

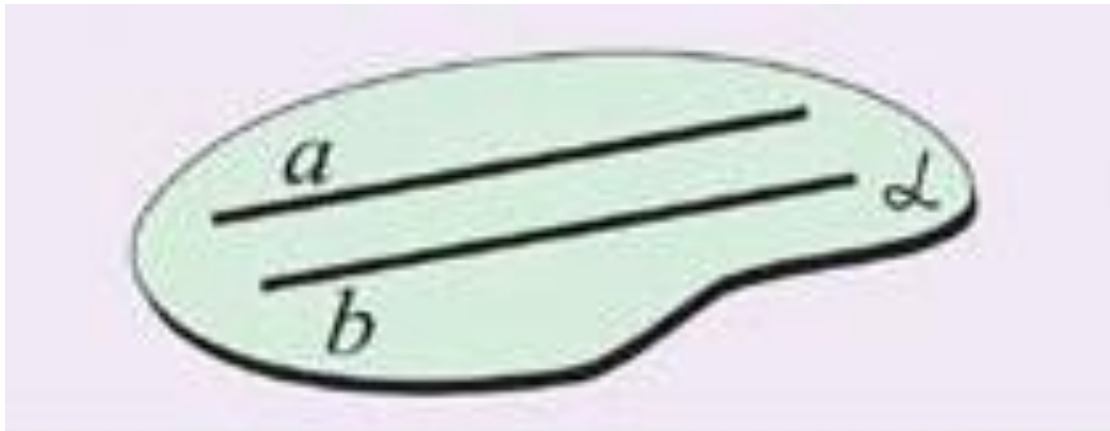
# ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

# Параллельные прямые в пространстве

Определение:

*Две прямые в пространстве называются параллельными, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости.*

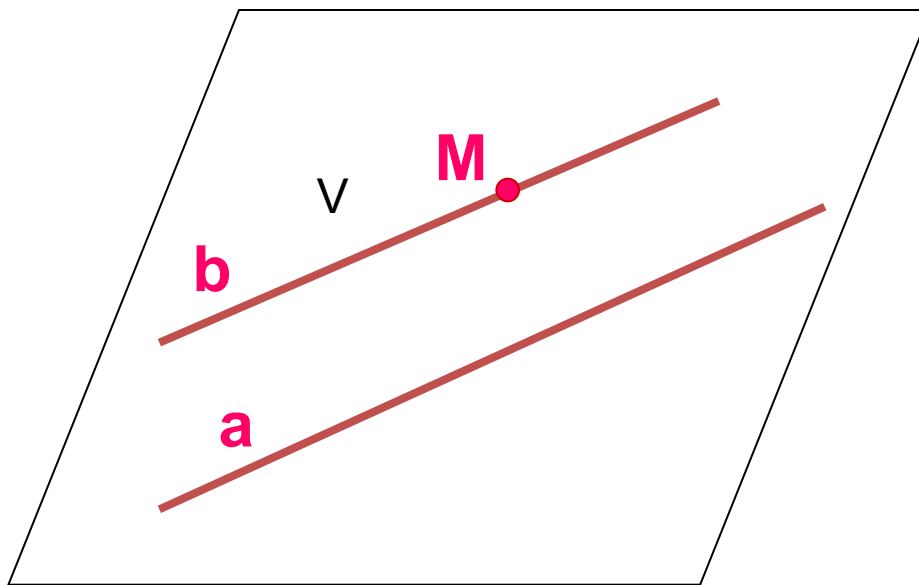
Значит, через две параллельные прямые можно провести плоскость и только одну.



**a || b**

# Теорема

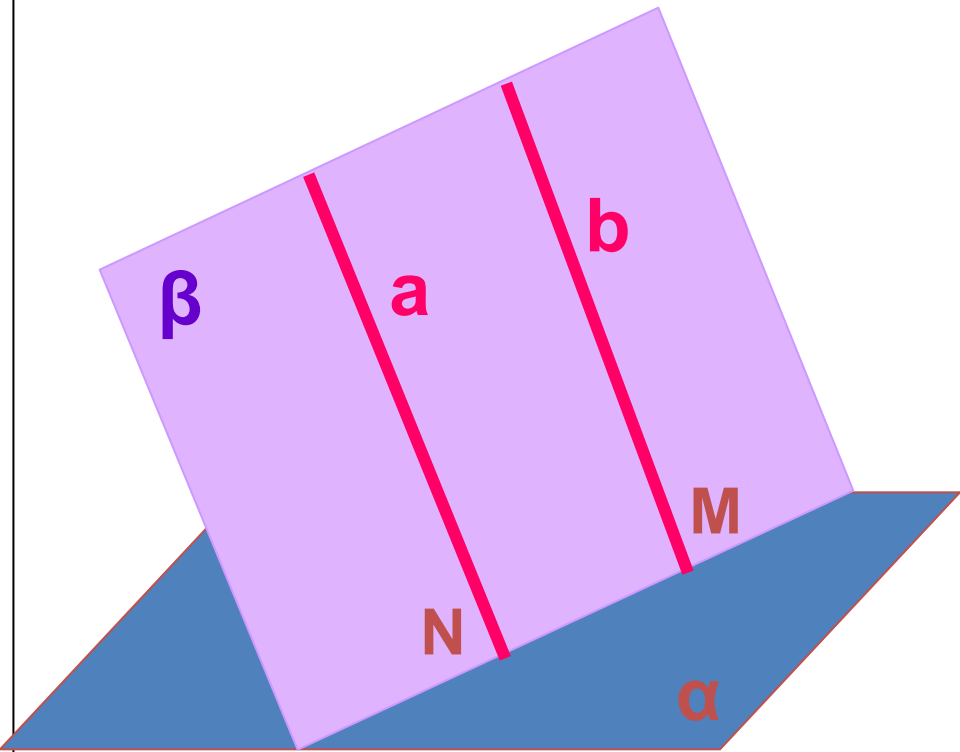
Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и только одну.



