

ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ

ЛЕКЦІЯ 5

ПЛАН

1. Електростатичне поле і його характеристики.
Електричний заряд. Закон Кулона
2. Електричне поле. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції полів.
3. Робота в електричному полі.
4. Потенціальний характер електростатичних полів.
Потенціал електричного поля. Різниця потенціалів.
5. Зв'язок між потенціалом електричного поля в даній точці та його напруженістю.

НА САМОСТІЙНЕ ОПРАЦЮВАННЯ

1. Опрацювати зміст лекції та відповідні розділи у підручниках.
2. Теорема Остроградського-Гауса та її застосування до розрахунку електростатичних полів.

Електричний заряд

* В природі існує чотири основні види взаємодії - *гравітаційна, електромагнітна, сильна та слабка*. Мірою гравітаційної взаємодії є маса тіла.

Електричний заряд - фізична величина, що характеризує здатність тіл чи частинок приймати участь у електромагнітній взаємодії.

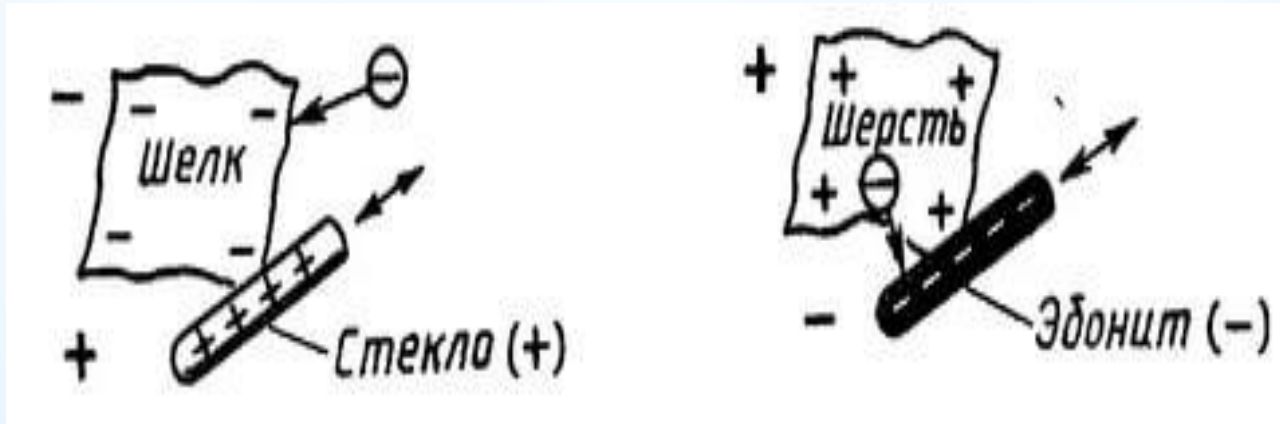
Одиниця електричного заряду $[q] = 1\text{Кл} = 1\text{А}\cdot\text{с}$.

Елементарний заряд $e = 1,6\cdot 10^{-19}\text{Кл}$.

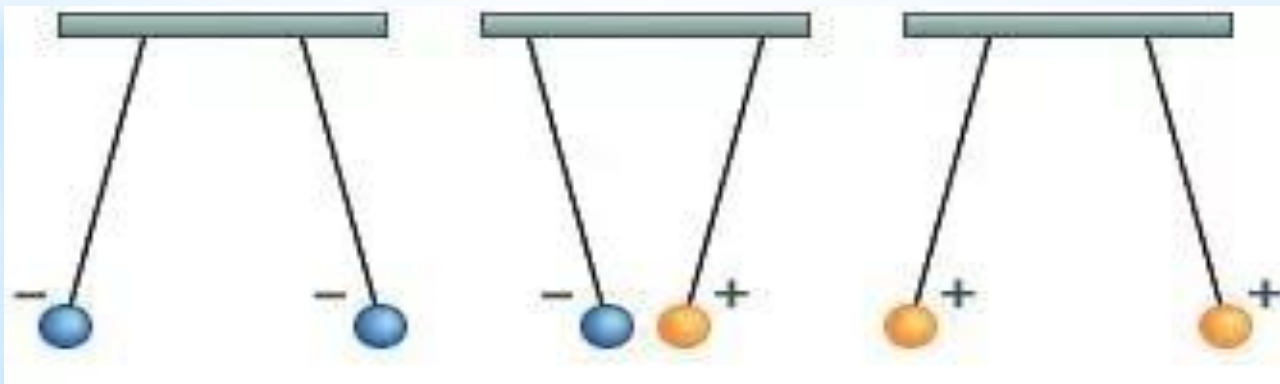
Носієм елементарного негативного заряду є *електрон*; елементарного позитивного заряду - *протон*.

Фундаментальні властивості електричного заряду

1) Існує двох видів - позитивний і негативний.



Одноименні заряди відштовхуються, різноименні - притягуються.



