Диофантово уравнение — это уравнение (как правило, с несколькими неизвестными), решение которого ищется в целых (иногда в натуральных) числах. Классическим диофантовым уравнением является *уравнение Ферма*:

x^n+y^n=z^n

Неизвестными в нём являются четыре натуральных переменных x, y, z, n.

Метод 1

Найти множество всех пар натуральных чисел, которые являются решениями уравнения:

$49x+51y=602$

Метод состоит в переборе возможных значений.

Решение:выражаем x через y: $x=(602-51y)/49$. Так как x и y-натуральные числа, это выражение больше или равно 1. $602-51y>=49$. $51y=<553$,

$y=<10\ 43/51$. Перебираем натуральные значения y и получаем $y=7$ $x=5$.

Метод 2:Разложение на множители

Решить уравнение в целых числах: $y^3 - x^3 = 91$

Метод состоит в разложении.

Правая часть выражения раскладывается на $(y - x)*(y^2 + xy + x^2) = 91$. Далее решается в целых числах,делали мы так много раз (выражаем x через y из маленького уравнения и подставляем в большое).

Метод 3

Решить уравнение в целых числах: x^2 + xy − y − 2 = 0

$$y(x-1) = 2 - x^2,$$

$$y = \frac{2-x^2}{x-1} = -\frac{x^2-2}{x-1} = -\frac{(x^2-1)-1}{x-1} = -\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} =$$

$$= -(x+1) + \frac{1}{x-1}, (x \neq 1).$$

Так как x и y-целые числа, 1/x-1 - целое число. Следовательно,x-1=+-1.

Ответ: (0;-2) (2;-2).

Метод основан на выражении одной переменной через другую и решении дроби в целых числах.

Метод 4

Найдите все целочисленные решения уравнения:

$x^2 - 6xy + 13y^2 = 29$

Метод основан на выделении полного квадрата

Преобразуем левую часть уравнения, выделив полные квадраты: $x^2 - 6xy + 13y^2 = (x^2 - 6xy + 9y^2) + 4y^2 = (x - 3y) 2 + (2y)^2 = 29$, значит $(2y)^2 \le 29$. Отсюда y=0, y=+-1, y=+-2. С помощью перебора находим ответы: (2;-1),(-8;-1),(8;1),(-2,1).

Метод 5

Решить уравнение в целых числах: $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

Метод основанный на решении уравнения как квадратного относительно одной из перменных.

$X^2 - x(y+1) + y^2 - y = 0$. $D = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = -3y^2 + 6y + 1 \geq 0$; $-3y^2 + 6y - 3 \geq -4$; $3(y - 1)^2 \leq 4$.

Решения существуют при $y = 0; 1; 2$.

Ответ: (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1), (2; 2).