \text{Find}(a_0, a_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П (продолжение)

Тогда необходимый вид приближенного решения можно записать в виде функции, зависящей от a_4 :

$$V(x, a_2, a_3, a_4) = A(a_2, a_3, a_4)_0 + A(a_2, a_3, a_4)_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

$$U(x, a_2, a_3, a_4) = V(x, a_2, a_3, a_4)$$

$$U(x, a_2, a_3, a_4) \rightarrow x^2 \cdot a_2 + x^3 \cdot a_3 + x^4 \cdot a_4$$

где $\varphi(x)$ - базисные функции:

$$\varphi_1(x) = x^2$$

$$\varphi_2(x) = x^3$$

$$\varphi_3(x) = x^4$$

$$U_2(x, a_2, a_3, a_4) = \frac{d^2}{dx^2}(U(x, a_2, a_3, a_4)) \rightarrow 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 2 \cdot a_2$$

$$U_2(x, a_2, a_3, a_4) \rightarrow 2 \cdot a_2 + 6 \cdot x \cdot a_3 + 12 \cdot x^2 \cdot a_4$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П (продолжение)

Для упрощения вычислений введем дополнительные функции - первую и вторую производные от базисных функций:

$$\varphi_{111}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_1(x) \rightarrow 2 \cdot x$$

$$\varphi_{112}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_{111}(x) \rightarrow 2$$

$$\varphi_{211}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_2(x) \rightarrow 3 \cdot x^2$$

$$\varphi_{212}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_{211}(x) \rightarrow 6 \cdot x$$

$$\varphi_{311}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_3(x) \rightarrow 4 \cdot x^3$$

$$\varphi_{312}(x) = \frac{d^1}{dx^1} \varphi_{311}(x) \rightarrow 12 \cdot x^2$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П (продолжение)

Given

$$\int_0^L E \cdot J_Z \cdot U_2(x, a_2, a_3, a_4) \cdot \varphi_{112}(x) dx = \int_0^L q_y(x) \cdot \varphi_1(x) dx + \varphi_1(x_P) \cdot P + M \cdot \varphi_{111}(x_M)$$

$$\int_0^L E \cdot J_Z \cdot U_2(x, a_2, a_3, a_4) \cdot \varphi_{212}(x) dx = \int_0^L q_y(x) \cdot \varphi_2(x) dx + \varphi_2(x_P) \cdot P + M \cdot \varphi_{211}(x_M)$$

$$\int_0^L E \cdot J_Z \cdot U_2(x, a_2, a_3, a_4) \cdot \varphi_{312}(x) dx = \int_0^L q_y(x) \cdot \varphi_3(x) dx + \varphi_3(x_P) \cdot P + M \cdot \varphi_{311}(x_M)$$

$$S := \text{Find}(a_2, a_3, a_4) \rightarrow \begin{pmatrix} -6.779 \times 10^{-3} \\ 1.654 \times 10^{-3} \\ -190.918 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П: Анализ результатов (Displ)

Перемещения $\text{Displ}(x) := U(x, S_0, S_1, S_2)$

Значения прогибов, полученные численным методом (красная линия на рис. 4.2)

$$\text{Displ}(0) = 0 \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(1) = -1.5 \times 10^{-3} \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(2.1) = -5.316 \times 10^{-3} \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(3.1) = -10.637 \times 10^{-3} \quad \text{м}$$

$$\text{Displ}(4.1) = -16.937 \times 10^{-3} \quad \text{м}$$

Значения прогибов, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 4.2)

$$\text{aDispl} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5 \cdot 10^{-3} \\ -5.3 \cdot 10^{-3} \\ -10.7 \cdot 10^{-3} \\ -17 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \text{м} \quad \text{al} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2.1 \\ 3.1 \\ 4.1 \end{pmatrix} \quad \text{м}$$