Фундаментальні властивості електричного заряду

2) *Інваріантність* (величина електричного заряду не залежить від вибору системи відліку та від того, рухається він чи перебуває в стані спокою)

3) *Дискретність* (заряд будь-якого тіла є кратним елементарному електричному заряду e)

$$q = N \cdot e$$

4) *Адитивність* (заряд будь-якої системи тіл або частинок дорівнює сумі зарядів тіл чи частинок, що входять в систему).

$$q = q_1 + q_1 + \dots + q_n$$

Фундаментальні властивості електричного заряду

5) Закон збереження електричного заряду виконується у замкнених системах:

в замкненій системі електричних зарядів за будь-яких процесів у ній алгебраїчна сума зарядів з часом не змінюється

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const}$$

Густина заряду

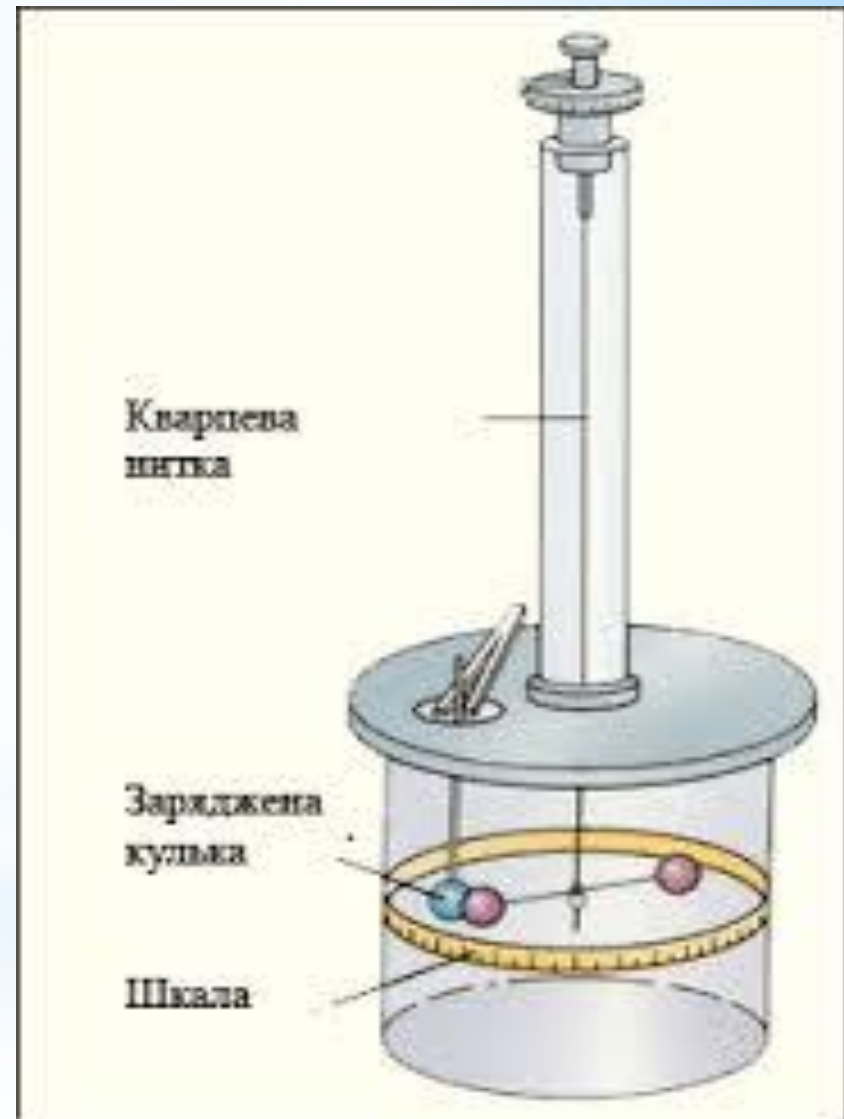
Розподіл електричного заряду по тонкому провіднику, по поверхні та по об'єму характеризують відповідно лінійною, поверхневою та об'ємною густиною заряду

Назва	Формула за означенням	Формула у випадку рівномірного розподілу	Одиниця виміру

Закон Кулона

**Сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів і у вакуумі прямо пропорційна добутку величин цих зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між ними і напрямлена вздовж прямої, яка з'єднує ці заряди*

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{r^2}$$



Закон Кулона

* Скалярна форма запису:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Векторна форма запису:

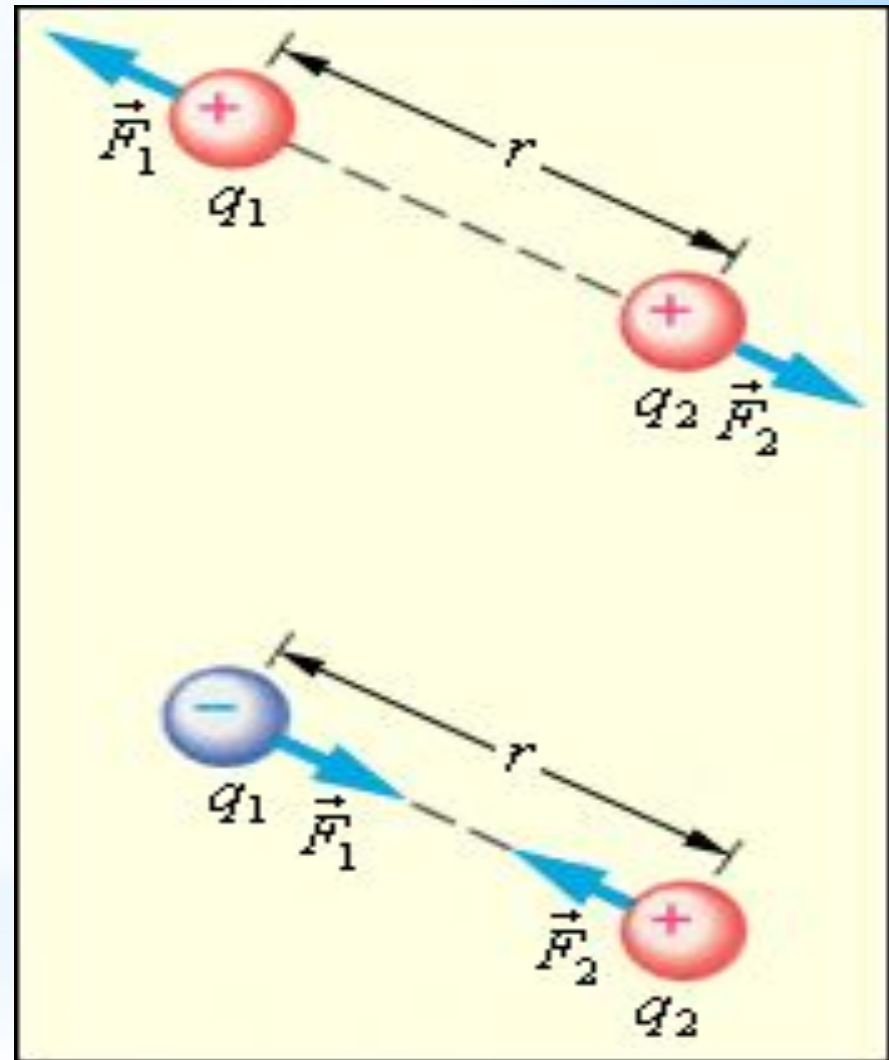
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$ -

електрична стала

Коефіцієнт пропорційності

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$



Закон Кулона

У випадку знаходження двох точкових зарядів в однорідному ізотропному середовищі з відносною діелектричною проникністю ϵ :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}$$

Для кулонівських сил у випадку дії на заряд не одного заряду, а декількох, справедливим є принцип суперпозиції : *сила, яка діє на заряд, дорівнює векторній сумі сил дії на нього інших зарядів*

$$\vec{F} = \sum^n \vec{F}_i$$

Електричне поле

Видатні англійські вчені Фарадей і Максвелл встановили, що у просторі навколо заряджених тіл (частинок), існує **електричне поле**.

Поле - одна з форм існування матерії. Поле можна дослідити, описати його силові, енергетичні та інші властивості.

Головна властивість електричного поля - дія з певною силою на електричні заряди.

Отже, взаємодія заряджених тіл здійснюється за допомогою електричного поля, яке оточує заряджені тіла.

Електростатичне поле. Напруженість

**Електростатичне поле* - це електричне поле, яке створюється нерухомими зарядами і є незмінним у часі.

Силовою характеристикою електростатичного поля є його *напруженість* - фізична величина, що визначає силу, з якою електростатичне поле діє на одиничний позитивний заряд, внесений в дану точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Одиниця напруженості

$$[E] = 1\text{Н/Кл} = 1\text{В/м}$$

Поняття про пробний заряд

Для дослідження електростатичного поля в нього вносять *маленьке заряджене тіло, яке несе малий електричний заряд* (його називають *пробний заряд*). Пробний точковий заряд повинен бути буде малим, щоб не спотворювати поле, в якому знаходиться (або не викликати перерозподіл зарядів, що створюють поле), і тому за силою, яка діє на пробний заряд, можна робити висновок про поле, створене зарядженим тілом (або сукупністю заряджених тіл).

Напруженість поля точкового заряду

*Напруженість поля точкового заряду у векторній формі запису визначається залежністю:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^3} \vec{r}$$

де \vec{r} - радіус-вектор, який з'єднує дану точку поля з зарядом q , або в скалярній формі запису

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^2}$$

Напрямок вектора напруженості співпадає з напрямком сили, яка діє на позитивний заряд.

Вектор електростатичної індукції (електричного зміщення)

*Оскільки напруженість електричного поля в діелектричному середовищі залежить від його властивостей $E = E(\epsilon)$, то вводять ще одну фізичну величину, що є силовою характеристикою електричного поля, але не залежить від діелектричних властивостей середовища - **вектор електростатичної індукції або електричного зміщення**, що пов'язаний з напруженістю наступним співвідношенням:

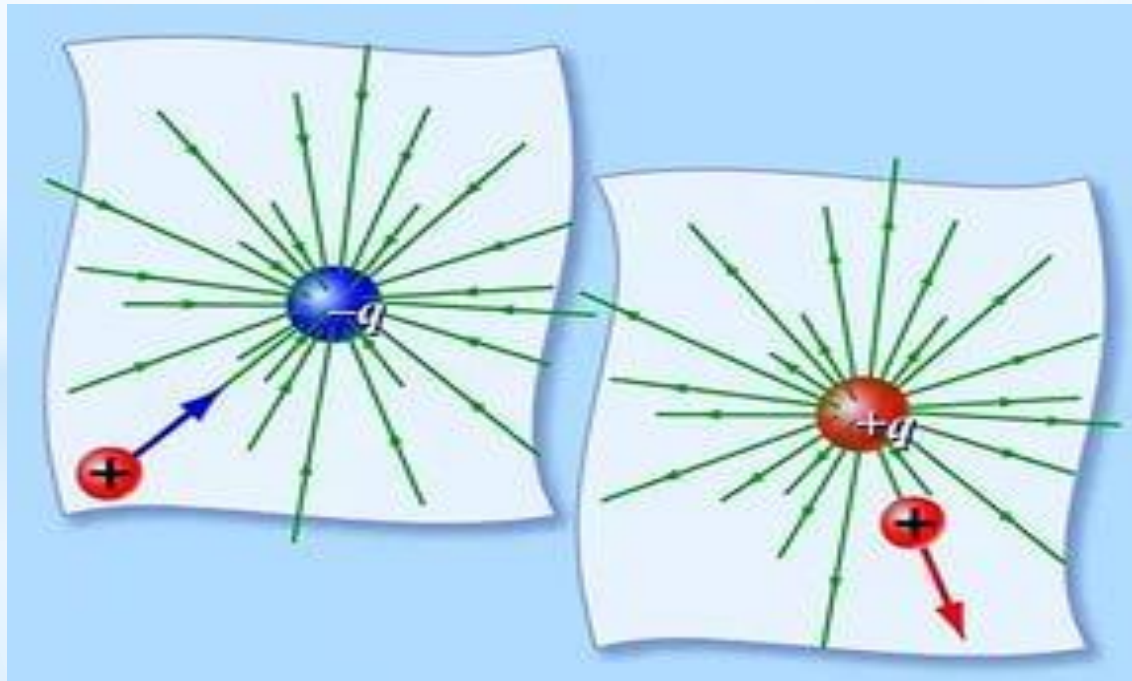
$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$$

Для поля точкового заряду:

$$D = \epsilon\epsilon_0 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

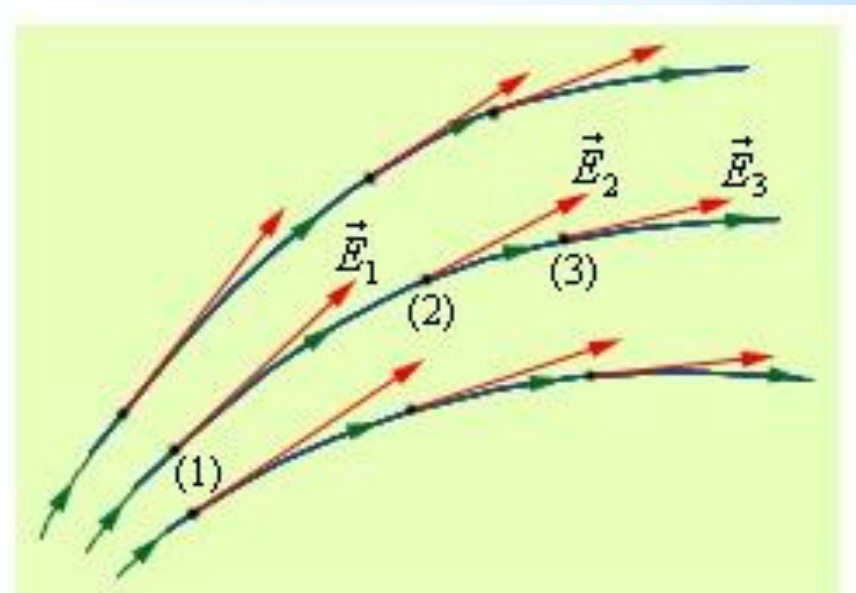
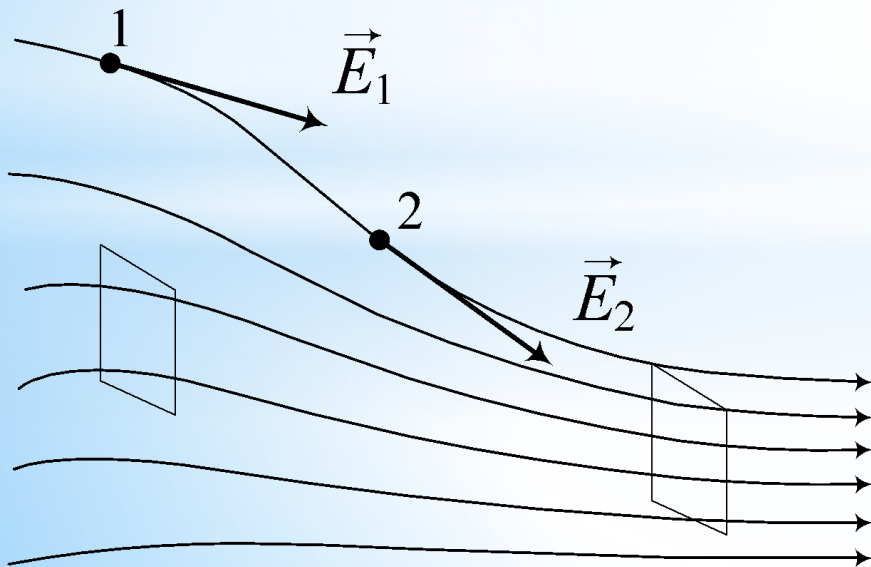
Напруженість поля точкового заряду

Якщо поле створюється позитивним зарядом, то вектор напруженості напрямлений вздовж радіус-вектора від заряду в зовнішній простір (відштовхування пробного позитивного заряду); якщо ж негативним зарядом, то вектор E напрямлений до заряду.



