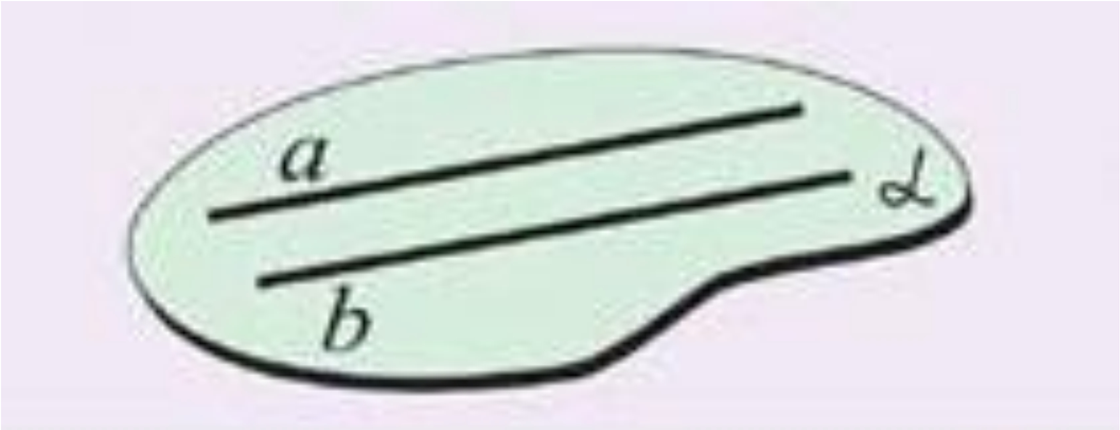
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

Параллельные прямые в пространстве

Определение:

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости.

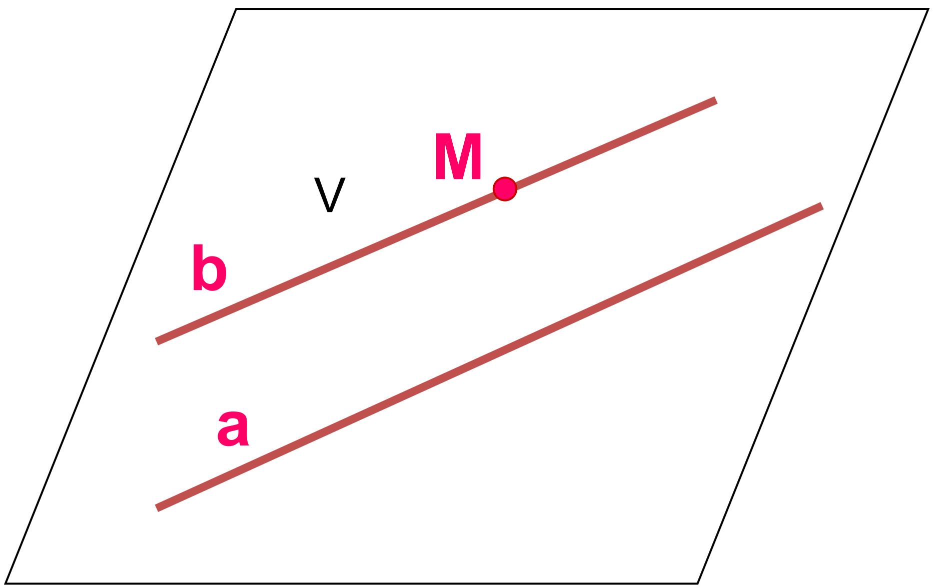
Значит, через две параллельные прямые можно провести плоскость и только одну.



a ll b

Теорема

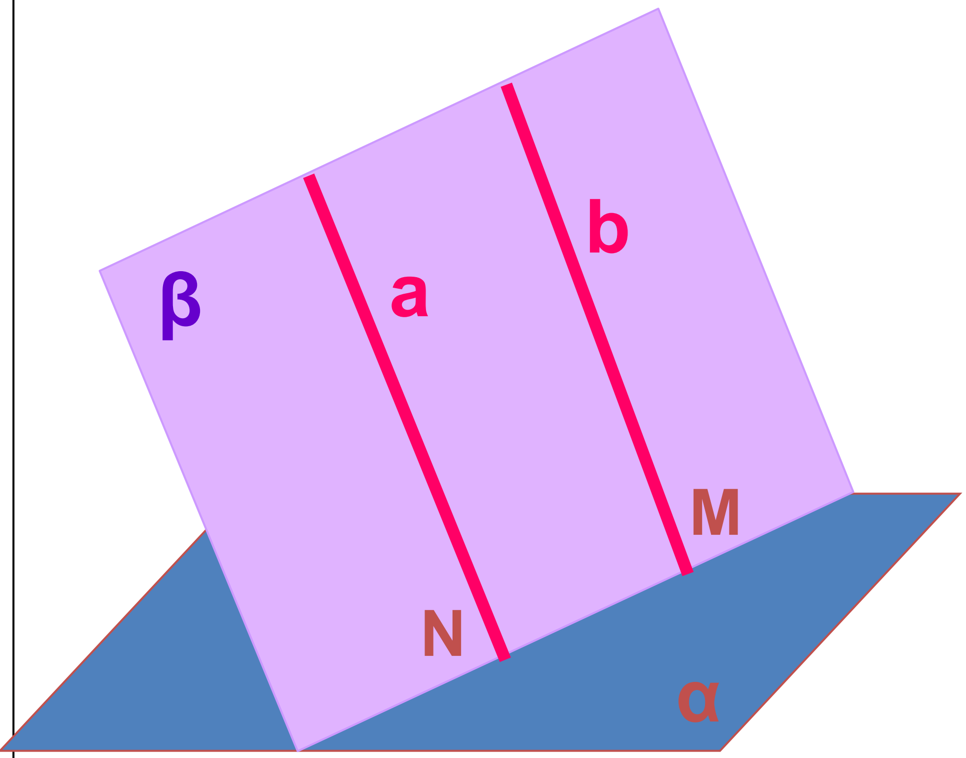
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и только одну.