$M \in b$

$a \parallel b$

# Лемма

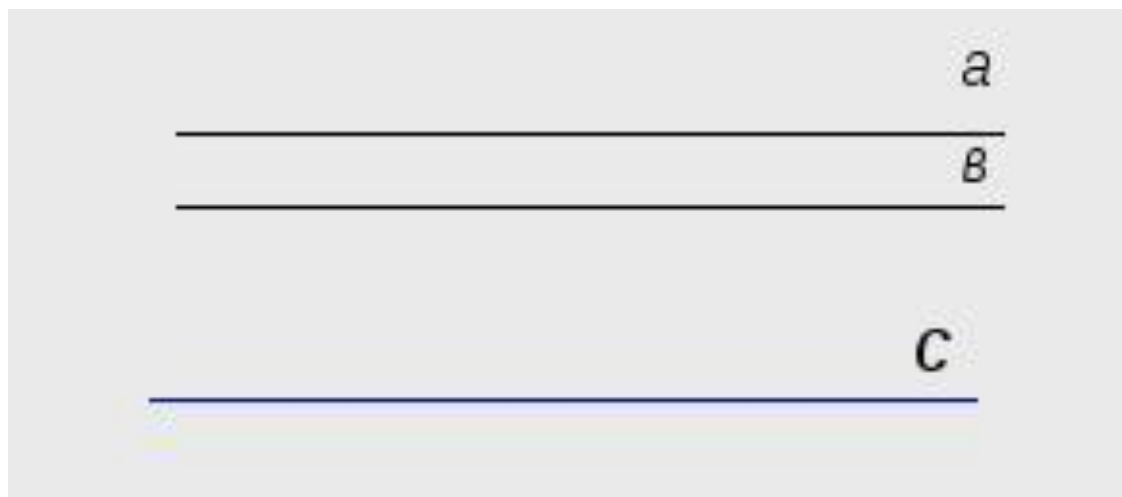


$a \parallel b$   
 $a \cap \alpha$   
 $b \cap \alpha$

**Если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.**

# ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.



**$a \parallel b$**

**$a \parallel c$**

**$b \parallel c$**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

## Задача 1.

**Дано:**

$M \in BD, BM = MD$

$N \in CD, CN = ND$

$Q \in AC, AQ = QN$

$P \in AB, AP = PB$

$AD = 12 \text{ см}, BC = 14 \text{ см}$

**Найти:**  $P_{MNQP}$

**Решение:**

1)  $MN \parallel BC, QP \parallel BC \Rightarrow MN \parallel QP$

2)  $MP \parallel DA, NQ \parallel DA \Rightarrow MP \parallel NQ$

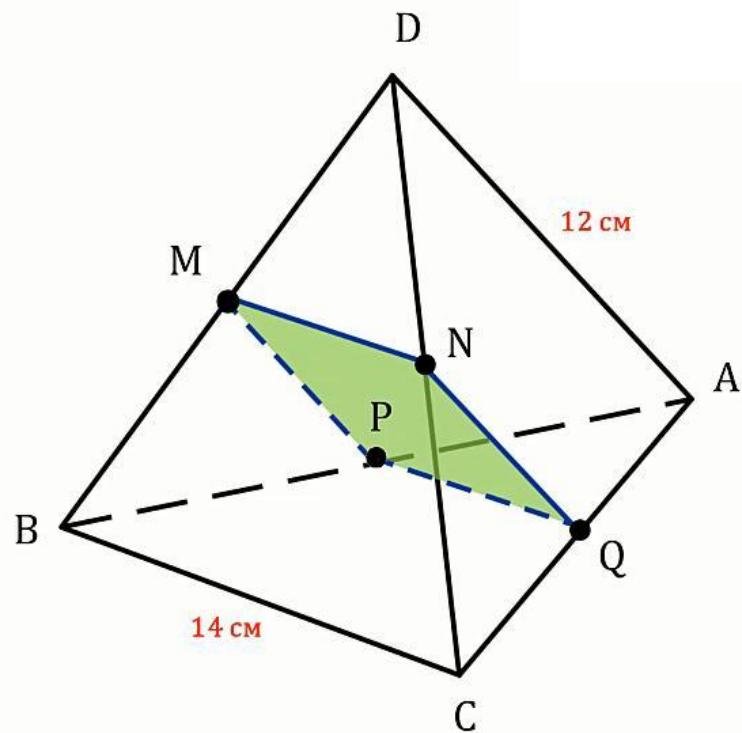
3)  $MN \parallel QP, MP \parallel NQ \Rightarrow$

$\Rightarrow MNQP$  — параллелограмм

4)  $P_{MNQP} = 2(MN + MP)$

$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 \text{ (см)}$

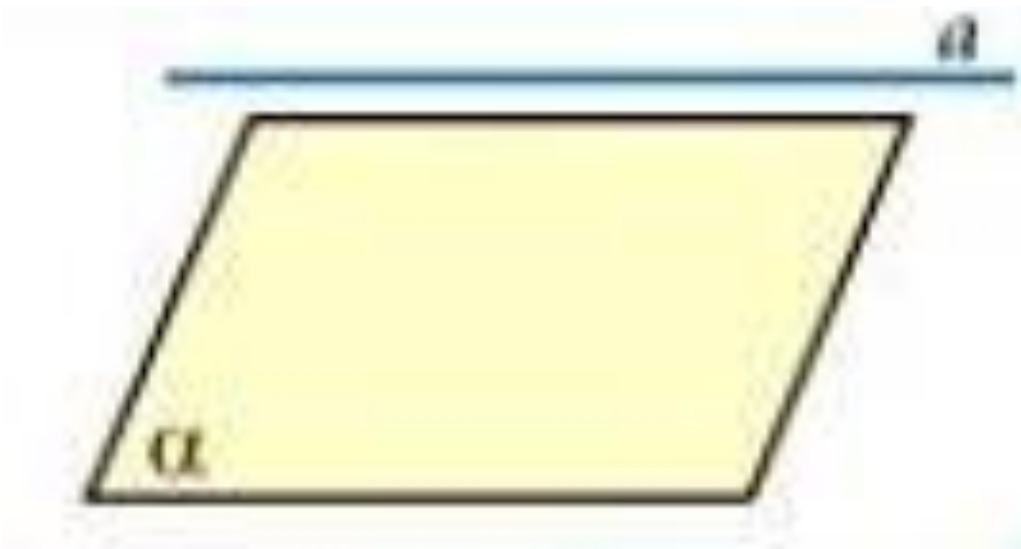
$MP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ (см)}$