Лінії напруженості

**Лінії напруженості (силові лінії) електростатичного поля - це лінії, дотичні до яких в кожній точці співпадають з напрямком вектору напруженості \vec{E} . Густина силових ліній, що проходять через одиницю поверхні, перпендикулярної до них, пропорційна модулю напруженості.*

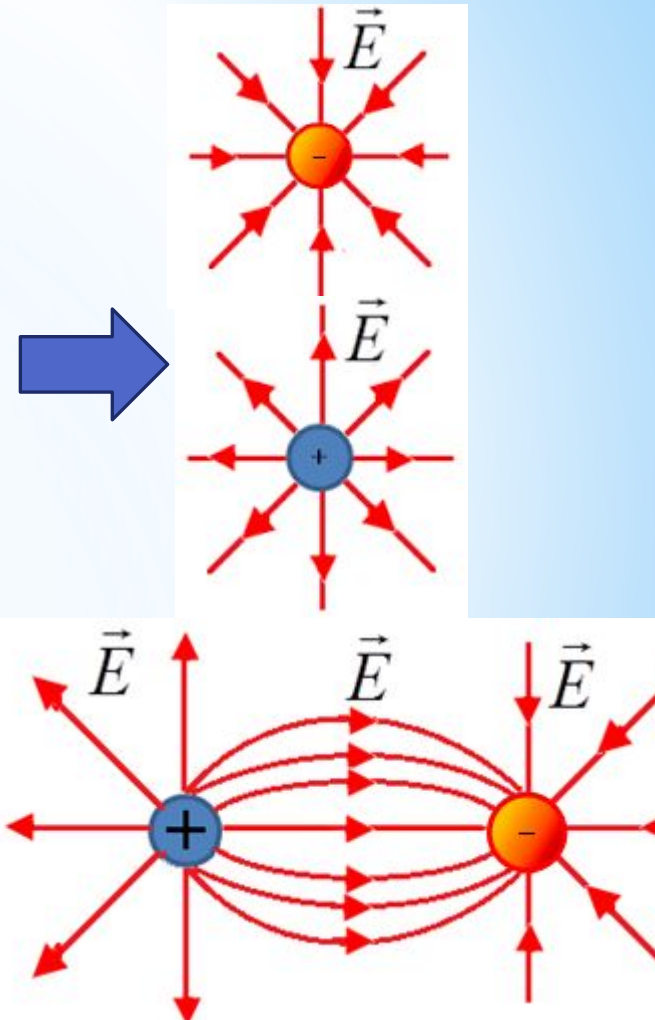


Лінії напруженості

Якщо поле створюється точковим зарядом, то лінії напруженості - *радіальні прямі*, що виходять із заряду, якщо він позитивний і входять в нього, якщо заряд негативний

Лінії напруженості системи двох однойменних зарядів

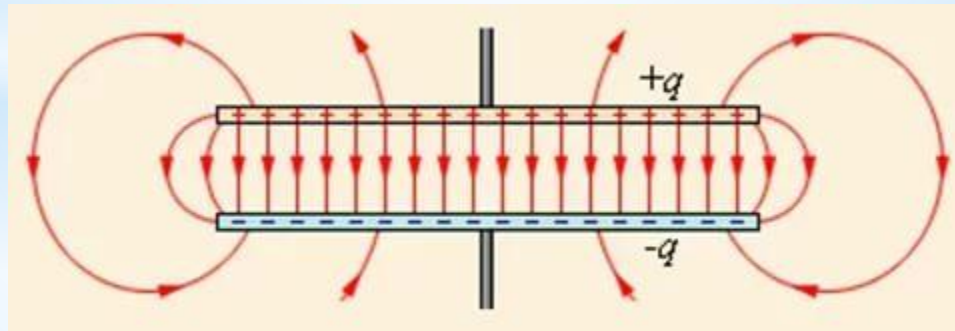
Силкові лінії починаються на позитивному, закінчуються на негативному електричних зарядах і ніде не перетинаються.



Однорідне електростатичне поле

Електричне поле називається *однорідним*, якщо вектор напруженості однаковий за напрямом і абсолютним значенням в кожній точці поля, що відповідає однаковій густині силових ліній.