M є b

a II b

Лемма



a || b

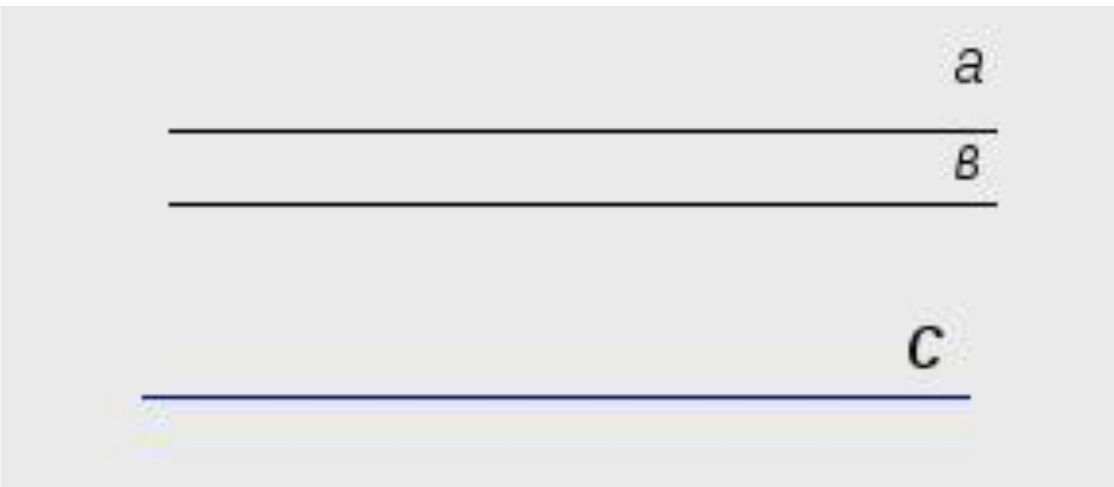
a ∩ α

b ∩ α

Если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.

ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.



a II b

a II c

b II c

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1.

Дано:

$M \in BD$, $BM = MD$

$N \in CD$, $CN = ND$

$Q \in AC$, $AQ = QN$

$P \in AB$, $AP = PB$

$AD = 12$ см, $BC = 14$ см

Найти: P_{MNQP}

Решение:

1) $MN \parallel BC$, $QP \parallel BC \Rightarrow MN \parallel QP$

2) $MP \parallel DA$, $NQ \parallel DA \Rightarrow MP \parallel NQ$

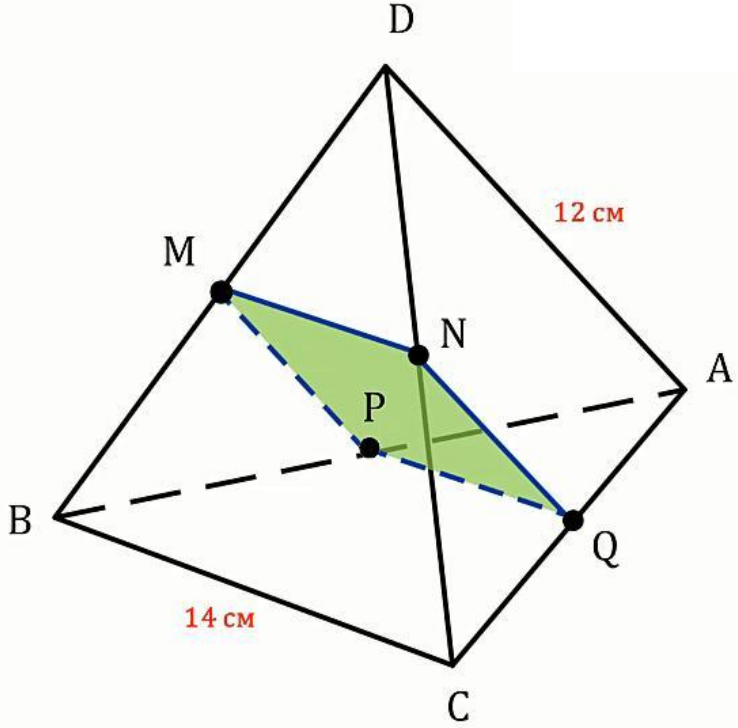
3) $MN \parallel QP$, $MP \parallel NQ \Rightarrow$

$\Rightarrow MNQP$ — параллелограмм

4) $P_{MNQP} = 2(MN + MP)$

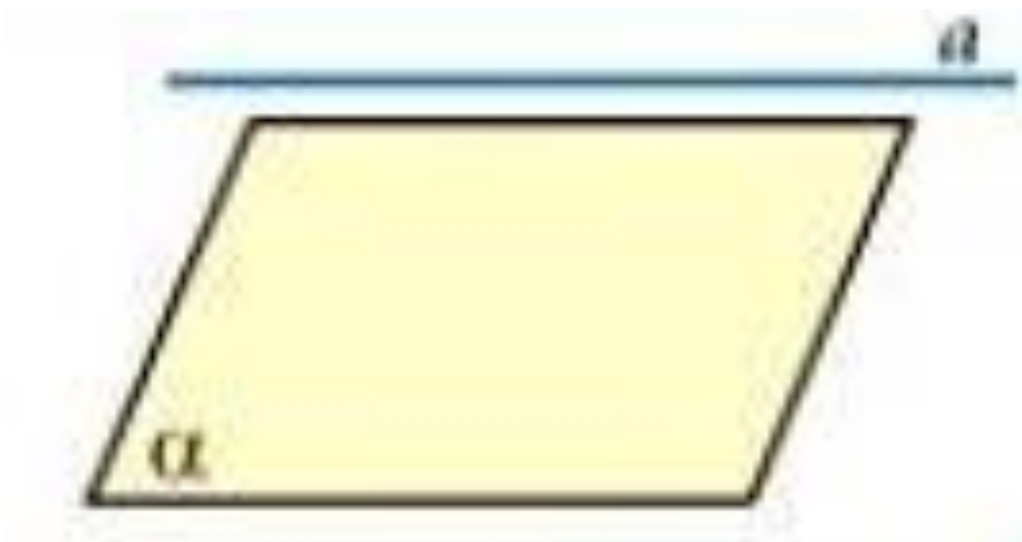
$MN = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ (см)

$MP = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см)



Параллельность прямой и плоскости

Прямая и ***плоскость*** называются ***параллельными***, если они не имеют общих точек.