# Параллельность прямой и плоскости

## **Прямая и плоскость**

называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

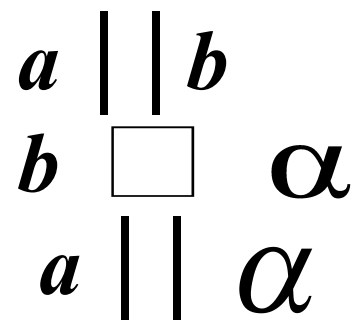
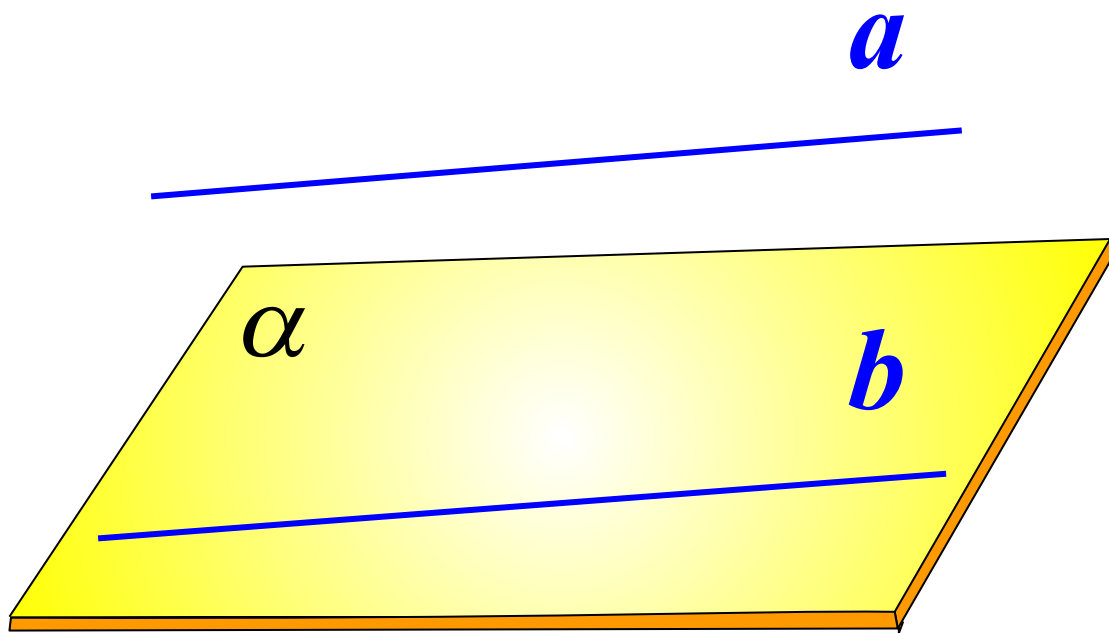


~~$a \in \alpha$~~

$a \parallel \alpha$

## Теорема (признак)

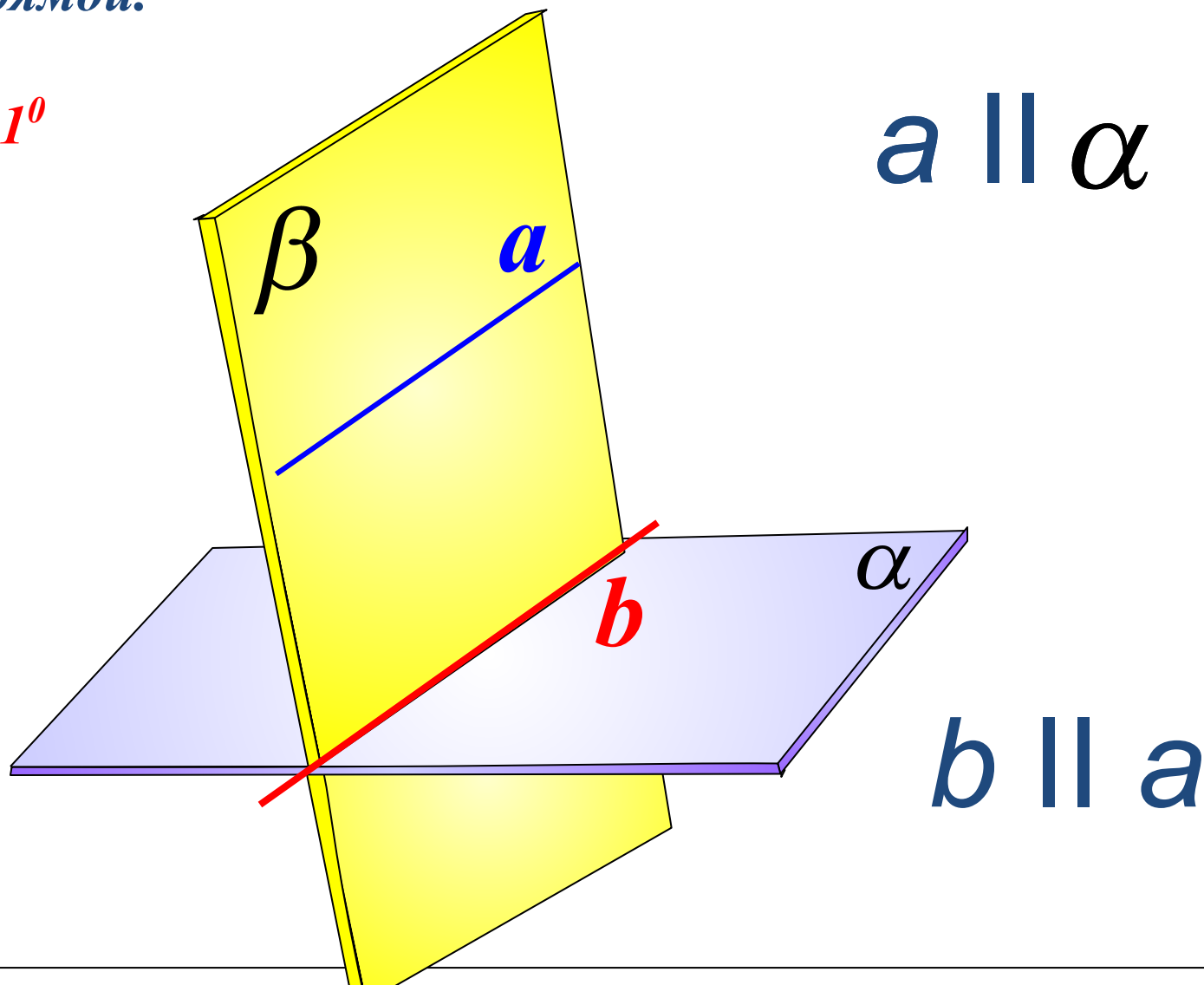
*Если прямая не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.*





