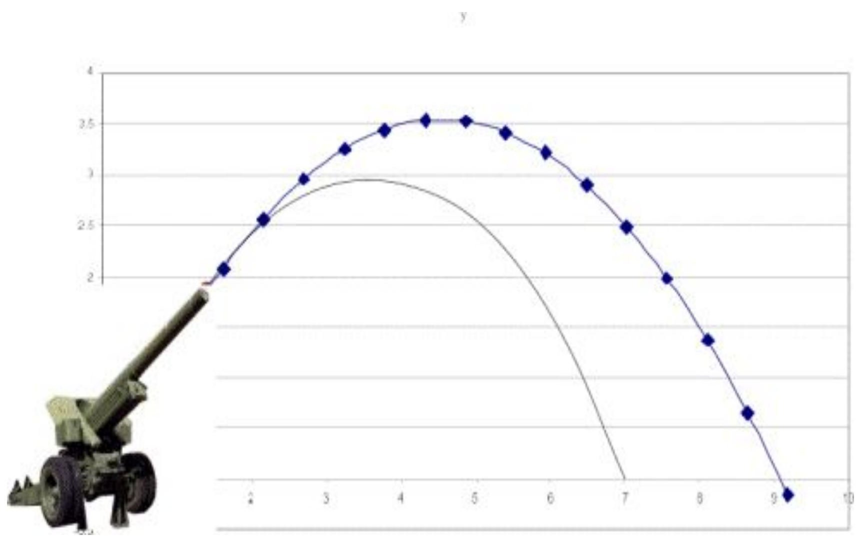
Движение тела брошенного под углом к горизонту

Повторение, решение задач

10 класс



Движение тела под действием силы тяжести.

Задача. Решить основную задачу механики для тела брошенного с начальной скоростью v_0 под углом к горизонту α

Дано:

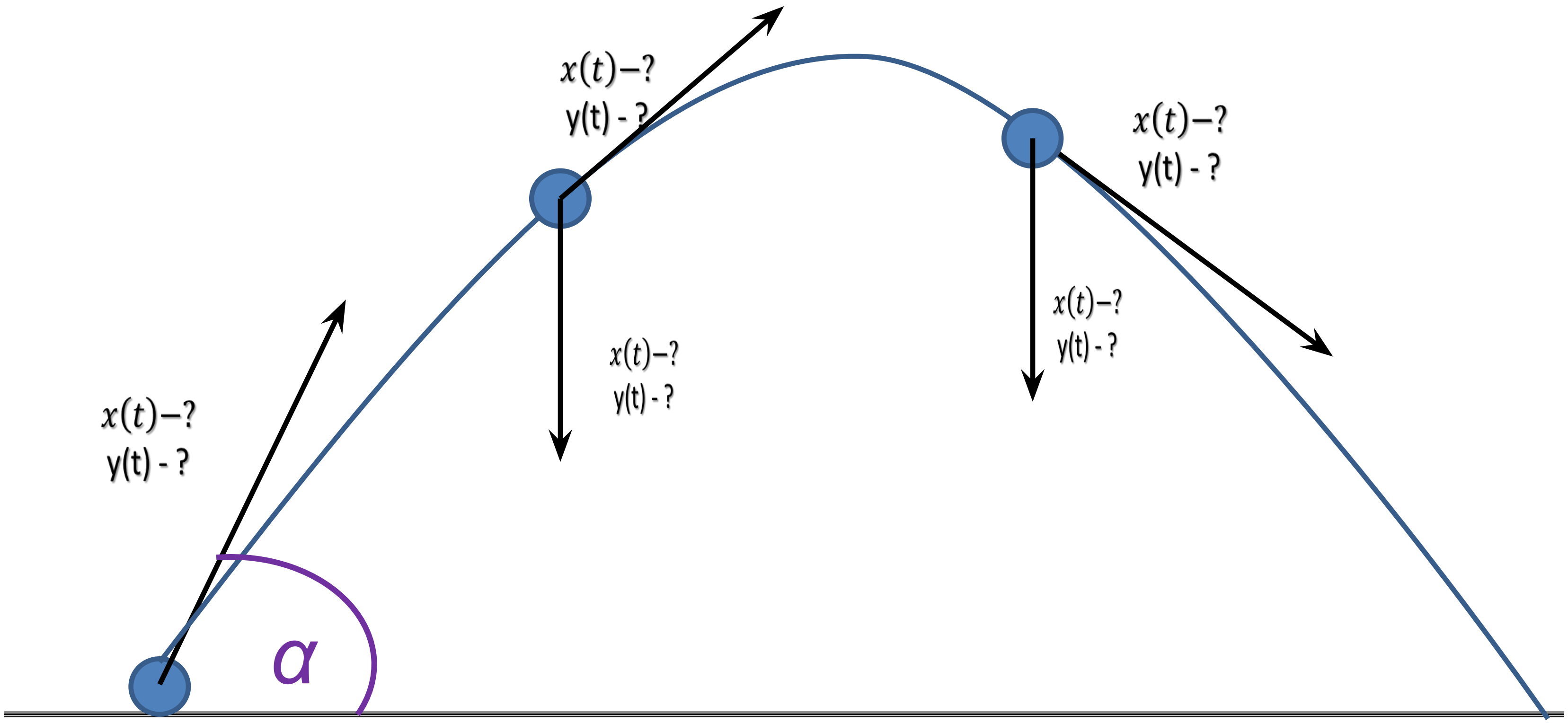
v_0

α

$x(t) - ?$

$y(t)$ - ?

Расставим векторы скорости и ускорения



Решение задачи.

Так как тело движется с ускорением свободного падения, то искать решение будем исходя из уравнения равноускоренного движения.

$x(t)$ — ?

$y(t)$ – ?

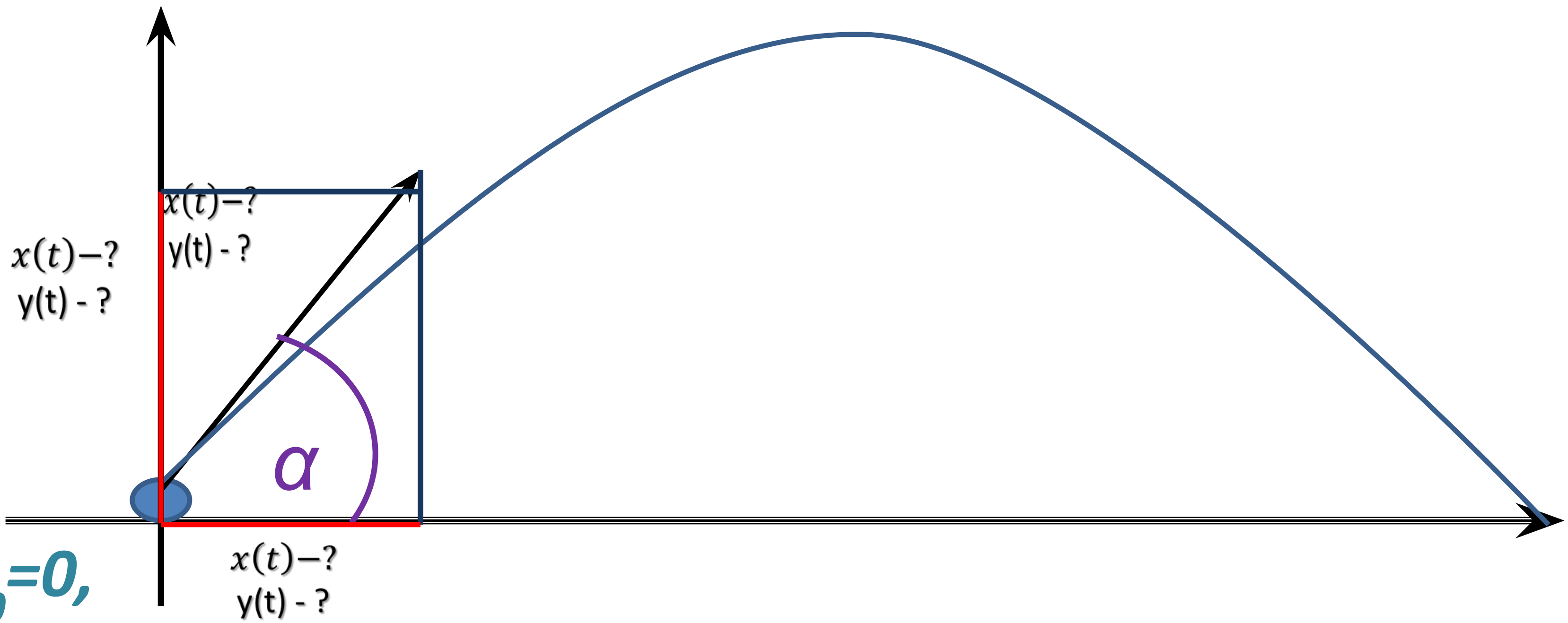
$x(t)$ — ?