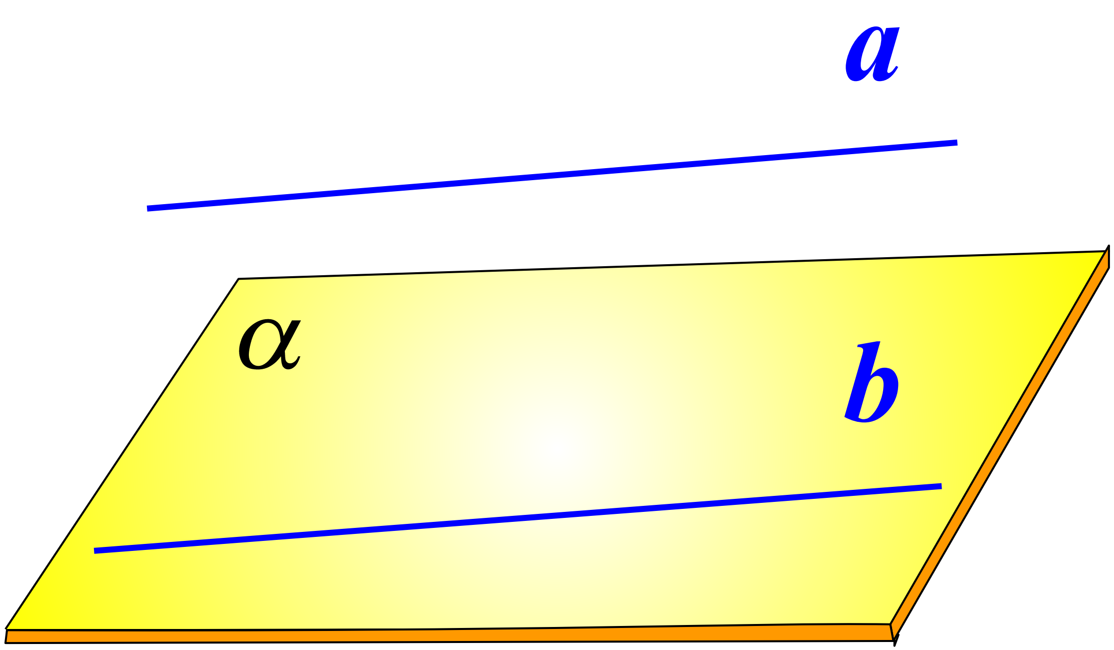


a ~~∈~~ α

a ǁ α

Теорема (признак)

Если прямая не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.