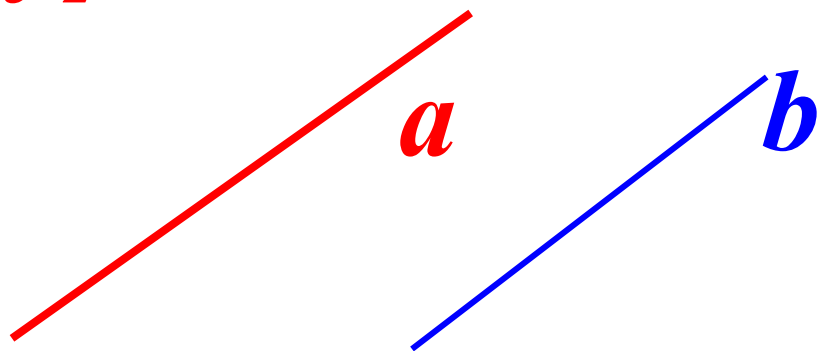
*Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

*Следствие 1<sup>0</sup>*



*Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.*

*Следствие 2<sup>0</sup>*



$$a \parallel b$$

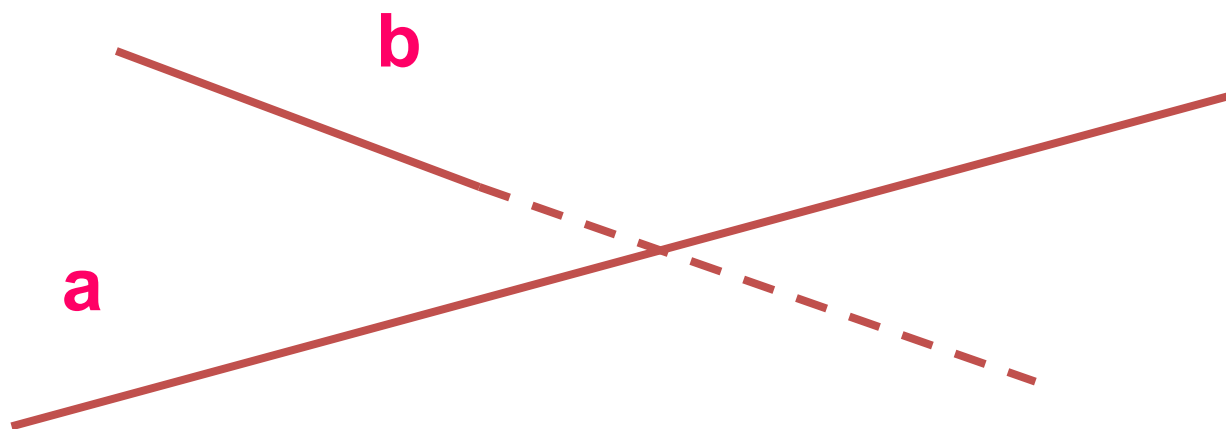
$$a \parallel \alpha$$

$$b \parallel \alpha$$

$$b \subset \alpha$$

# СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

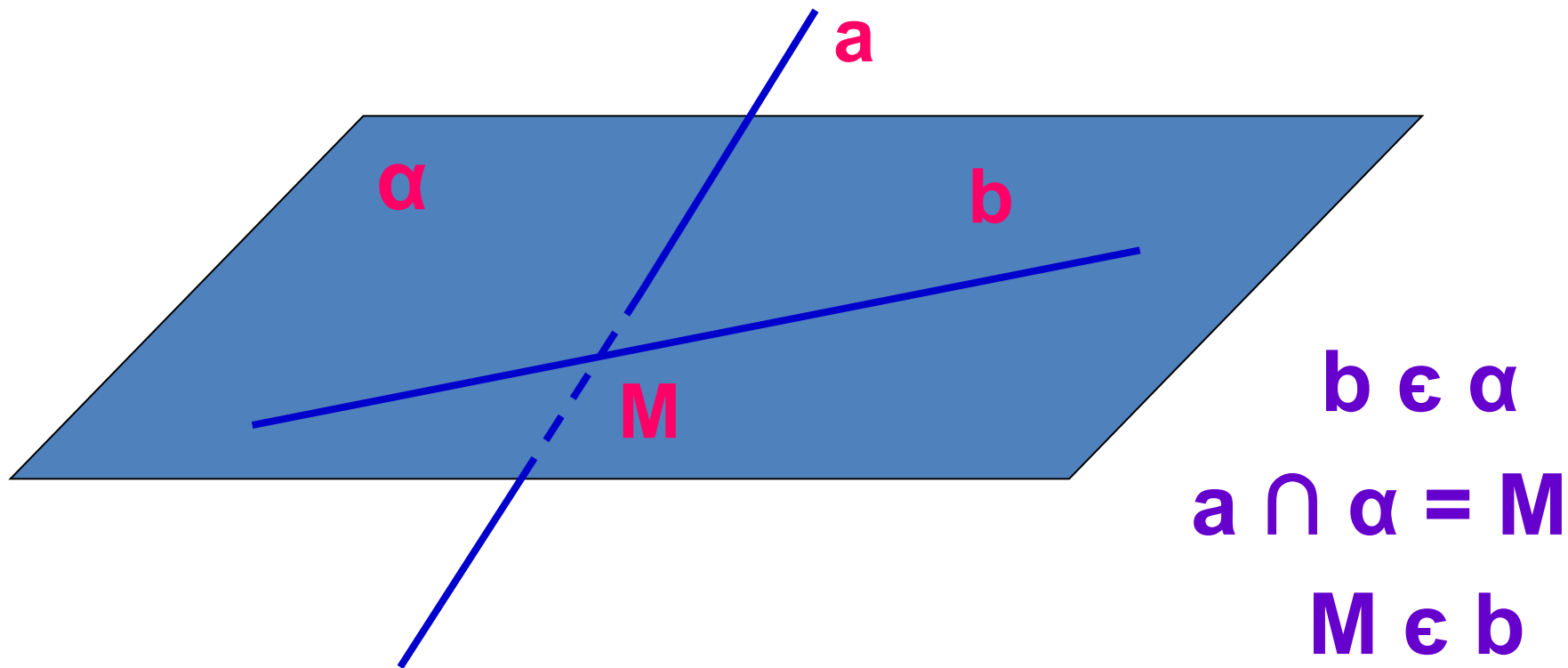
## Определение



*Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и лежат в разных плоскостях.*

