Числовые промежутки

Любое число можно отметить точкой на координатной прямой.

Каждой точке на координатной прямой соответствует какое-то число.

На координатной прямой можно отметить и множество чисел $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющих любому неравенству.

Такое множество называют **числовым промежутком**.

Типы неравенств

Строгие неравенства

подразумевают неравенство двух объектов

$a < b$ — *«а меньше b»*

$a > b$ — *«а больше b»*

$a \neq b$ — *«а не равно b»*

Нестрогие неравенства

допускают равенство входящих в него объектов

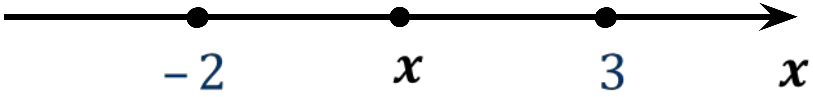
$a \leq b$ — *«а меньше либо равно b»*

$a \geq b$ — *«а больше либо равно b»*

Виды числовых промежутков

Пусть есть два числа: -2 и 3.

$$-2 < x < 3$$



*Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $-2 < x < 3$ называют **интервалом**.*

$$x \in (-2; 3)$$

*«**интервал** от минус двух до трех»*

$$-2 \le x \le 3$$

*Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $-2 \le x \le 3$ называют **числовым отрезком**.*

$$x \in [-2; 3]$$

*«**отрезок** от минус двух до трех»*

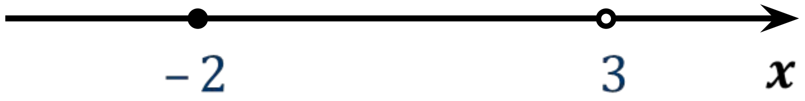
Виды числовых промежутков

*Множества чисел **x**, для которых выполняются двойные неравенства* $-2 \le \boldsymbol{x} < 3$ *или* $-2 < \boldsymbol{x} \le 3$, *называют* ***полуинтервалами***.

$x \in [-2; 3)$

*«**полуинтервал** от минус двух до трех, включая минус два»*

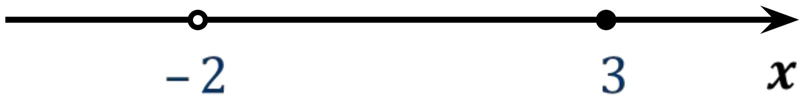
$-2 \le \boldsymbol{x} < 3$



$x \in (-2; 3]$

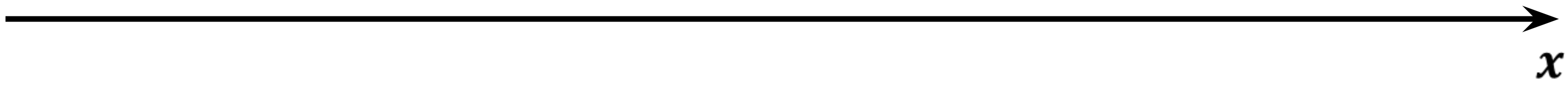
*«**полуинтервал** от минус двух до трех, включая три»*

$-2 < \boldsymbol{x} \le 3$



Виды числовых промежутков

Множество действительных чисел изображается **всей** координатной прямой.



Его называют ***числовой прямой***.

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

*«**промежуток** от минус бесконечности до плюс бесконечности»*

Виды числовых промежутков

Множество чисел, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{x} \geq 3$ *называют* ***числовым лучом***.

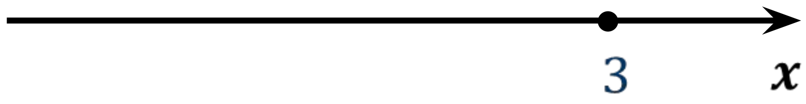
Множество чисел, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{x} \leq 3$ *называют* ***числовым лучом***.

$$\boldsymbol{x} \geq 3$$

$$x \in [3; +\infty)$$

«числовой луч
от трех до плюс бесконечности»

$$\boldsymbol{x} \leq 3$$



$$x \in (-\infty; 3]$$

«числовой луч
от минус бесконечности до трех»

Виды числовых промежутков

Множества чисел, удовлетворяющих условиям $\boldsymbol{x} > 3$ *или* $\boldsymbol{x} < 3$ *называют* ***открытым числовым лучом***.

$\boldsymbol{x} > 3$

$x \in (3; +\infty)$

«открытый числовой луч
от трех до плюс бесконечности»

$\boldsymbol{x} < 3$

$x \in (-\infty; 3)$

«открытый числовой луч
от минус бесконечности до трех»

Числовые отрезки

$x \in [-2; 3]$

Интервалы

$x \in (-2; 3)$

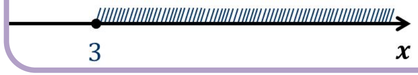
Полуинтервалы

$x \in [-2; 3)$

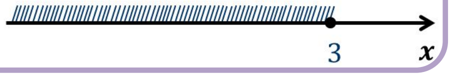
$x \in (-2; 3]$

Числовые лучи

$x \in [3; +\infty)$



$x \in (-\infty; 3]$



Открытые числовые лучи

$x \in (3; +\infty)$

$x \in (-\infty; 3)$

Числовые промежутки

*Если <u>граничная точка</u> в промежуток **не входит**, то <u>на координатной прямой</u> ее изображают **пустой точкой** и <u>в обозначении промежутка</u> ее выделяют **круглой скобкой**.*

*Если <u>граничная точка</u> **входит** в промежуток, то <u>на координатной прямой</u> ее изображают **закрашенной точкой** и <u>в обозначении промежутка</u> выделяют **квадратной скобкой**.*

Пусть есть некоторые числа $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$.