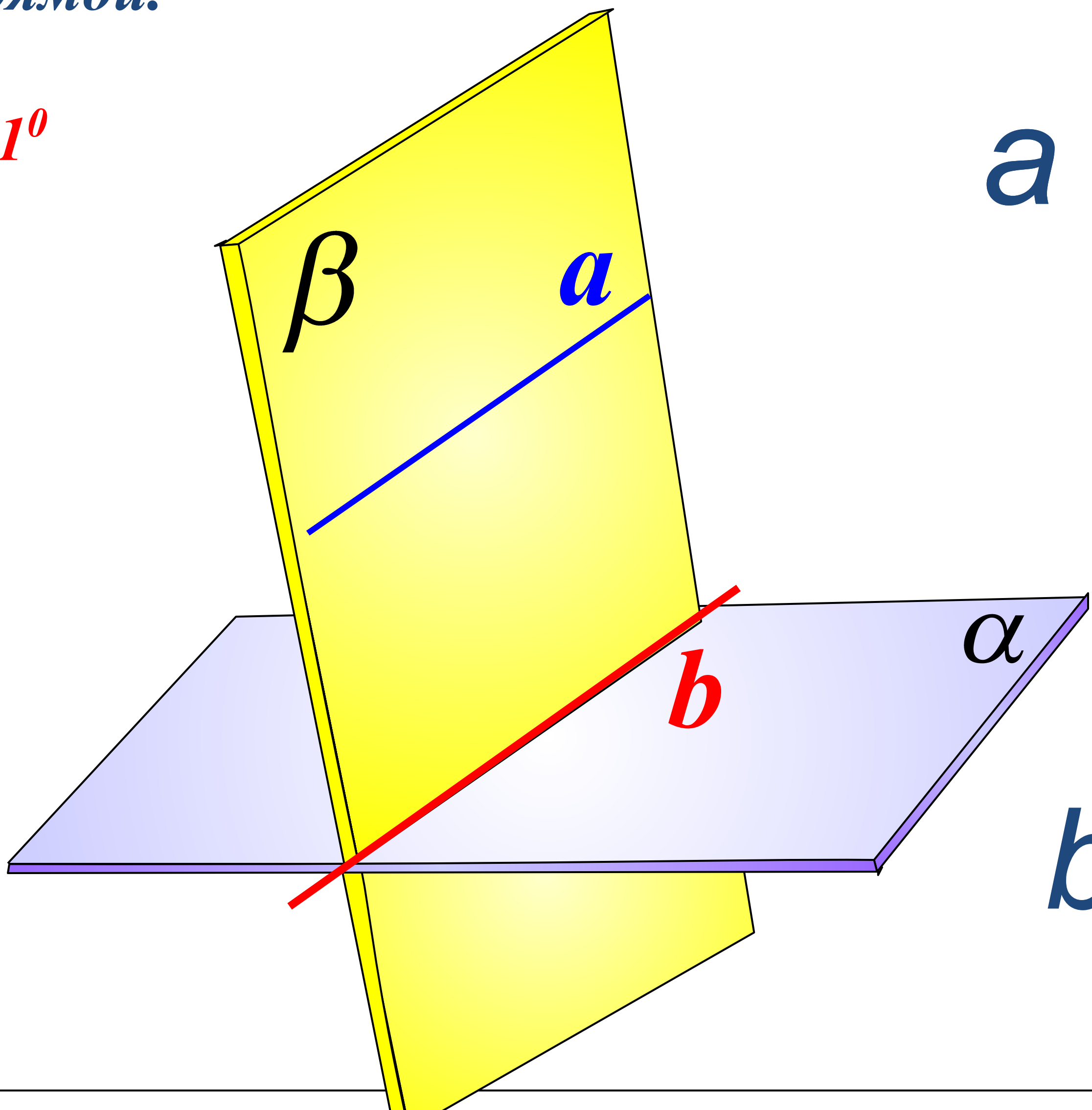
$a \parallel b$

b □ α

$a \parallel \alpha$

Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

Следствие 1^0

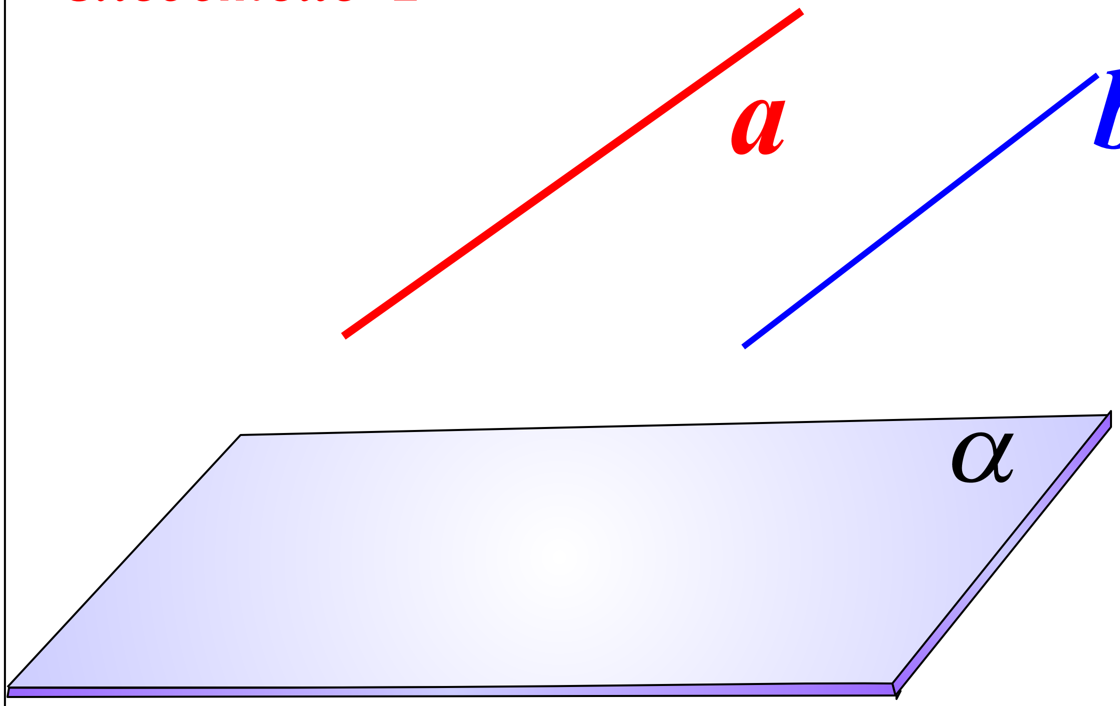


$a \parallel \alpha$

$b \parallel a$

Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Следствие 2^0



$a \parallel b$

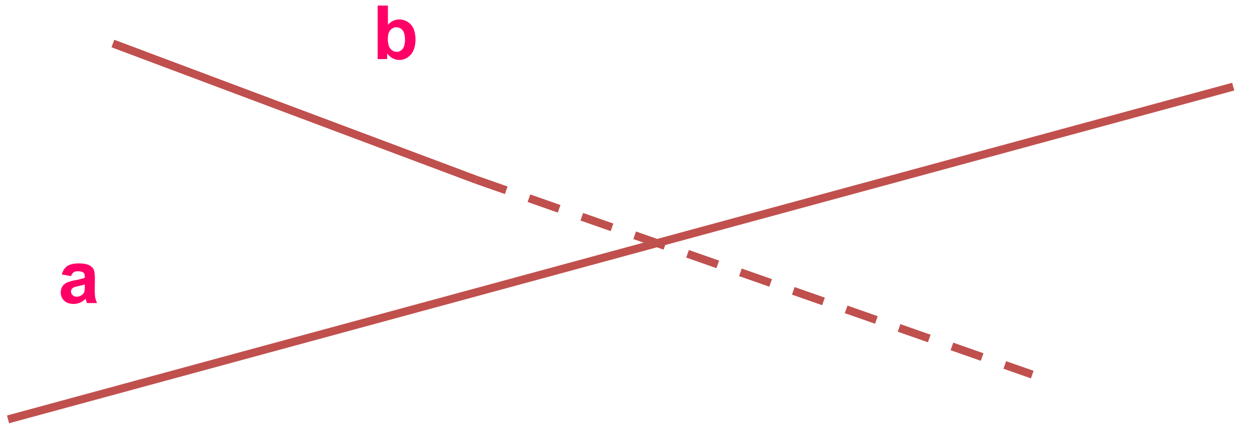
$a \parallel \alpha$

$b \parallel \alpha$

$b \subset \alpha$

СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

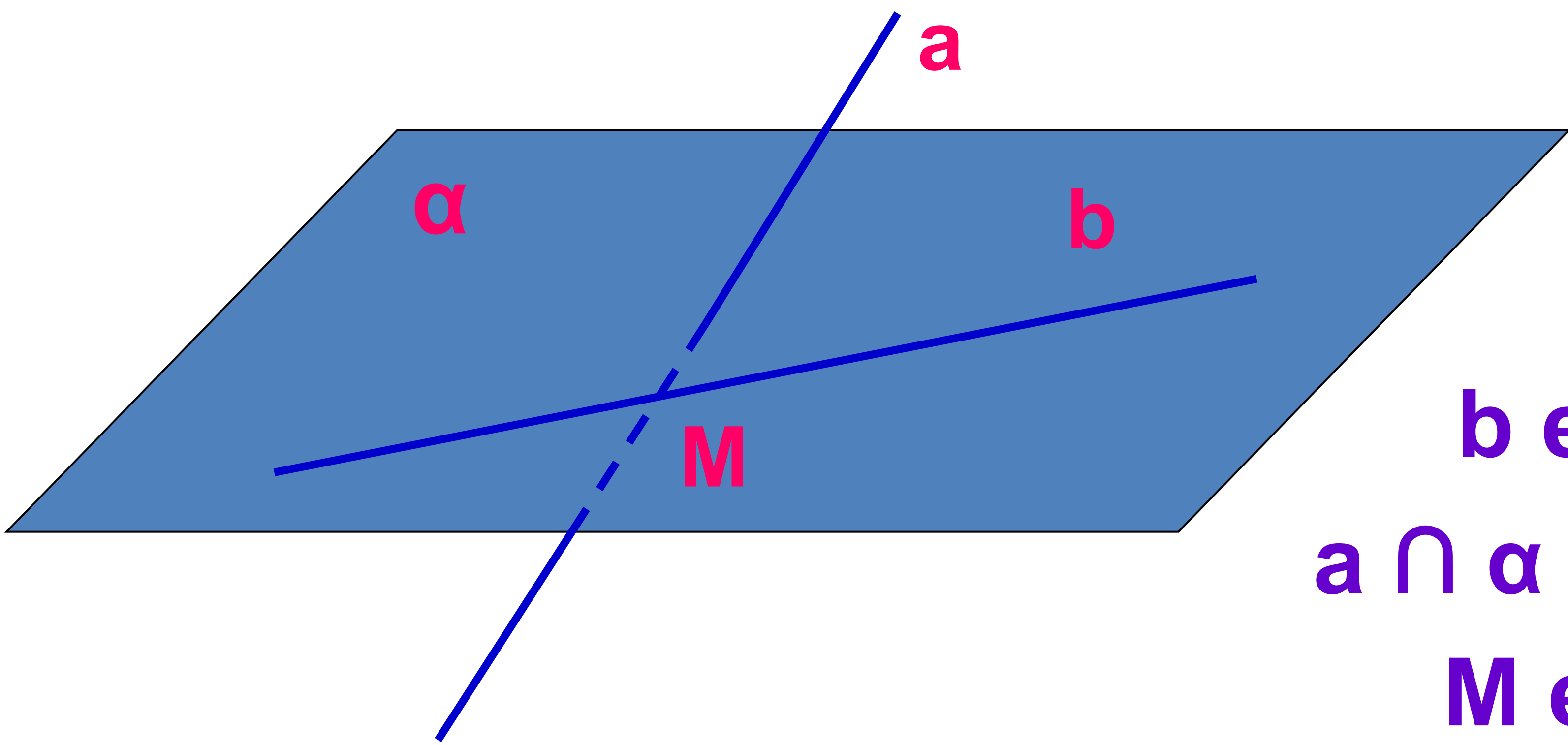
Определение



Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и лежат в разных плоскостях.

Признак скрещивающихся прямых

Если одна прямая лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то прямые скрещиваются.



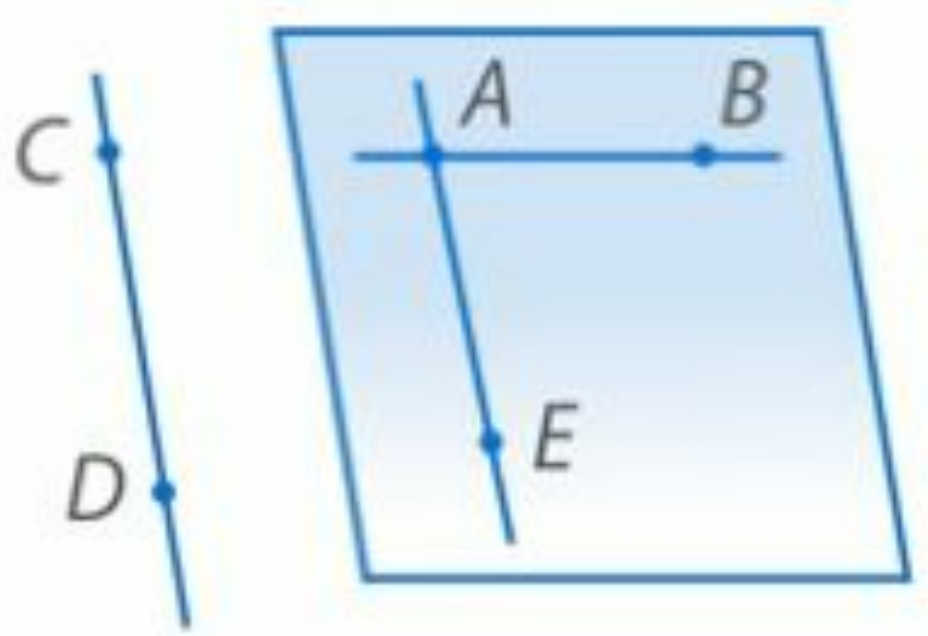
$b \in \alpha$

$a \cap \alpha = M$

$M \notin b$

Свойство скрещивающихся прямых

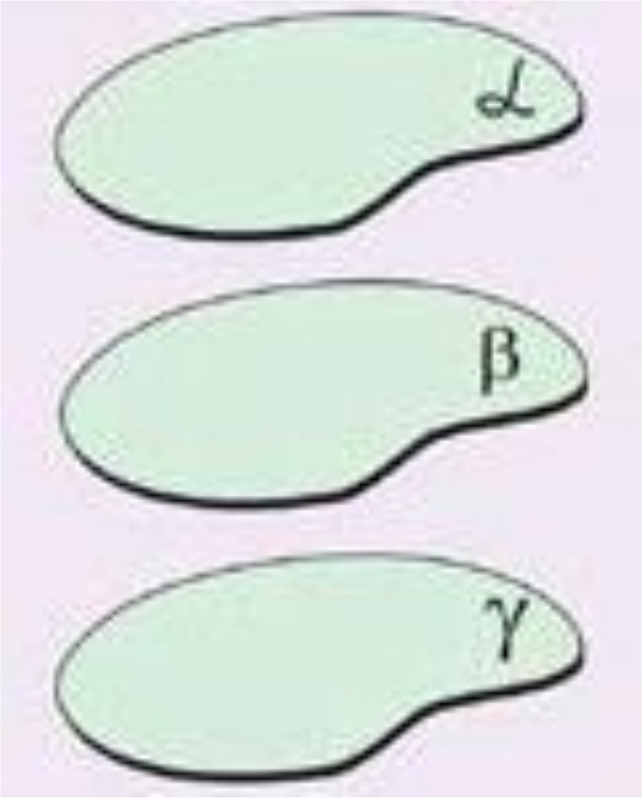
Через каждую из скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.



Параллельность плоскостей

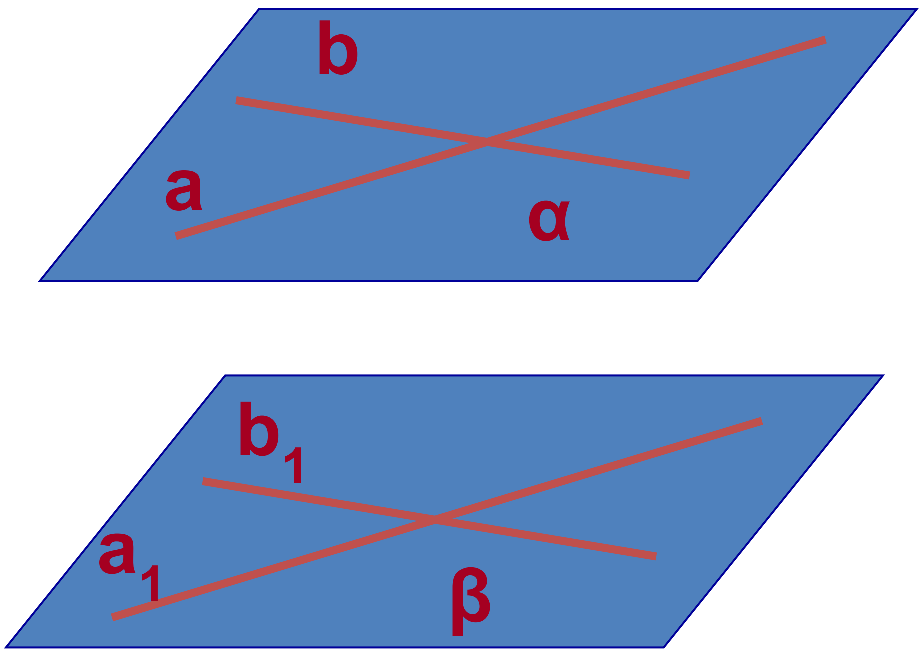
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.