$y(t)$ – ?

Почему для описания движения тела брошенного под углом к горизонту нужно два уравнения?

Решение задачи.

Надем проекции начальной скорости и ускорения на координатные оси.



$x_0=0,$
$y_0=0$

$x(t)$—?
y(t) - ?
$x(t)$—?
y(t) - ?

$x(t)$—?
y(t) - ?
$x(t)$—?
y(t) - ?

Решение задачи.

Подставим полученные значения в уравнения движения тела брошенного под углом к горизонту

$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$

$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$

$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$

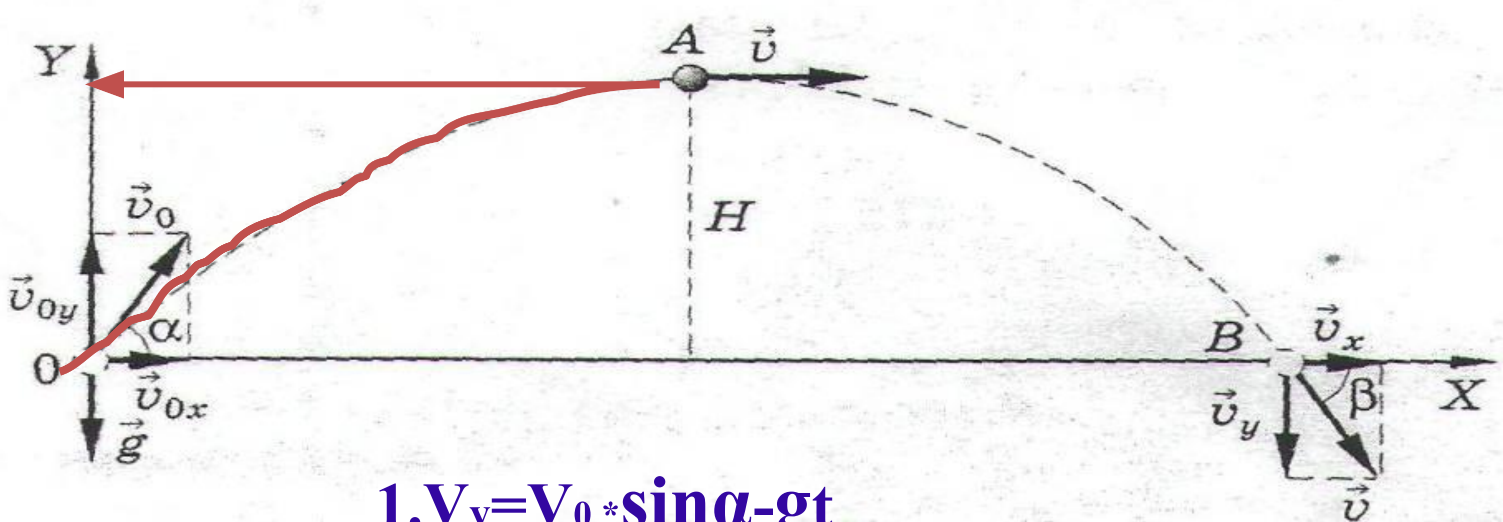
$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$

$x_0=0$,
$y_0=0$

$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$
$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$

$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$
$$x(t) — ?$$
$$y(t) - ?$$

Время подъёма $t_{под}$(до точки А).