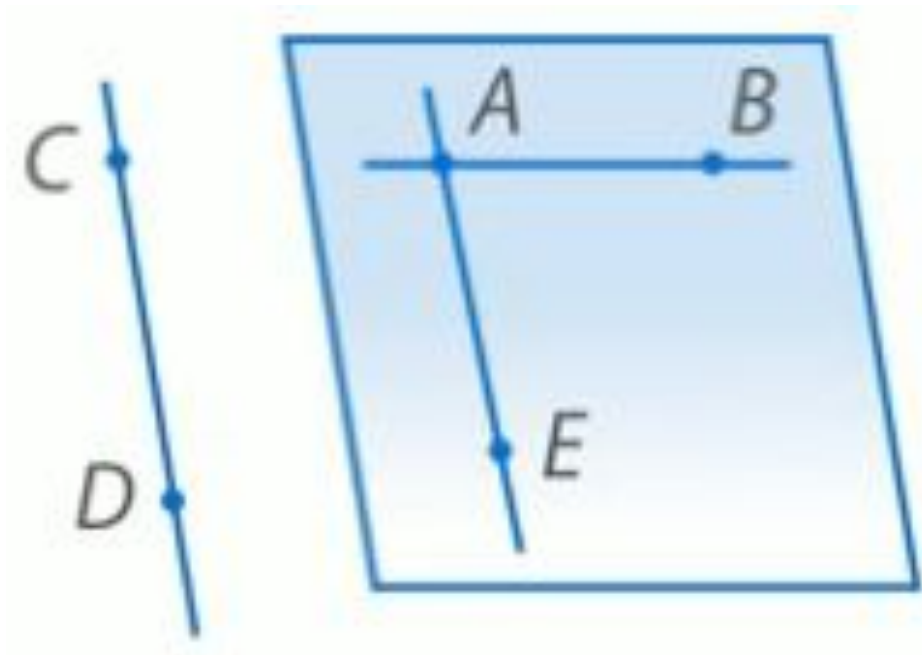
# Признак скрещивающихся прямых

Если одна прямая лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то прямые скрещиваются.



# Свойство скрещивающихся прямых

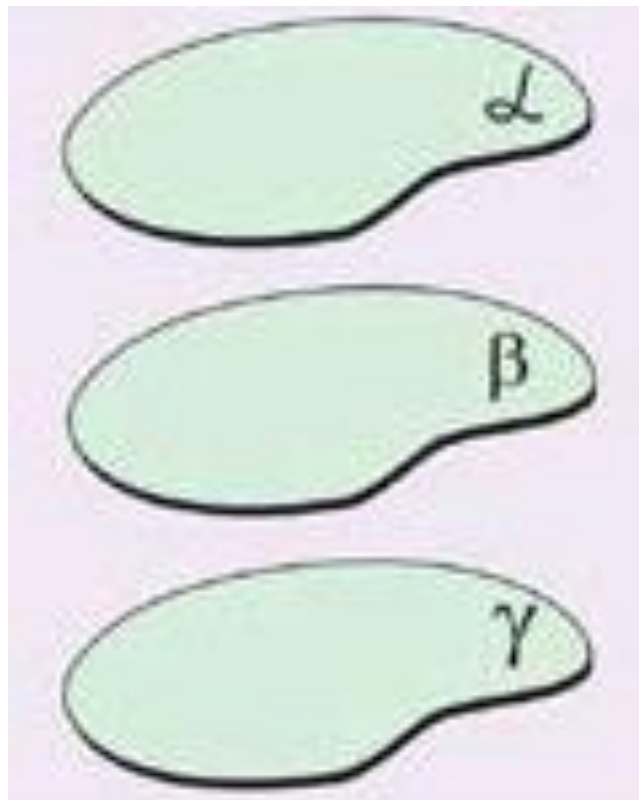
Через каждую из скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой прямой.



# Параллельность плоскостей

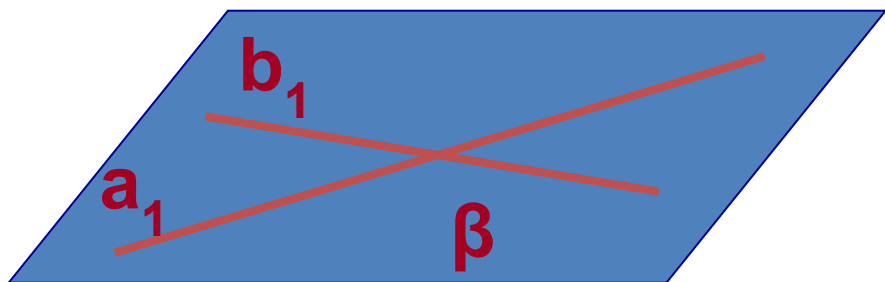
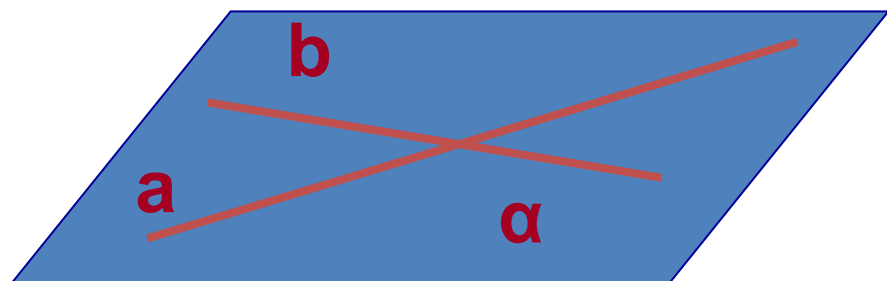
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

*Плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.*



# Признак

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.



плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ ,  
 $a \cap b, a_1 \cap b_1$ ,  
 $a$  и  $b$  лежат в  $\alpha$ ,  
 $a_1$  и  $b_1$  лежат в  $\beta$ .  
 $\alpha \parallel \beta$

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

## Задача 2.

**Дано:**  $B \notin ADC$   
 $M \in BA, BM = MA$   
 $N \in BC, BN = NC$   
 $P \in BD, BP = PD$   
 $S_{ACD} = 48 \text{ см}^2$

**а) доказать:**  $(MNP) \parallel (ACD)$

**б) найти:**  $S_{MNP}$

**Доказательство:**

$MP$  — средняя линия  $\triangle ABD$

$PN$  — средняя линия  $\triangle BCD$

$MN$  — средняя линия  $\triangle ABC$

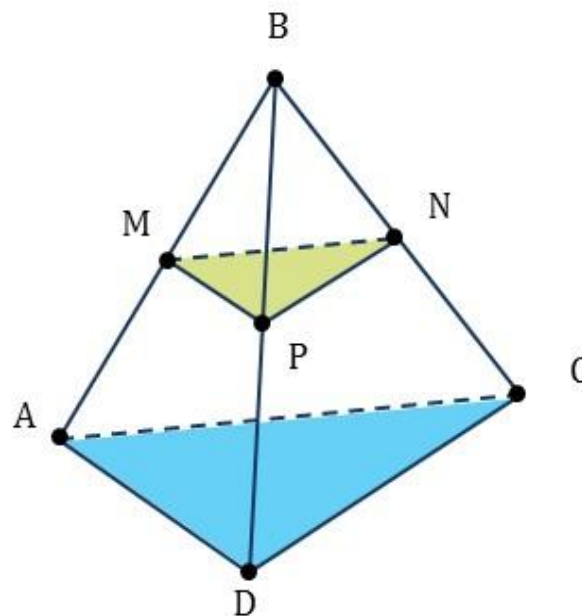
$$\left. \begin{array}{l} MN \cap MP = M \\ AC \cap AD = A \\ MN \parallel AC \\ MP \parallel AD \end{array} \right\} \Rightarrow MNP \parallel ACD$$

**Решение:**

$$MN = \frac{1}{2} AC, MP = \frac{1}{2} AD, NP = \frac{1}{2} CD \Rightarrow k = 0,5$$

$$\angle MNP = \angle ACD, \angle MPN = \angle ADC, \angle NMP = \angle CAD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle MNP \sim \triangle ACD$$



$$\frac{S_{MNP}}{S_{ACD}} = k^2$$

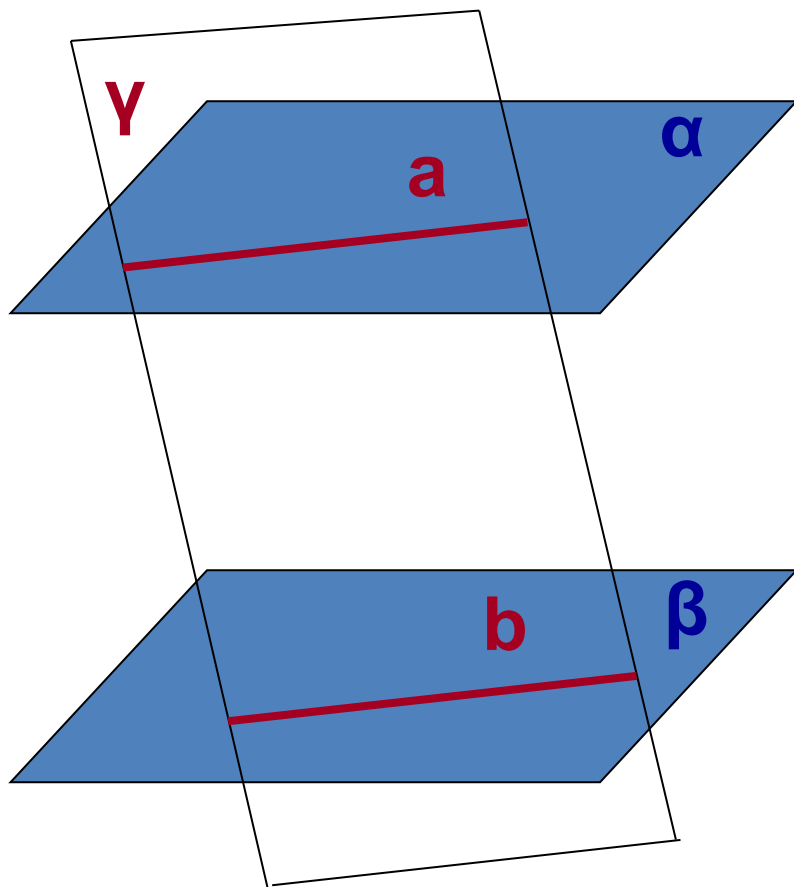
$$S_{MNP} = S_{ACD} \cdot k^2 = 48 \cdot 0,25 = 12 \text{ (см}^2\text{)}$$

**Ответ:**  $(MNP) \parallel (ACD), S_{MNP} = 12 \text{ см}^2$



# Свойства

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны.



$$\alpha \parallel \beta$$

$$\gamma \cap \alpha = a$$

$$\gamma \cap \beta = b$$

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

## Задача 3.

Дано:

$\triangle ABC$ ,  $AC \in \alpha$ ,  $AM = MB$ ,  $M \in \beta$ ,  $\beta \parallel \alpha$ ,  $\beta \cap BC = K$

Доказать:

$MK$  - средняя линия  $\triangle ABC$

Док - во:

$$(ABC) \cap \alpha = AC$$

$$(ABC) \cap \beta = MK$$

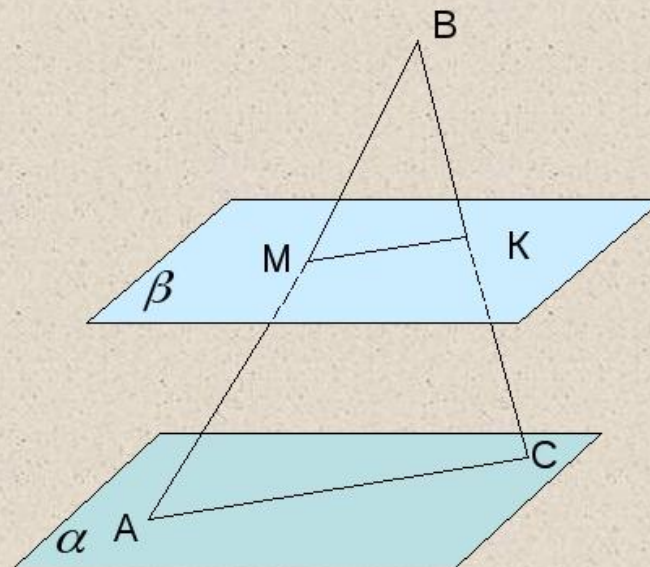
$$\alpha \parallel \beta$$

$$\Rightarrow AC \parallel MK$$

$\triangle MBK$  подобен  $\triangle ABC$

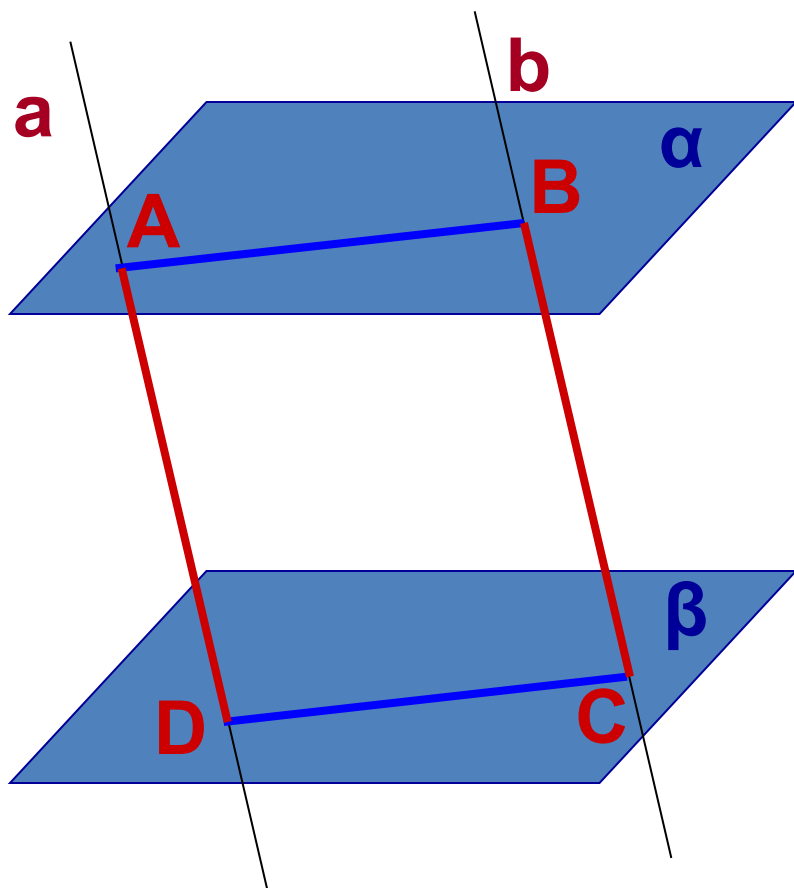
$$\frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BC} = \frac{1}{2} \quad BK = KC$$

$AM = MB$ ,  $BK = KC \Rightarrow MK$  - средняя линия  $\triangle ABC$



# Свойства

2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



$$\alpha \parallel \beta$$

$$a \parallel b$$

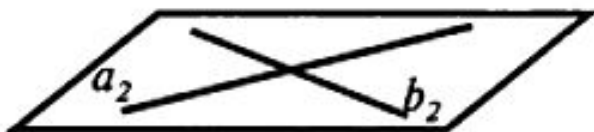
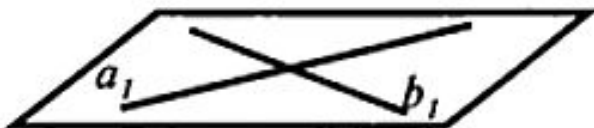
$$AD = BC$$

# ВЫДЕЛЯЕМ ГЛАВНОЕ

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

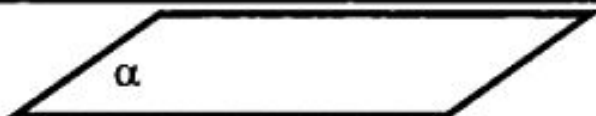
Так называются плоскости, которые не пересекаются.

### ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ



Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны:

$$(a_1 \parallel a_2, b_1 \parallel b_2) \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

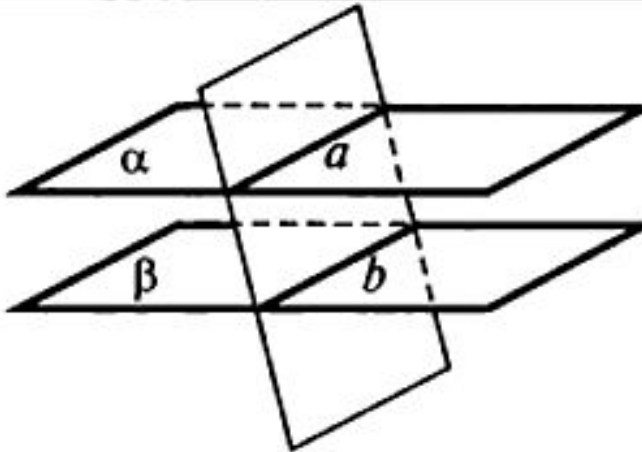


Если каждая из двух данных плоскостей параллельна третьей плоскости, то данные две плоскости параллельны между собой:

$$(\alpha \parallel \gamma, \beta \parallel \gamma) \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