Неравенство, задающее числовой промежуток	**Название числового промежутка**	**Обозначение числового промежутка**	**Изображение числового промежутка на координатной прямой**
$a \le \boldsymbol{x} \le b$	***числовой отрезок***	$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$	
$a < \boldsymbol{x} < b$	***интервал***	$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$	
$a \le \boldsymbol{x} < b$	***полуинтервал***	$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$	
$a < \boldsymbol{x} \le b$	***полуинтервал***	$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$	
$\boldsymbol{x} \ge a$	***числовой луч***	$[\boldsymbol{a}; +\infty)$	
$\boldsymbol{x} \le a$	***числовой луч***	$(-\infty; \boldsymbol{a}]$	
$\boldsymbol{x} > a$	***открытый числовой луч***	$(\boldsymbol{a}; +\infty)$	
$\boldsymbol{x} < a$	***открытый числовой луч***	$(-\infty; \boldsymbol{a})$	

Задание. Изобразить на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенствам, и записать решение числовым промежутком:

а) $-1{,}5 \le x \le 5$, б) $y > 20$, в) $10 < z \le 30$.

Решение:

$x \in [-1{,}5; 5]$

$x \in (20; +\infty)$

$x \in (10; 30]$

Ответ: $x \in [-1{,}5; 5]$.

Ответ: $x \in (20; +\infty)$.

Ответ: $x \in (10; 30]$.

Задание. Найти все целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

а) $\mathbf{1 < x < 5}$, б) $\mathbf{-4 \le x \le 3}$.

Решение:

$x = \{2, 3, 4\}$

$x \in (1; 5)$

$x = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$x \in [-4; 3]$

Ответ: $x = \{2, 3, 4\}$.

Ответ: $x = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Задание. Найти пересечение и объединение числовых промежутков:
а) $[\mathbf{3};\mathbf{15}]$ и $[-\mathbf{3};\mathbf{6})$, б) $(-\infty;7]$ и $[\mathbf{2};+\infty)$.

Решение:

а) $[\mathbf{3};\mathbf{15}]$ и $[-\mathbf{3};\mathbf{6})$

$$[3;15]\cap[-3;6) = [\mathbf{3};\mathbf{6})$$

$$[3;15]\cup[-3;6) = [-\mathbf{3};\mathbf{15}]$$

Ответ: $[3;15]\cap[-3;6) = [\mathbf{3};\mathbf{6})$
$[3;15]\cup[-3;6) = [-3;15]$.

б) $(-\infty;\mathbf{7}]$ и $[\mathbf{2};+\infty)$

$$(-\infty;7]\cap[2;+\infty) = [\mathbf{2};\mathbf{7}]$$

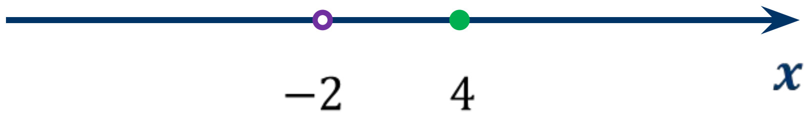
$$(-\infty;7]\cup[2;+\infty) = (-\infty;+\infty)$$

Ответ: $(-\infty;7]\cap[2;+\infty) = [2;7]$
$(-\infty;7]\cup[2;+\infty) = (-\infty;+\infty)$.

Задание. Найти пересечение и объединение числовых промежутков:
в) $(-\infty; -2)$ и $[4; +\infty)$.

Решение:

в) $(-\infty; -2)$ и $[4; +\infty)$



$(-\infty; -2) \cap [4; +\infty) = \emptyset$

$(-\infty; -2) \cup [4; +\infty) = (-\infty; -2) \cup [4; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2) \cap [4; +\infty) = \emptyset$
$(-\infty; -2) \cup [4; +\infty)$.

Интервал – это множество чисел, удовлетворяющих условию

$$a<x<b$$

Отрезок – это множество чисел, удовлетворяющих условию

$$a \le x \le b$$

Полуинтервал – это множество чисел, удовлетворяющих условиям

$a \le x < b$ или $a < x \le b$

Числовой луч – это множество чисел, удовлетворяющих условиям

$x \ge a$ или $x \le a$

Открытый луч – это множество чисел, удовлетворяющих условиям

$x > a$ или $x < a$

Решение неравенств с одной переменной

На координатной прямой можно отметить и множество чисел x, удовлетворяющих любому неравенству.

2015

21

$$a < b$$

Такие неравенства называют ***неравенством с одной переменной*** *или* ***неравенством с одним неизвестным.***

$a \neq b$ $a > b$

Пусть есть два числа: -2 и 3.