1. $V_y=V_0*\sin\alpha-gt$

2. В точке А проекция скорости V_y на ось ОУ равна нулю при $t=t_{под}$: $V_y=0$ =>

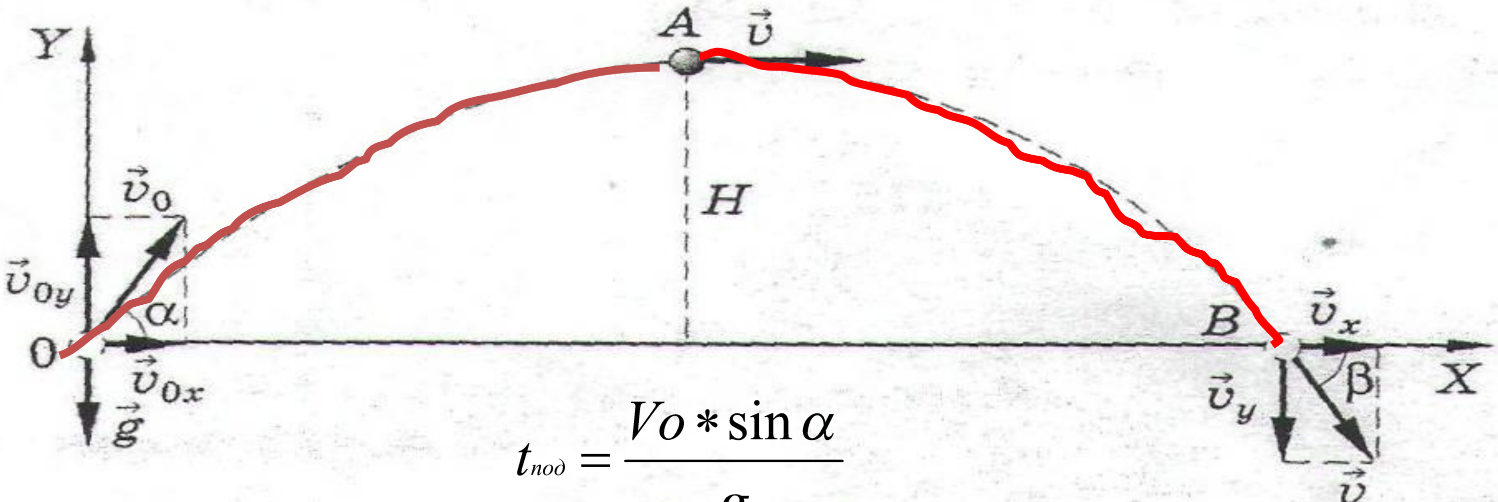
3. **$0=Vo*\sin\alpha-gt_{под}$** =>

4. **$gt_{под}=Vo*\sin\alpha$** =>

5. **$t_{под}=Vo*\sin\alpha/g$**

$$t_{под} = \frac{Vo*\sin\alpha}{g}$$

Время полета tпол(О-А-В).