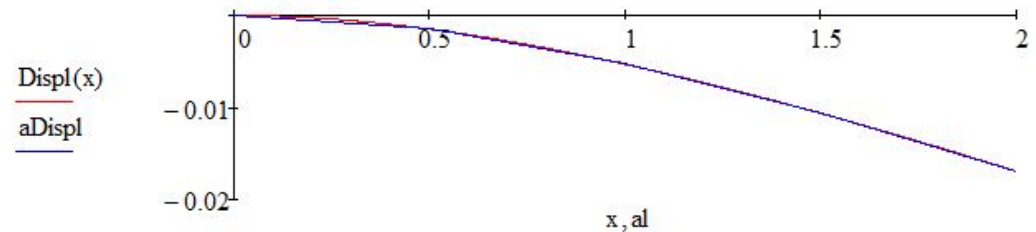


Рис. 4.2 Прогиб балки

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{\text{Displ}0} := 0 \quad \%$$

$$\Delta_{\text{Displ}41} := \left| \frac{\text{Displ}(4.1) - \text{aDispl}_4}{\text{Displ}(4.1)} \right| \cdot 100 = 369.004 \times 10^{-3} \quad \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П: Анализ результатов (Q_y)

Поперечная сила $Q_y(x) = E \cdot J_z \cdot \left(\frac{d^3}{dx^3} \text{Displ}(x) \right)$

Значения силы, полученные численным методом (красная линия на рис. 5.2)

$$Q_y(0) = 16.543 \times 10^3 \quad \text{Н}$$

$$Q_y(1) = 12.725 \times 10^3 \quad \text{Н}$$

$$Q_y(2 \cdot 1) = 8.906 \times 10^3 \quad \text{Н}$$

$$Q_y(3 \cdot 1) = 5.088 \times 10^3 \quad \text{Н}$$

$$Q_y(4 \cdot 1) = 1.27 \times 10^3 \quad \text{Н}$$

Значения силы, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 5.2)

$$aQ_y := \begin{pmatrix} 15 \cdot 10^3 \\ 15 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 10 \cdot 10^3 \\ 5 \cdot 10^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{м} \quad a1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \quad \text{м}$$

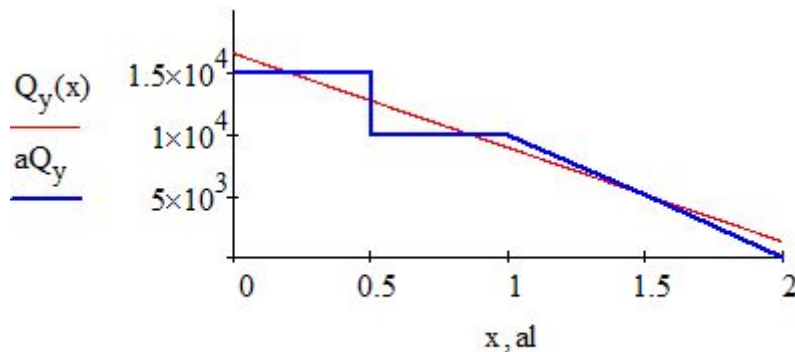


Рис.5.2 Эпюра поперечной силы

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{Qy0} := \left| \frac{Q_y(0) - aQ_{y0}}{Q_y(0)} \right| \cdot 100 = 9.327 \quad \%$$

$$\Delta_{Qy4l} := \left| \frac{Q_y(4l) - aQ_{y5}}{Q_y(4l)} \right| \cdot 100 = 100 \quad \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П: Анализ результатов (M_Z)

Изгибающий момент $M_Z(x) = E \cdot J_Z \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\text{Displ}(x))$

