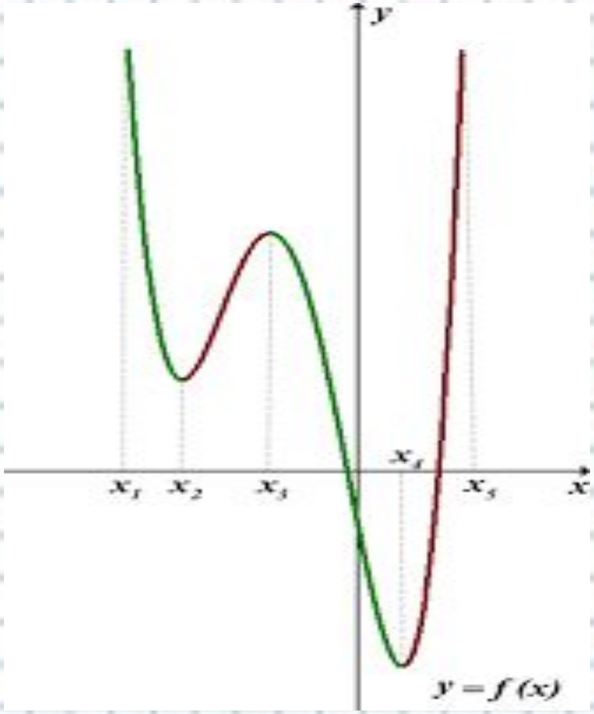
Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы и построение графиков.

I. Монотонность функции

(Возрастание и убывание функций)



f(x2)
f(x1)
x1
x2
возрастающая функция
f(x1)
f(x2)
x1
x2
убывающая функция

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x)>0$, то функция $y= f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x)<0$ то функция $y= f(x)$ убывает на промежутке X.

Теорема 3. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y= f(x)$ постоянна на промежутке X.

Определение. Промежутки возрастания и убывания функции называются промежутками <u>монотонности</u> функции.

II.Экстремумы функции.

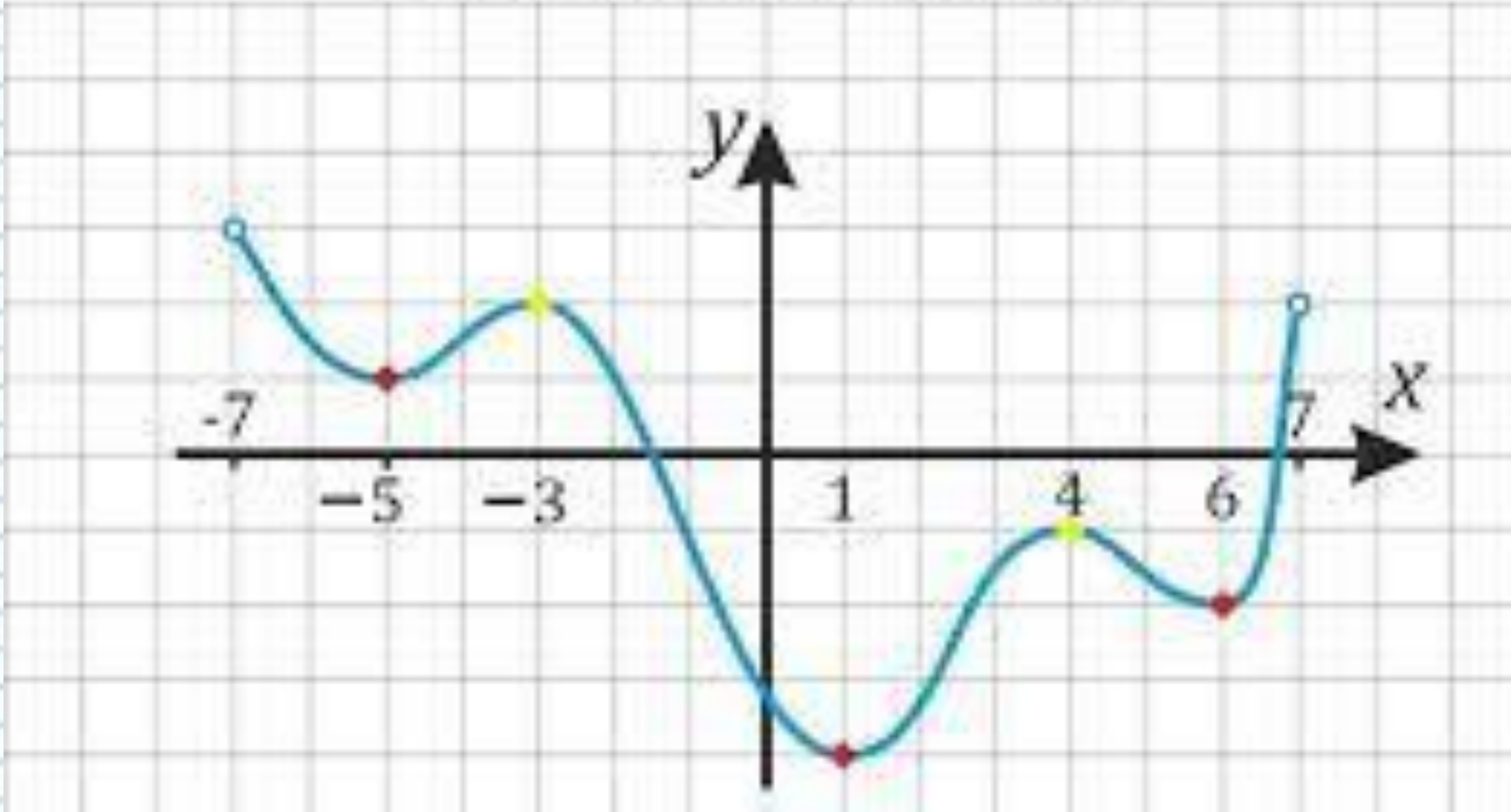
<u>Определение 1</u>. Точку $x=x_0$ называют **точкой минимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство

$$f(x)>f(x_0).$$

<u>Определение 2.</u> Точку $x=x_0$ называют **точкой максимума функции $y = f(x)$**, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство

$$f(x)<f(x_0).$$

График функции



◆ - точки минимумов

● - точки максимумов

Значение максимума и минимума обозначаются: y_{max}, y_{min} соответственно.

Определение 3. Точки минимума и максим<u>точками экстремума </u>ума функции называют –функции (от латинского слова extremum – «крайний»)

Теорема 1. ***Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная либо равна нулю ($f'(x) = 0$), либо не существует.***

Определение 4. ***Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называют стационарными, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует – критическими.***

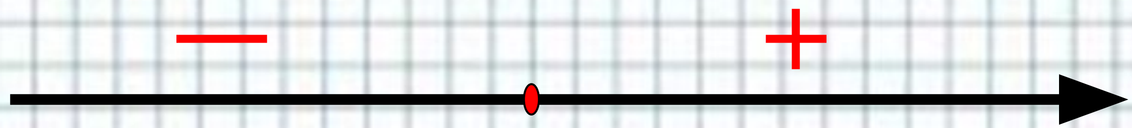
Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x=x_0$, тогда:

1) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$, выполняется неравенство $f'(x)<0$, а при $x>x_0$ – неравенство $f'(x)>0$, то $x=x_0$ – **точка минимума функции $y=f(x)$;**

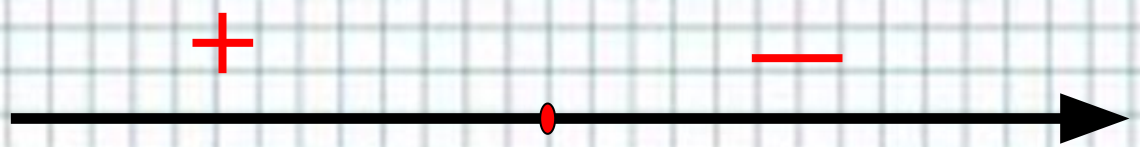
2) Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x) >0$, а при $x>x_0$ – неравенство $f'(x)<0$, то $x=x_0$ – **точка максимума функции $y=f(x)$;**

3) Если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

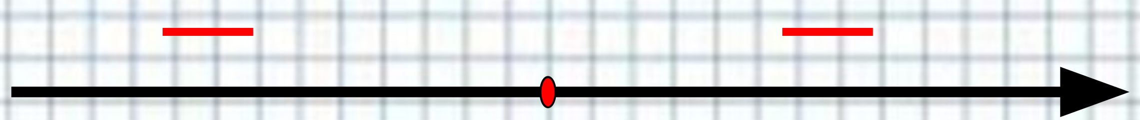
Для запоминания!!!



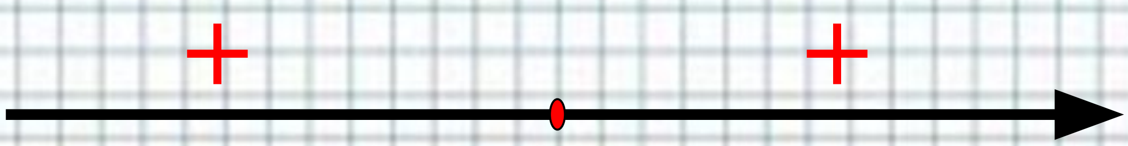
min



max



Экстремума нет



Экстремума нет