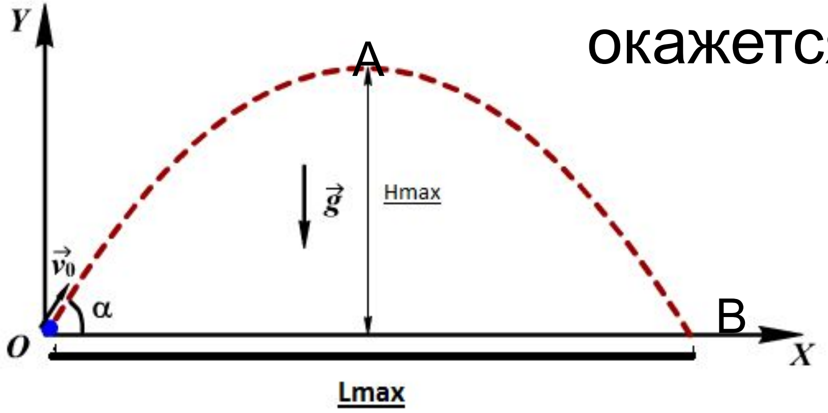
$$t_{под} = \frac{Vo * \sin\alpha}{g}$$

Очевидно, что время падения(А-В), равно времени подъёма (О-А),

значит время всего полёта **<u>tпол=2tпод</u>** =>

$$t_{полета} = \frac{2Vo * \sin\alpha}{g}$$

Рассчитаем максимальную дальность полёта Lmax, тело окажется в точке В



1. Уравнение координаты x имеет вид

$$x = x_o + V_o \cos(\alpha) t$$

2. В точке В при t=tпол координата x=Lmax т.е:

$$L\max = V_o \cos(\alpha) t_{полёта}$$

3. Формула времени полёта известна $t_{полёта} = \dfrac{2Vo * \sin\alpha}{g}$

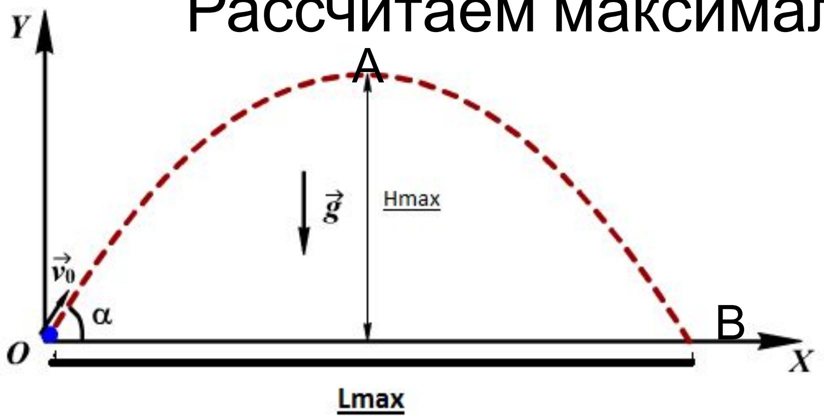
4. Подставим формулу (3) в формулу (2) $L\max = V_o \cos(\alpha) \dfrac{2Vo * \sin\alpha}{g}$

5.Преобразуем формулу (4): $L\max = \dfrac{VoVo * 2\cos(\alpha) * \sin(\alpha)}{g}$ =>

$$L\max = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$ =>

$$\boxed{L\max = \frac{V_0^2 \sin(2\alpha)}{g}}$$

Рассчитаем максимальную высоту подъёма Hmax



1. Уравнение координаты y имеет вид

$$y = y_o + V_o \sin(\alpha) t - \frac{gt^2}{2}$$

2. В точке А при t=tпод координата y=Hmax т.е:

$$H_{\max} = V_o \sin(\alpha) t_{под} - \frac{g t_{под}^2}{2}$$

3. Формула времени подъёма известна

$$t_{под} = \frac{Vo * \sin\alpha}{g}$$

4. Подставим формулу (3) в формулу (2)

$$H_{\max} = V_o \sin(\alpha) \frac{Vo * \sin\alpha}{g} - \frac{g\left(\frac{Vo * \sin\alpha}{g}\right)^2}{2}$$

5.Преобразуем формулу (4):

$$H_{\max} = \frac{V^2 o * \sin^2\alpha}{g} - \frac{g \frac{V^2 o * \sin^2\alpha}{g^2}}{2}$$ =>

$$H_{\max} = \frac{V^2 o * \sin^2\alpha}{g} - \frac{V^2 o * \sin^2\alpha}{2g}$$ =>

$$\boxed{H_{\max} = \frac{V^2 o * \sin^2\alpha}{2g}}$$

Задачи

Из окна дома с высоты 19,6 м горизонтально брошена монета со скоростью 5 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, через какой промежуток времени монета упадет на Землю На каком расстоянии по горизонтали от дома находится точка падения?