Признак

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.



плоскости α и β,

$a \cap b$, $a_1 \cap b_1$,

a и b лежат в α,

a_1 и b_1 лежат в β.

$\alpha \parallel \beta$

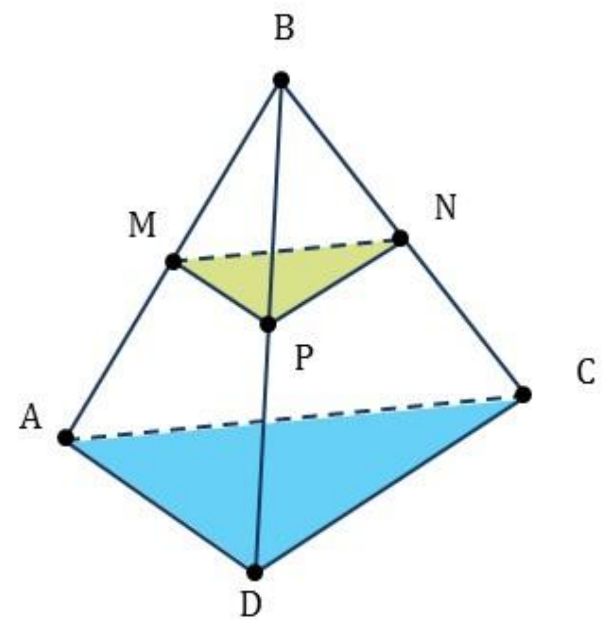
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 2.

Дано: $B \not\subset ADC$
$M \in BA, BM = MA$
$N \in BC, BN = NC$
$P \in BD, BP = PD$
$S_{ACD} = 48$ см^2

а) доказать: $(MNP) \parallel (ACD)$

б) найти: S_{MNP}



Доказательство:

MP — средняя линия ΔABD
PN — средняя линия ΔBCD
MN — средняя линия ΔABC

$$\left.\begin{matrix} MN \cap MP = M \\ AC \cap AD = A \\ MN \parallel AC \\ MP \parallel AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow MNP \parallel ACD$$

Решение:

$MN = \frac{1}{2}AC,\ MP = \frac{1}{2}AD,\ NP = \frac{1}{2}CD \ \Rightarrow k = 0{,}5$

$\angle MNP = \angle ACD, \angle MPN = \angle ADC, \angle NMP = \angle CAD \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta ACD$

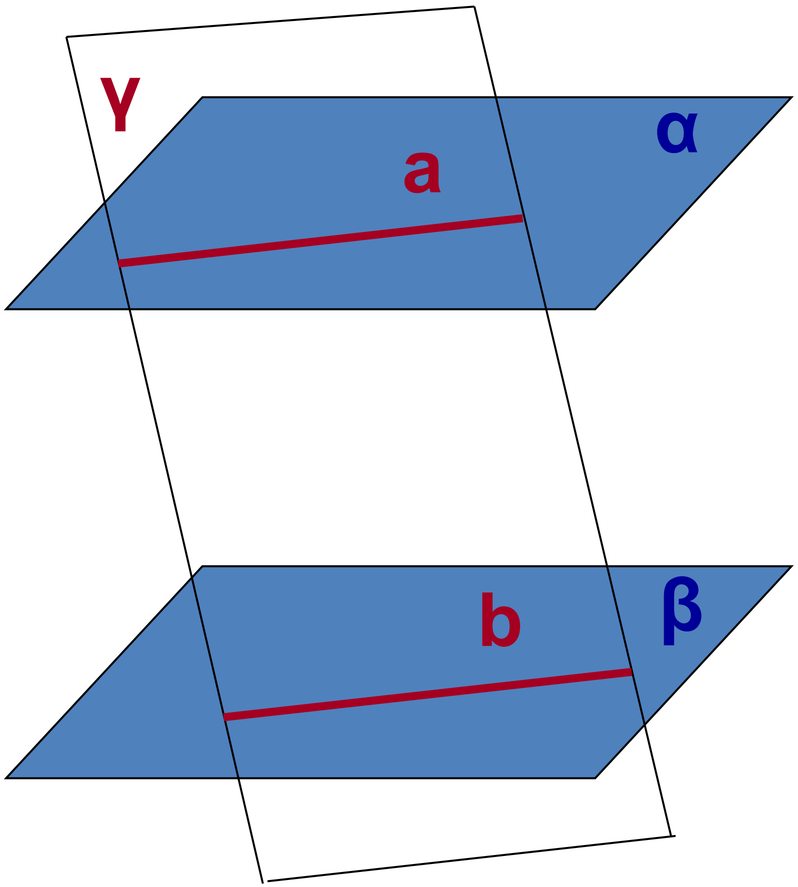
$$\frac{S_{MNP}}{S_{ACD}} = k^2$$

$S_{MNP} = S_{ACD} \cdot k^2 = 48 \cdot 0{,}25 = 12$ (см^2)

Ответ: $(MNP) \parallel (ACD)$, $S_{MNP} = 12$ см^2

Свойства

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны.



$\alpha \parallel \beta$

$\gamma \cap \alpha = a$

$\gamma \cap \beta = b$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 3.