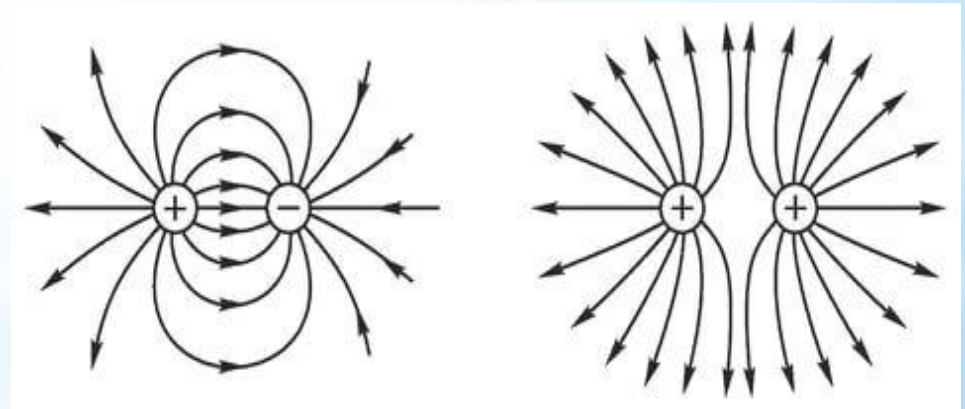
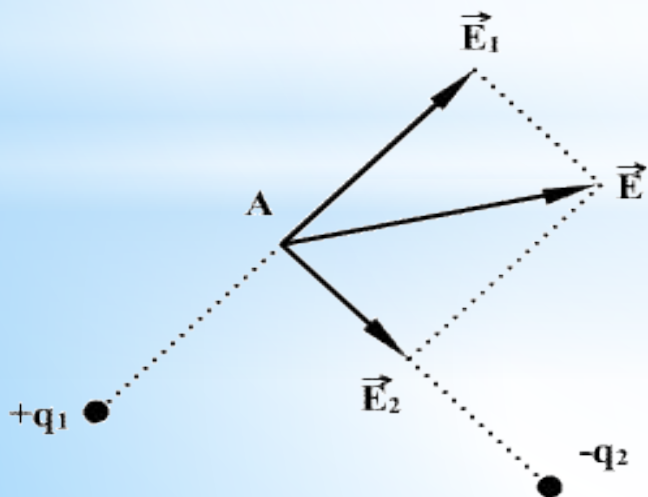
Для однорідного поля лінії напруженості паралельні вектору напруженості. Однорідним можна вважати поле між паралельними різнойменно зарядженими пластинами.



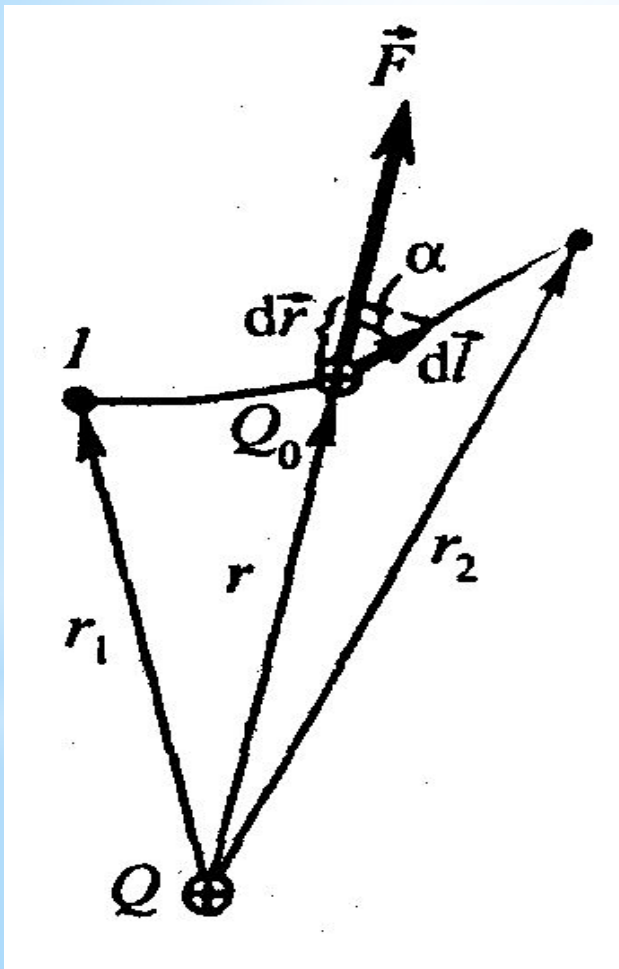
Принцип суперпозиції

У випадку створення електричного поля не одним, а декількома електричними зарядами, напруженість результуючого поля визначається за *принципом суперпозиції* як векторна сума напруженостей полів окремих зарядів

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$



Робота сил електростатичного поля по переміщенню точкового заряду



* Нехай точковий заряд q переміщується в полі заряду Q вздовж довільної траєкторії.

У загальному випадку неоднорідного поля, коли E змінюється від однієї точки до іншої, на малій ділянці здійснюється робота

$$\begin{aligned} dA &= \vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \alpha \\ &= F dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dr \end{aligned}$$

Робота сил електростатичного поля по переміщенню точкового заряду

Робота по переміщенню заряду q з початкової точки 1 в кінцеву точку 2 знаходиться за допомогою інтегрування:

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} dr = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_2} \end{aligned}$$

Робота не залежить від траєкторії, а визначається тільки положеннями початкової 1 і кінцевої 2 точок!

Робота сил електростатичного поля

Робота, що виконується при переміщенні заряду в електричному полі вздовж замкненої траєкторії (точки 1 та 2 співпадають):

$$\begin{aligned} A &= \oint_l (\vec{F} d\vec{l}) = \oint_l (q\vec{E} d\vec{l}) = \\ &= q \oint_l (\vec{E} d\vec{l}) = 0 \end{aligned}$$

де l - **замкнений контур**, по якому проводиться інтегрування (якщо контур замкнений, то $\Delta\vec{r} = 0$).

Поля, в яких робота не залежить від форми траєкторії або при переміщенні по замкнутому контуру рівна нулю, називають потенціальними.

Циркуляція вектора напруженості

*Робота при переміщенні одиничного точкового заряду по замкненому контуру: $\frac{A}{q} = \oint (\vec{E} \vec{dl}) = 0$

$C_{\vec{E}} = \oint (\vec{E} \vec{dl})$ – циркуляція вектора напруженості.