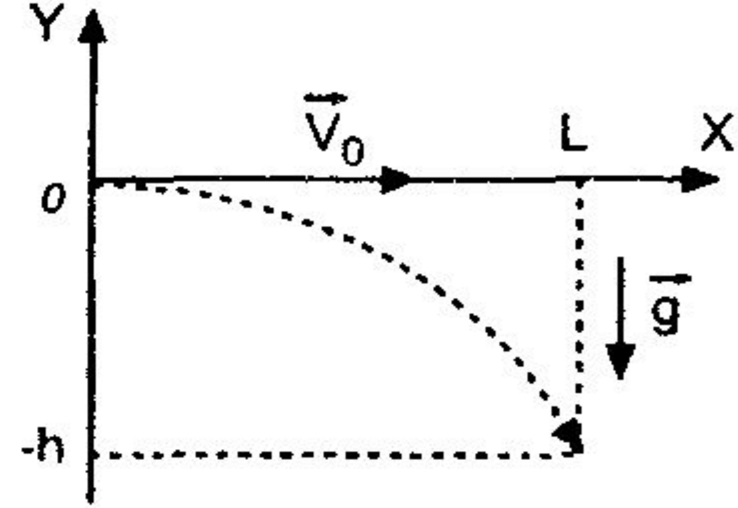
Дано:

$v_0 = 5$ м/с

$h = 19{,}6$ м

$t_п, l - ?$

Закон движения монеты по осям X и Y выглядит



так $x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{a_x t^2}{2}$,

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$,

$a_x = 0$, $a_y = -g$.

Уравнения движения $x = v_0 t$; $y = -\dfrac{gt^2}{2}$. Поскольку каждому моменту времени соответствует вполне конкретная точка на траектории, то в моменты падения монеты на Землю ($t = t_п$) ее координаты $x = l$; $y = -h$.

Из уравнений движения получим систему уравнений: $\begin{cases} l = v_0 t_п \\ -h = -\dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$.

Из второго уравнения определим время полета монеты $t_п = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 19,6}{9,8}} = 2$ с.

Подставив время $t_п$ в первое уравнение, найдем горизонтальную координату в момент падения:

$$l = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ м}.$$

$t_п = 2$ с; $l = 10$ м.

- 2. Используя условие задачи 1, найдите скорость падения монеты и угол, который образует вектор скорости с горизонтом в точке падения

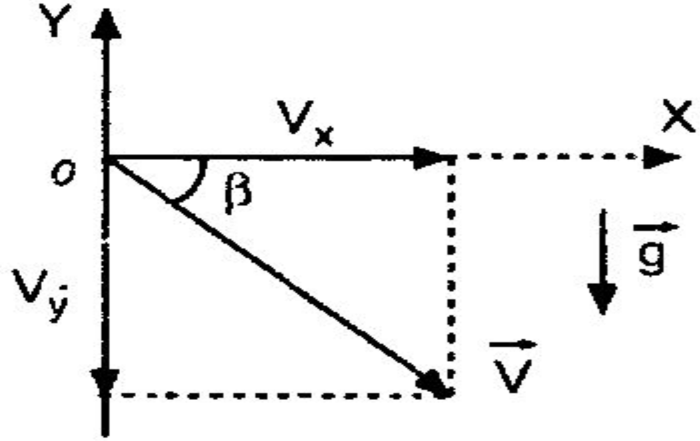
<u>Дано:</u>

$h = 19,6$ м

$v_0 = 5$ м/с

$v, \alpha - ?$

Уравнения для проекций скорости по координатным осям X и Y в общем виде $v_x = v_{0x} + a_x t$ и $v_y = v_{0y} + a_y t$.



В выбранной системе координат (аналогично предыдущей задаче): $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$, $a_x = 0$, $a_y = -g$. Тогда $v_x = v_0$ – движение в горизонтальном направлении равномерное, а $v_y = -gt$ – движение в вертикальном направлении равнопеременное. Вертикальная проекция скорости в момент падения монеты на Землю

$$v_y = -gt_п = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Модуль скорости в точке падения

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = \sqrt{v_0^{\,2} + (-\sqrt{2gh})^2} = \sqrt{v_0^{\,2} + 2gh} =$$

$$= \sqrt{5^2 + 2 \cdot 9{,}8 \cdot 19{,}8} \approx 20{,}3 \text{ м/с}.$$

Угол, который образует вектор скорости с горизонтом, найдем, воспользовавшись рисунком к задаче: $\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \frac{5}{20,3} \approx 0,25$.