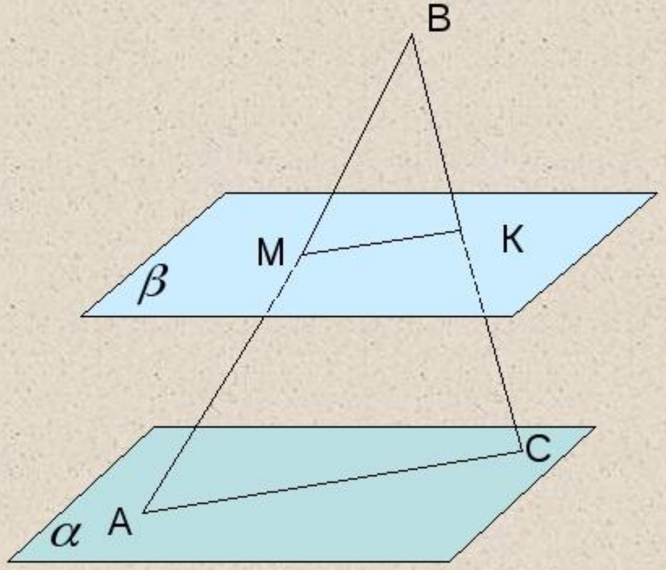
Дано:

$\Delta ABC, AC \in \alpha, AM = MB, M \in \beta, \beta // \alpha, \beta \cap BC = K$

Доказать:

MK - *средняя* **линия** ΔABC

Док - во:



$$\left.\begin{aligned} &(ABC) \cap \alpha = AC \\ &(ABC) \cap \beta = MK \\ &\alpha // \beta \end{aligned}\right| \Rightarrow AC//MK$$

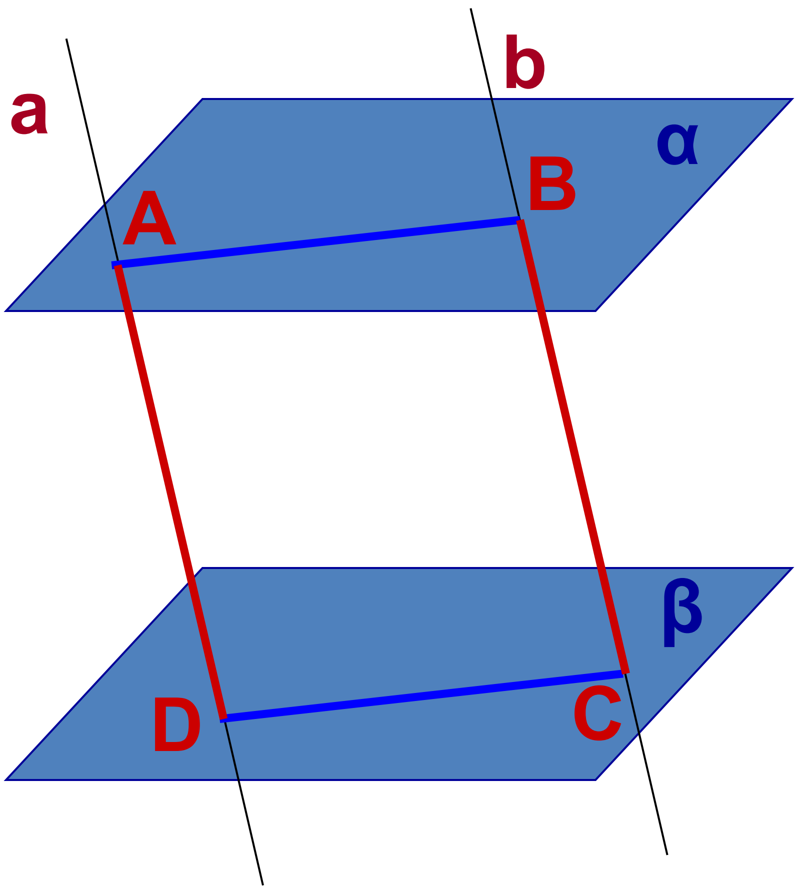
ΔMBK подобен ΔABC

$\dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{1}{2}$ $\quad BK = KC$

$AM = MB, BK = KC \Rightarrow MK$ - *средняя линия* ΔABC

Свойства

2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



$\alpha \parallel \beta$

$a \parallel b$

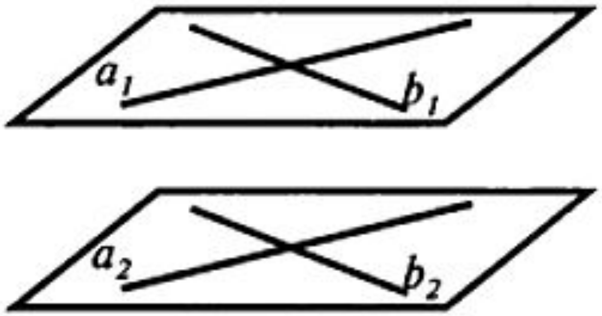
$AD = BC$

ВЫДЕЛЯЕМ ГЛАВНОЕ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

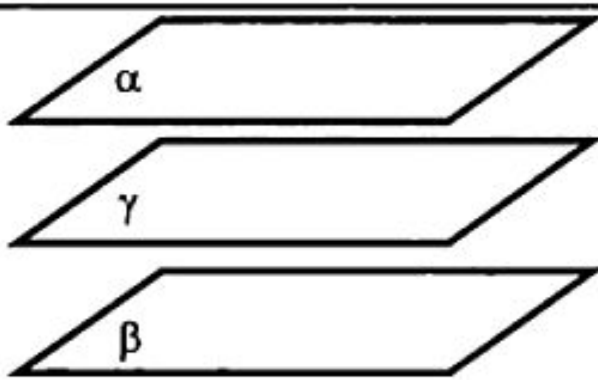
Так называются плоскости, которые не пересекаются.

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны:

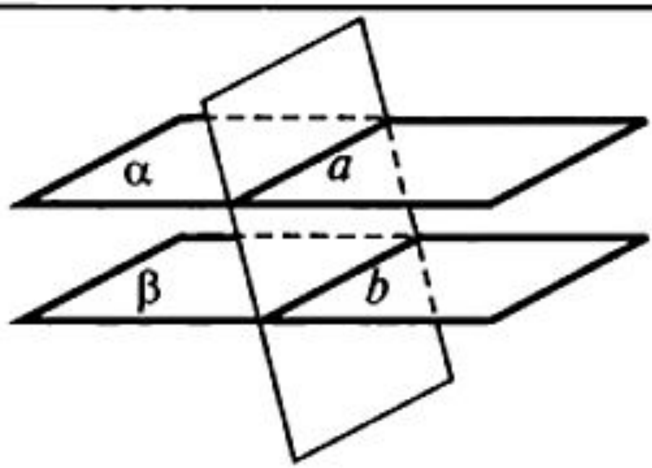
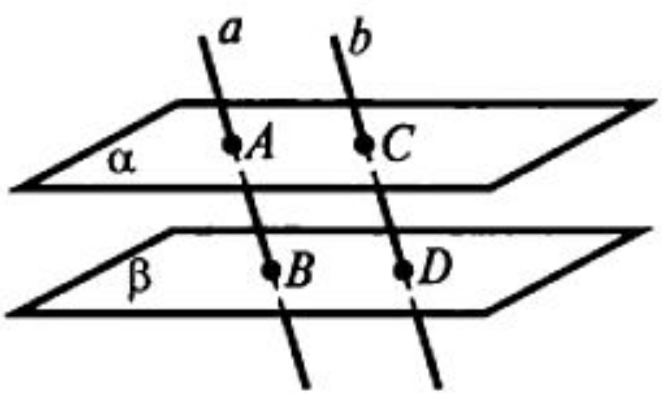
$$(a_1 \parallel a_2,\ b_1 \parallel b_2) \Rightarrow \alpha \parallel \beta .$$