Якщо поле потенціальне, то циркуляція його силового вектора дорівнює нулю.

Математично ознака потенціальності електростатичного поля записується наступним чином:

$$C_{\vec{E}} = \oint (\vec{E} \vec{dl}) = 0$$

Отже, електростатичне поле точкового заряду є *потенціальним*, а електростатичні сили – *консервативними*.

Циркуляція вектора напруженості

* Якщо S - довільна поверхня, яка опирається на контур l , для якого визначається циркуляція, то згідно з теоремою Стокса, яка встановлює зв'язок між лінійним і поверхневим інтегралами, **циркуляція вектора \vec{E}** :

$$\oint (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \int \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Оскільки циркуляція дорівнює нулю, то і ротор вектора напруженості електростатичного поля дорівнює нулю:

$$\text{rot } \vec{E} = \mathbf{0}$$

Потенціальна енергія електростатичного поля

Робота консервативних сил здійснюється за рахунок зменшення потенціальної енергії, тобто роботу A_{12} можна подати як різницю потенціальних енергій заряду q в початковій і кінцевій точках поля заряду Q :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r_2} = W_1 - W_2$$

Тут $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$ - потенціальна енергія заряду q ,

що знаходиться в електростатичному полі заряду Q . Її значення залежить від заряду q , а відношення

$\frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ від величини заряду q не залежатиме.

Потенціал електростатичного поля

**Потенціалом* електростатичного поля називається фізична величина, що дорівнює відношенню потенціальної енергії до величини заряду, внесеного в поле, тобто визначає потенціальну енергію одиничного позитивного заряду, поміщеного в дану точку

$$\varphi = \frac{W}{q} \quad \text{або} \quad \varphi = \frac{A_{\infty}}{q}$$

визначає роботу електростатичного поля по переміщенню одиничного позитивного заряду при віддаленні його з цієї точки у нескінченність

Потенціал - енергетична характеристика електростатичного поля

Потенціал поля точкового заряду визначається формулою

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Різниця потенціалів

Знаючи потенціал даної точки поля, потенціальну енергію можна обчислити за формулою

$$W = q\varphi$$

Тобі робота може бути визначена як

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) \\ = qU$$

тут $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - різниця потенціалів між точками 1 і 2.

Також різниця потенціалів може бути обчислена за формулою

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

Принцип суперпозиції для потенціальної енергії та потенціалу

Якщо поле створюється системою n точкових зарядів, то потенціальна енергія W заряду q , що знаходиться в цьому полі, дорівнює сумі його потенціальних енергій W_i , створюваних кожним із зарядів окремо:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = q \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r}$$

а потенціал поля системи зарядів дорівнюватиме алгебраїчній сумі потенціалів полів всіх цих зарядів:

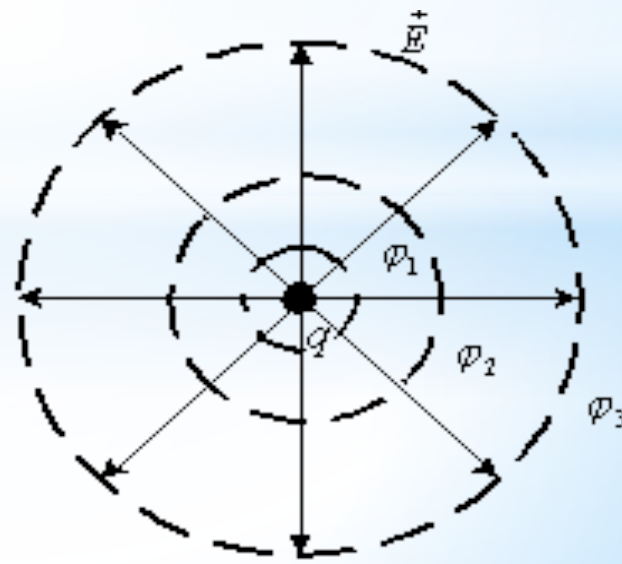
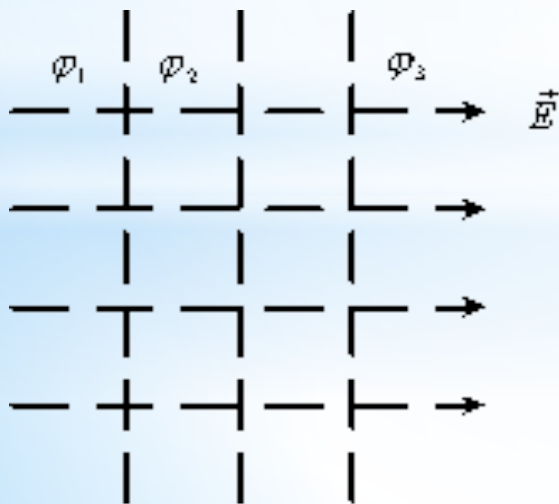
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

Еквіпотенціальні поверхні

Для наочного графічного зображення поля також використовують поверхні однакового потенціалу (еквіпотенціальні поверхні).

Еквіпотенціальні поверхні - це поверхні, у всіх точках яких потенціал має однакове значення.