$v \approx 20,3$ м/с; $\alpha \approx 76°$.

3. Длина скачка блохи на столе, прыгающей под углом 45° к горизонту, равна 20 см. Во сколько раз высота ее подъема над столом превышает ее собственную длину, составляющую 0,4 мм?

Дано:

$\alpha = 45°$

$x_{max} = 20$ см

$d = 0,4$ мм

$\frac{y_{max}}{d} - ?$

- рисунок.

Воспользуемся соотношением для максимальной высоты подъема y_{max} и дальности полета:

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \text{ и } x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Траектория движения показана на рис. 53 учебника. Из соотношения для x_{max}: $v_0^2 = \dfrac{gx_{max}}{\sin 2\alpha}$.

Подставим в соотношение для y_{max}:

$$y_{max} = \frac{gx_{max}\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha 2g} = \frac{x_{max}\sin^2\alpha}{2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{x_{max}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4}.$$

Теперь найдем отношение y_{max} к длине d:

$$n = \frac{y_{max}}{d} = \frac{x_{max}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4d} = \frac{20\cdot \mathrm{tg}\,45^\circ}{4\cdot 0{,}04} = 125.$$

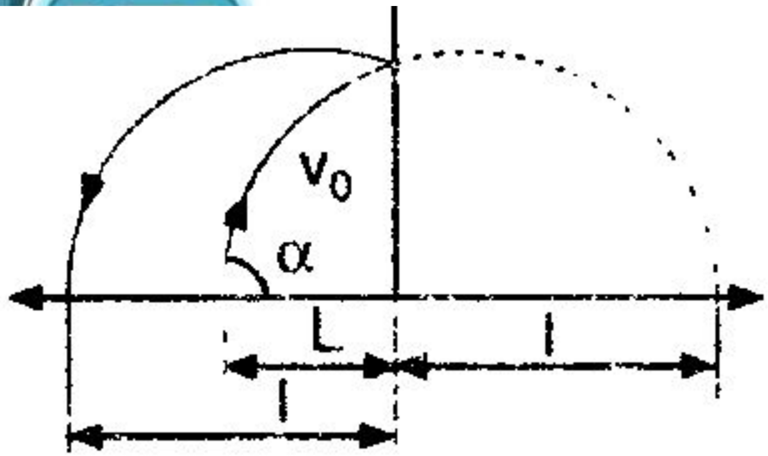
Мяч, брошенный под углом 45° к горизонту, упруго отскочив от вертикальной стены, расположенной на расстоянии L от точки бросания, ударяется о Землю на расстоянии l от стены С какой начальной скоростью был брошен мяч?

<u>Дано:</u>

$\alpha = 45°$

L, l

$v_0 - ?$



$$[v_0 = \sqrt{g(L + l)}]$$

- при абсолютно упругом ударе мяча о стенку модуль его скорости не изменяется, а угол падения равен углу отражения.
  реальная траектория мяча является зеркальным отражением той траектории, по которой мяч летел бы в отсутствии стенки.
  тогда из рисунка видно, что дальность полета мяча

$x_{max} = L + l$. В то же время, дальность полета мяча, брошенного под углом горизонту в отсутствии стенки, равна $x_{max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Получаем уравнение $L + l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, откуда начальная скорость мяча $v_0 = \sqrt{\frac{g(L+l)}{\sin 2\alpha}}$.

Так как $\sin 90° = 1$, то $v_0 = \sqrt{g(L+l)}$.

$$v_0 = \sqrt{g(L+l)}.$$

Домашнее задание

§ 16, Упр.4 (2, 3),

(Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев, Н.Н. Сотский Физика).

Спасибо за работу!

Использованные материалы:

- http://davay5.com/z.php?book=myakishev-buhovcev_10_klass
- http://davay5.com/z.php?book=kasyanov_10_klass
- http://davay5.com/z.php?book=rymkevich_10_klass