-2 3

$\cancel{x}$ – неверное числовое неравенство.

$$\boxed{-2 < x < 3}$$

Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $-2 < x < 3$ называют ***интервалом.***

$$2 \cdot 5 > 5 \Leftrightarrow 10 > 5$$

Ответ: $x \in [-1{,}5; 5]$.

$x \in (10; 30]$

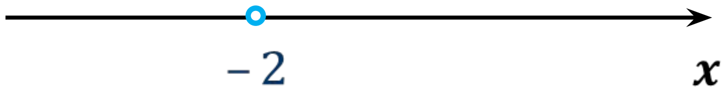
$\cancel{3}$

Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $-2 \leq x \leq 3$ называют

$x \in \cancel{[-2; 3]}$

$$-2 \leq x \leq 3$$

$x \in (-2; 3)$ -2 3 x



3

Решением неравенства с одной переменной *называется значение переменной, которое обращает его в* ***верное числовое неравенство****.*

Решить неравенство – это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются ***равносильными****, если каждое решение одного неравенства является решением другого.*

Равносильными называются и неравенства, которые не имеют решений.

Например:

Докажем $x \in (-2; 3)$

-2 3

x

$$-2 < x \leq 3$$

$x \in (-2; 3]$

Свойства числовых неравенств:

*1. Если в неравенстве **перенести слагаемое** из одной части в другую с противоположным знаком, то получится неравенство, **равносильное** данному.*	$x \in (-\infty; +\infty)$
*2. Если обе части неравенства **умножить или разделить** на одно и то же положительное число, то получится неравенство, **равносильное** данному.*	x
*3. Если обе части неравенства **умножить или разделить** на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, **равносильное** данному.*	з

Задание. Решить неравенства:

а) $3x \le 2$, $x \le 3$

б) $-5 \cdot (4 - x) < 2x - 2$,

в) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} > \frac{x-3}{4}$. $x \in [3; +\infty)$

Решение:

3

x

$-20 + 5x < 2x - 2$

x

$x > 3$

$x \in (3; +\infty)$

3

$\frac{\cancel{12}\cdot(x-1)}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{12}\cdot(x-2)}{\cancel{3}} > \frac{\cancel{12}\cdot(x-3)}{\cancel{4}}$

$-2 \le x < 3$

$6x - 6 - 4x + 8 > 3x - 9$

$6x - 4x - 3x > -9 + 6 - 8$

$-x > -11$

$x < 11$

Множество чисел, удовлетворяющих условию x называют числовым лучом.

$x \le 3$

$x < 3$

x

11

x

$x \in (-\infty; 3]$

Множества чисел, удовлетворяющих условиям $x > 3$ и $x <$ называют открытым числовым лучом.

$x \in (-\infty; 3)$

Пусть есть некоторые числа a и b причем $a < b$

Линейные неравенства с одной переменной

$a < x \leq b$

$x \leq a$

$x \geq a$

$x > a$

$a \leq x \leq b$

x

x

Множество чисел, удовлетворяющих условию x называют числовым лучом.

$x \leq 3$

$x \in (-\infty; 3]$

Множества чисел, удовлетворяющих условиям $x > 3$ или $x <$ называют открытым числовым лучом.

Множества чисел x, для которых выполняются двойные неравенства $-2 \leq x < 3$ или $-2 < x \leq 3$, называют **полуинтервалами**.

Множество чисел, удовлетворяющих условию $x \geq 3$ называют числовым лучом

3

$x > 3$

x

3

$x < 3$

x

$x \in (-\infty; 3)$

$a \leq x < b$

$$\frac{\cancel{12}\cdot(x-1)}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{12}\cdot(x-2)}{\cancel{3}} > \frac{\cancel{12}\cdot(x-3)}{\cancel{4}}$$

$$6(x-1) - 4(x-2) > 3(x-3)$$

$$6x - 6 - 4x + 8 > 3x - 9$$

$a < x < b$

$$-x > -11$$

$$x < 11$$

11

x

Пусть есть некоторые числа a и b причем $a < b$

$\boxed{x < a}$ $\boxed{[a; b]}$

Неравенство такого вида либо ***не имеют решений***, либо их ***решением является любое число***.

Например:

$(a; b)$

$[a; b)$

$(a; b]$

$[a; +\infty)$

$(-\infty; a]$

$0 > -7$

$(-\infty; a)$

$(a; +\infty)$

$3x + 1 < 3x - 6$

$3x - 3x < -6 - 1$

$0 \cdot x < -7$

$0 < -7$

нет решений

$x \in \emptyset$

Ответ: $x \in \emptyset$.

Задание. Изобразить на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенствам, и записать решение числовым промежутком:

а) $\mathbf{-1{,}5 \le x \le 5}$, б) $\mathbf{y > 20}$, в) $\mathbf{10 < z \le 30}$.

Решением неравенства с одной неизвестной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство – это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются **равносильными**, если каждое решение одного неравенства является решением другого.

Равносильными называются и неравенства, которые не имеют решений.