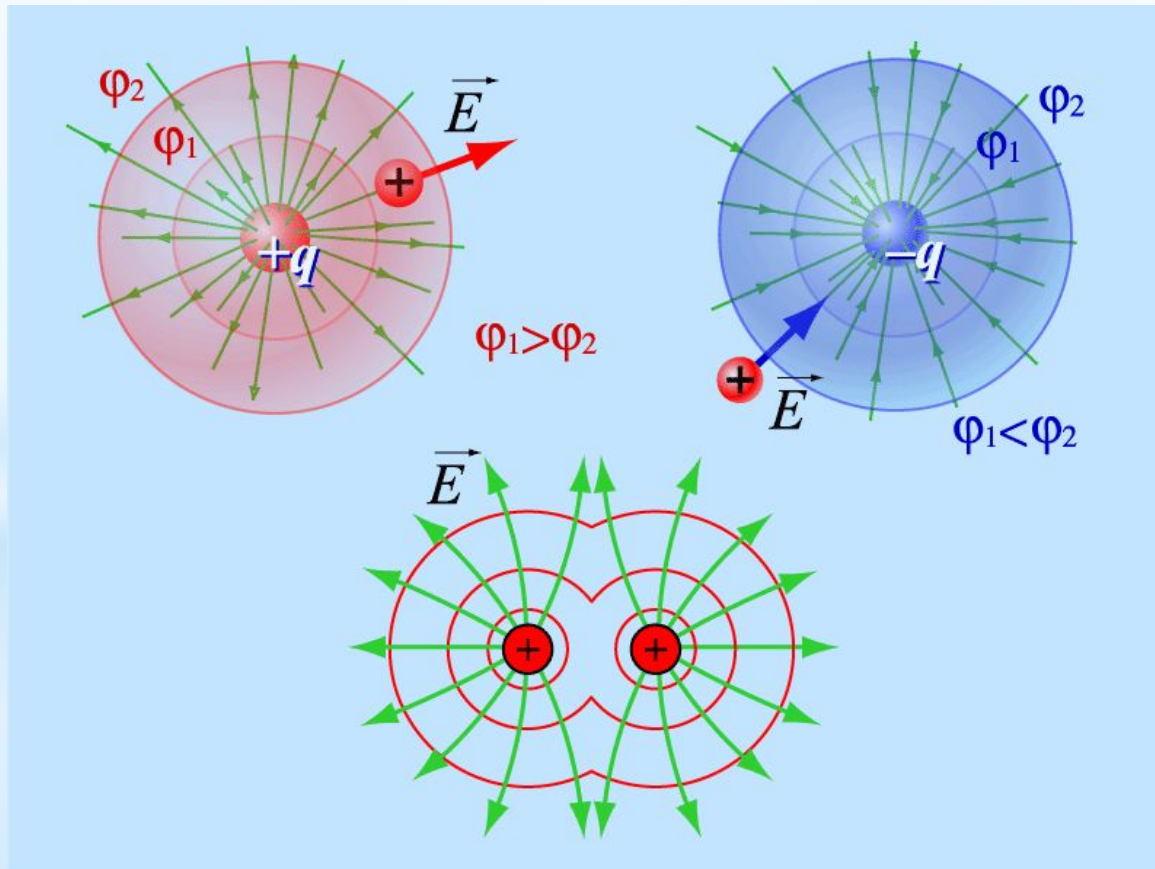
Еквіпотенціальні поверхні зазвичай проводять так, щоб різниці потенціалів між двома сусідніми еквіпотенціальними поверхнями були однаковими. Тоді густина еквіпотенціальних поверхонь наочно характеризує напруженість поля в різних точках: там, де ці поверхні розташовані густіше, напруженість поля більше.



Взаємне розташування ліній напруженості та екіпотенціальних поверхонь

Вектор напруженості \vec{E} :

- 1) завжди перпендикулярний до екіпотенціальних поверхонь;
- 2) завжди напрямлений у бік зменшення потенціалу.



Зв'язок між потенціалом електричного поля в даній точці та його напруженістю

Елементарна робота переміщення точкового заряду в електростатичному полі:

$$dA = q_0 (\vec{E} \cdot \vec{dr}) = q_0 d\varphi$$

$$(\vec{E} \cdot \vec{dr}) = d\varphi$$

В скалярному вигляді **зв'язок між потенціалом і напруженістю:**

$$E = \frac{d\varphi}{dr}$$

Зв'язок між потенціалом електричного поля в даній точці та його напруженістю

* Проекція вектора напруженості електричного поля на довільний напрямок чисельно дорівнює зменшенню потенціалу поля на одиницю довжини в цьому напрямку. В векторному вигляді цей зв'язок має вигляд

$$\vec{E} = -grad \varphi$$

$$\left(grad \varphi = \frac{d\varphi}{dx} \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \vec{k} \right) - \text{векторна функція}$$

Зв'язок між потенціалом електричного поля в даній точці та його напруженістю

* Позначивши $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ - оператор Лапласа, формулу $\vec{E} = -\mathit{grad} \varphi$ можна записати у вигляді

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \varphi$$

Оскільки сила, яка діє з боку поля на внесений в нього пробний заряд q і потенціальна енергія цього заряду в полі визначаються відповідно:

$$F = q \cdot E \qquad W_n = q \cdot \varphi,$$

то зв'язок між електричною силою і потенціальною енергією можна подати у вигляді:

$$\vec{F} = -\mathit{grad} W_{\Pi}$$