Значения моментов, полученные численным методом (красная линия на рис. 6.2)

$$M_Z(0) = -22.598 \times 10^3 \quad \text{Н}\cdot\text{м}$$

$$M_Z(1) = -15.281 \times 10^3 \quad \text{Н}\cdot\text{м}$$

$$M_Z(2\cdot 1) = -9.873 \times 10^3 \quad \text{Н}\cdot\text{м}$$

$$M_Z(3\cdot 1) = -6.375 \times 10^3 \quad \text{Н}\cdot\text{м}$$

$$M_Z(4\cdot 1) = -4.785 \times 10^3 \quad \text{Н}\cdot\text{м}$$

Значения моментов, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 6.2)

$$aMz := \begin{pmatrix} -22.5 \cdot 10^3 \\ -15 \cdot 10^3 \\ -10 \cdot 10^3 \\ -6.25 \cdot 10^3 \\ -5 \cdot 10^3 \end{pmatrix} \quad \text{Н}\cdot\text{м} \quad a1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 \\ 4\cdot 1 \end{pmatrix} \quad \text{м}$$

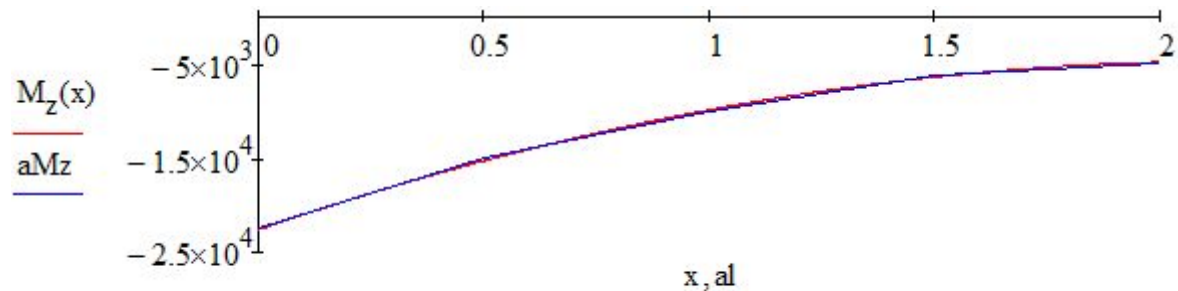


Рис. 6.2 Эпюра изгибающего момента

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{Mz0} := \left| \frac{M_Z(0) - aMz_0}{M_Z(0)} \right| \cdot 100 = 432.152 \times 10^{-3} \quad \%$$

$$\Delta_{Mz4l} := \left| \frac{M_Z(4l) - aMz_4}{M_Z(4l)} \right| \cdot 100 = 4.49 \quad \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: 3П: Анализ результатов (σ)

Напряжения $\sigma(x) = \frac{M_z(x)}{W_z}$

Значения напряжений, полученные численным методом (красная линия на рис. 7.2)

$$\sigma(0) = -135.586 \times 10^6 \text{ Па}$$

$$\sigma(1) = -91.685 \times 10^6 \text{ Па}$$

$$\sigma(2.1) = -59.238 \times 10^6 \text{ Па}$$

$$\sigma(3.1) = -38.247 \times 10^6 \text{ Па}$$

$$\sigma(4.1) = -28.711 \times 10^6 \text{ Па}$$

Значения напряжений, полученные аналитическим методом (синяя линия на рис. 7.2)

$$a\sigma := \begin{pmatrix} -135 \cdot 10^6 \\ -90 \cdot 10^6 \\ -60 \cdot 10^6 \\ -37.5 \cdot 10^6 \\ -30 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \text{ Па} \quad a1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2.1 \\ 3.1 \\ 4.1 \end{pmatrix} \text{ м}$$

$\sigma(x)$
—
 $a\sigma$

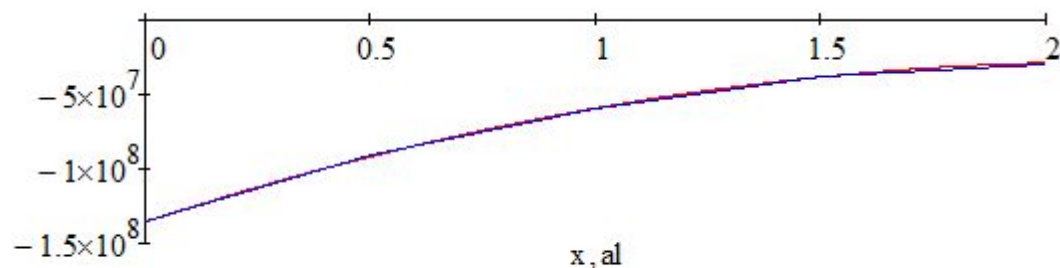


Рис. 7.2 Эпюра нормальных напряжений

Отклонение численного решения от аналитического в жесткой заделке и на краю балки составляет