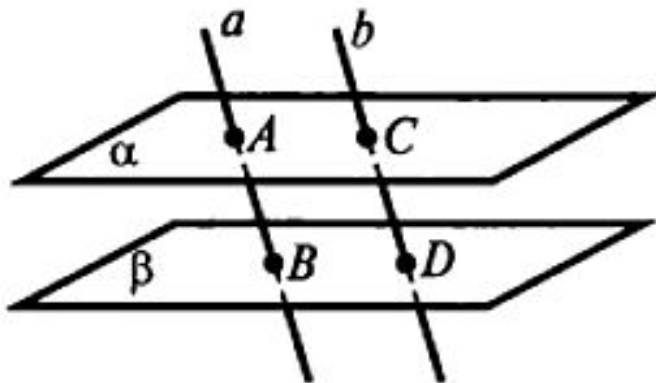
# ВЫДЕЛЯЕМ ГЛАВНОЕ

## СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ



Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения плоскостей параллельны:

$$\alpha \parallel \beta \Rightarrow a \parallel b.$$

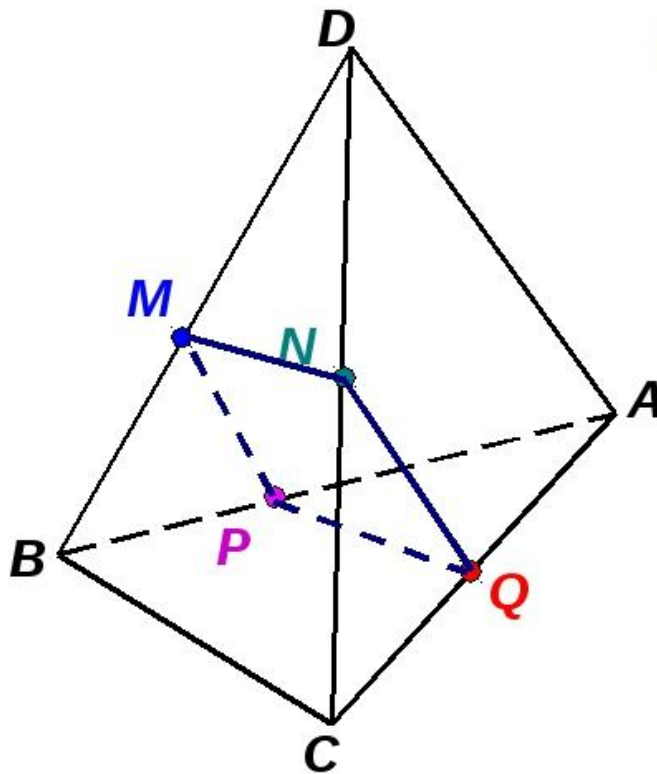


Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны:

$$(\alpha \parallel \beta, a \parallel b) \Rightarrow AB = CD.$$

# РЕШИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Задача 4.



**Дано:** M – середина BD

N – середина CD

Q – середина AC

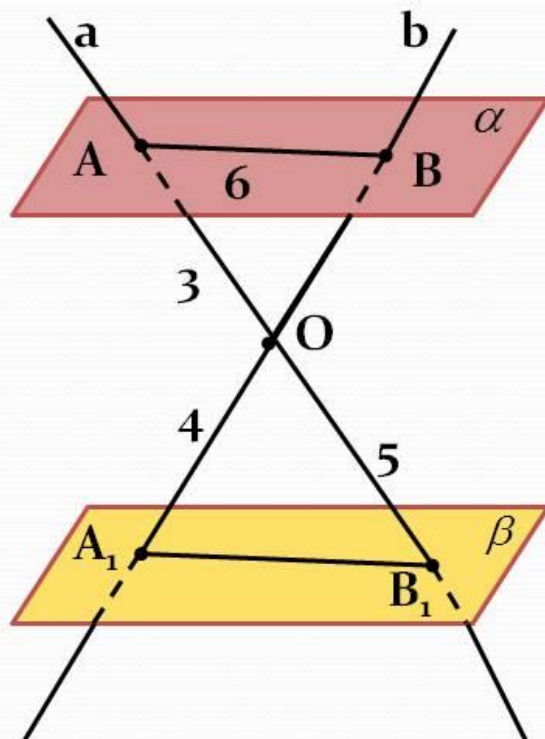
P – середина AB

AD = 12 см; BC = 14 см

**Найти:**  $P_{MNQP}$ .

# РЕШИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

## Задача 5.

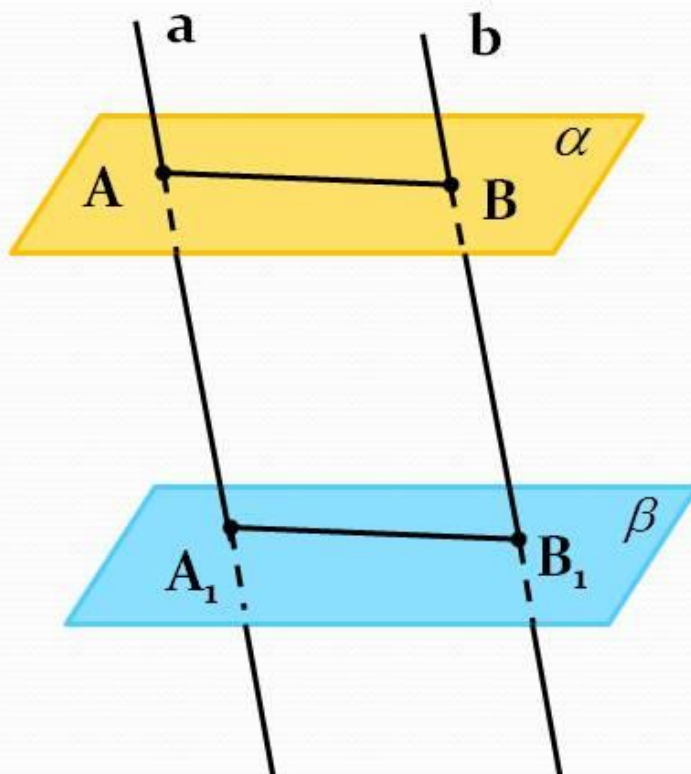


**Дано:** плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны, прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $O$ .

**Найти:**  $OB$  и  $A_1B_1$ .

# РЕШИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

## Задача 6.



**Дано:** плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны,  
 $a \parallel b$ ,  $AB = 6$  см

**Найти:**  $A_1B_1$