Если каждая из двух данных плоскостей параллельна третьей плоскости, то данные две плоскости параллельны между собой:

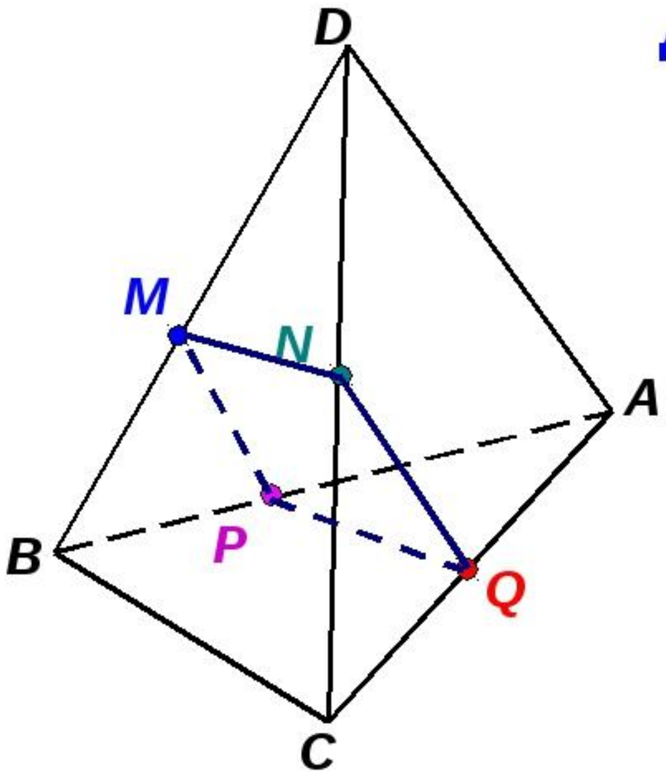
$$(\alpha \parallel \gamma,\ \beta \parallel \gamma) \Rightarrow \alpha \parallel \beta .$$

ВЫДЕЛЯЕМ ГЛАВНОЕ

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ	
	**Если** две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны: $\alpha \parallel \beta \Rightarrow a \parallel b$.
	**Отрезки** параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны: $(\alpha \parallel \beta,\ a \parallel b) \Rightarrow AB = CD$.

РЕШИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Задача 4.



Дано: M – середина BD

N – середина CD

Q – середина AC

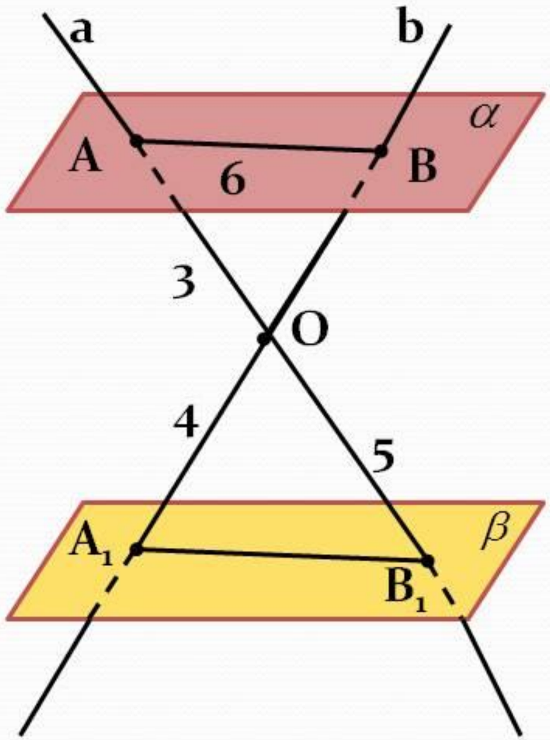
P – середина AB

AD = 12 см; BC = 14 см

Найти: P_{MNQP}.

РЕШИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Задача 5.

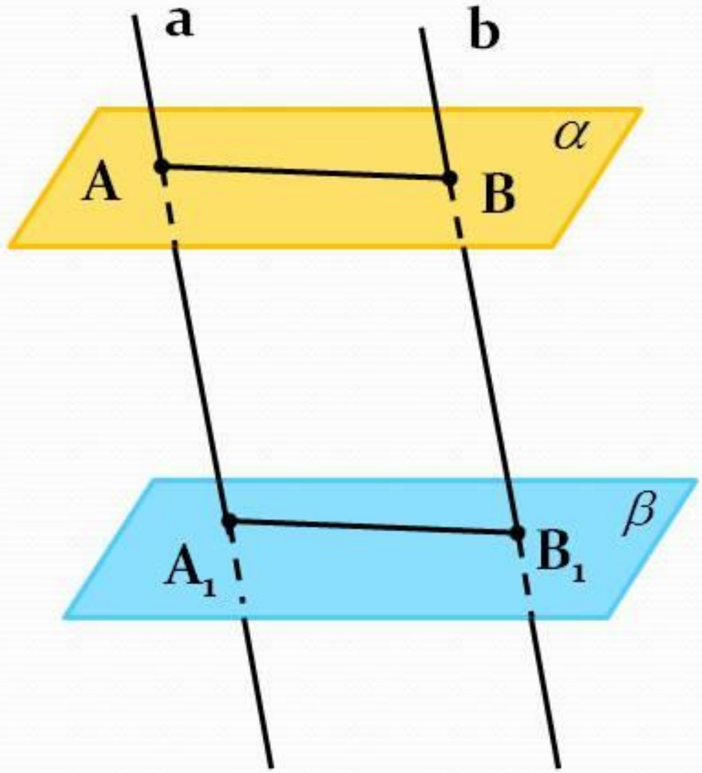


Дано: плоскости α и β параллельны, прямые a и b пересекаются в точке O.

Найти: OB и A_1B_1.

РЕШИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Задача 6.



Дано: плоскости α и β параллельны, $a \| b$, $AB = 6$ см

Найти: A_1B_1