$$\Delta_{\sigma 0} := \left| \frac{\sigma(0) - a\sigma_0}{\sigma(0)} \right| \cdot 100 = 432.152 \times 10^{-3} \%$$

$$\Delta_{\sigma 41} := \left| \frac{\sigma(41) - a\sigma_4}{\sigma(41)} \right| \cdot 100 = 4.49 \%$$

ЛР-5.1: ОМБГ: Итоги

Данная работа наглядно продемонстрировала улучшение результатов при повышении порядка приближения. Существенным недостатком осталось численное моделирование кусочно-постоянных функций.

Дальнейшее исследование: необходимо для заданной схемы нагружения (рис.1) сравнить значения перемещений, внутренних силовых факторов и напряжений, полученные в третьем приближении прямым и ослабленным методами Бубнова-Галеркина.

Полученные результаты оформить в таблицу и сделать выводы о достоинствах и недостатках каждого метода.

ЛР-5.2: Постановка задачи

Опираясь на ЛР-3.2, произвести численный расчет консольной балки постоянного сечения под действием поперечных распределенных и сосредоточенных сил и изгибающих моментов в статической постановке (ОМБГ). Распределенная сила линейно-изменяющейся интенсивности.

Согласно постановке задачи расчетная схема (рис.1) представляет собой стержень длиной $4l$, постоянного сечения $b \times h$ (рис.2). На стержень в точке x_P действует постоянная сила P , в точке x_M сосредоточенный момент M и распределенная от точки x_{q1} до точки x_{q2} сила линейно-изменяющейся от 0 до 10кН интенсивностью q .

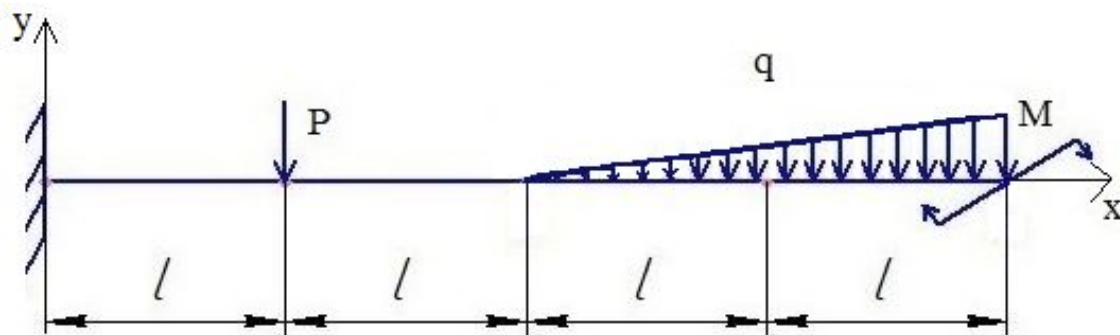


Рис.1 Расчетная схема

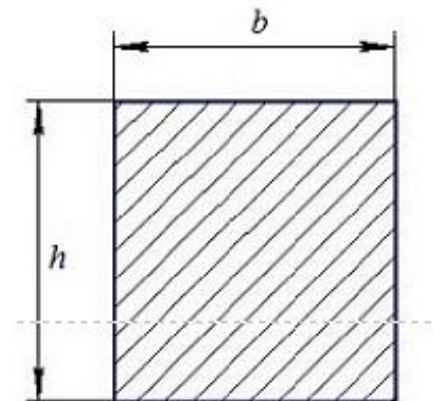


Рис.2 Сечение балки