

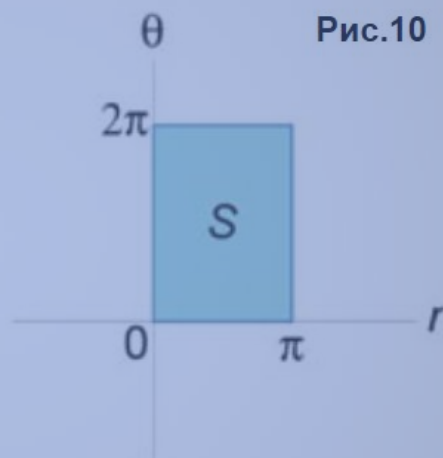
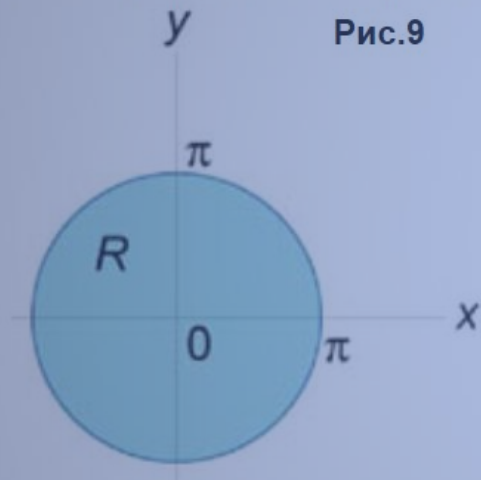
### Пример 5

Вычислить двойной интеграл  $\iint_R \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  посредством преобразования в полярные координаты.

Область интегрирования  $R$  представляет собой круг  $x^2 + y^2 \leq \pi^2$ .

*Решение.*

Область интегрирования  $R$  представлена на рисунке 9.



Образ  $S$  данной области описывается множеством  $\{S = (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  и показан на рисунке 10. Запишем исходный двойной интеграл в полярных координатах.

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_R \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_S \sin \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} r dr d\theta = \iint_S r \sin r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} r \sin r dr \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} r \sin r dr.
 \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пусть  $u = r$ ,  $dv = \sin r dr$ . Тогда  $du = dr$ ,  $v = \int \sin r dr = -\cos r$ . Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I &= 2\pi \int_0^{\pi} r \sin r dr = 2\pi \left[ (-r \cos r)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos r) dr \right] = 2\pi \left[ (-r \cos r)|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos r dr \right] \\
 &= 2\pi \left[ (-r \cos r)|_0^{\pi} + (\sin r)|_0^{\pi} \right] = 2\pi (\sin r - r \cos r)|_0^{\pi} = 2\pi [(\sin \pi - \pi \cos \pi) - (\sin 0 - 0 \cdot \cos 0)] \\
 &= 2\pi \cdot \pi = 2\pi^2.
 \end{aligned}$$

## Геометрические приложения двойных интегралов

### Площадь плоской фигуры

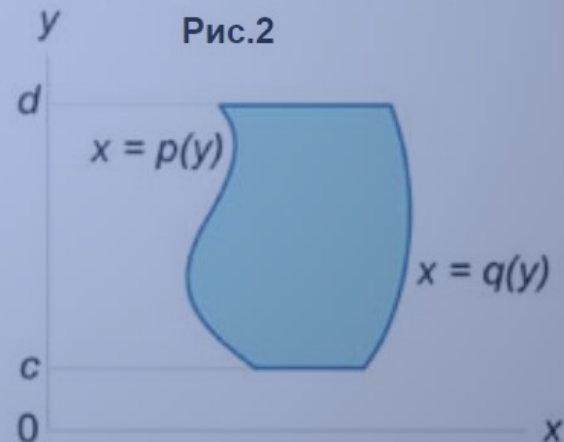
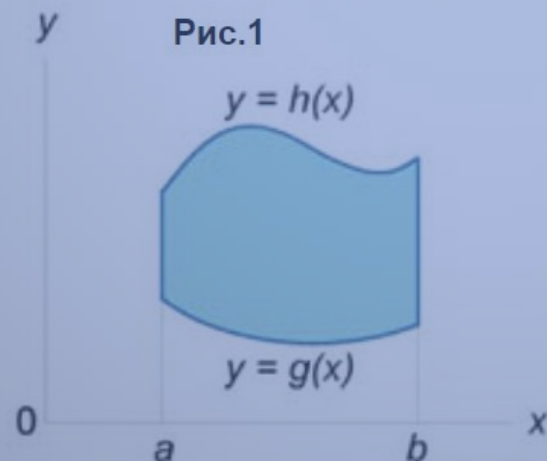
Если  $f(x, y) = 1$  в интеграле  $\iint_R f(x, y) dx dy$ , то двойной интеграл равен площади области интегрирования  $R$ .

Площадь области типа  $I$  (элементарной относительно оси  $Oy$ ) (рисунок 1) выражается через повторный интеграл в виде

$$A = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy dx.$$

Аналогично, площадь области типа  $II$  (элементарной относительно оси  $Ox$ ) (рисунок 2) описывается формулой

$$A = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} dx dy.$$



### Объем тела

Если  $f(x, y) > 0$  в области интегрирования  $R$ , то объем цилиндрического тела с основанием  $R$ , ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ , выражается формулой

$$V = \iint_R f(x, y) dA.$$

В случае, когда  $R$  является областью типа  $I$ , ограниченной линиями  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = h(x)$ , объем тела равен

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Для области  $R$  типа  $II$ , ограниченной графиками функций  $y = c$ ,  $y = d$ ,  $x = p(y)$ ,  $x = q(y)$ , объем соответственно равен

$$V = \iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx dy.$$

Если в области  $R$  выполняется неравенство  $f(x, y) \geq g(x, y)$ , то объем цилиндрического тела между поверхностями  $z_1 = g(x, y)$  и  $z_2 = f(x, y)$  с основанием  $R$  равен

$$V = \iint_R [f(x, y) - g(x, y)] dA.$$

### *Площадь поверхности*

Предположим, что поверхность задана функцией  $z = g(x, y)$ , имеющей область определения  $R$ . Тогда площадь такой поверхности над областью  $R$  определяется формулой

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

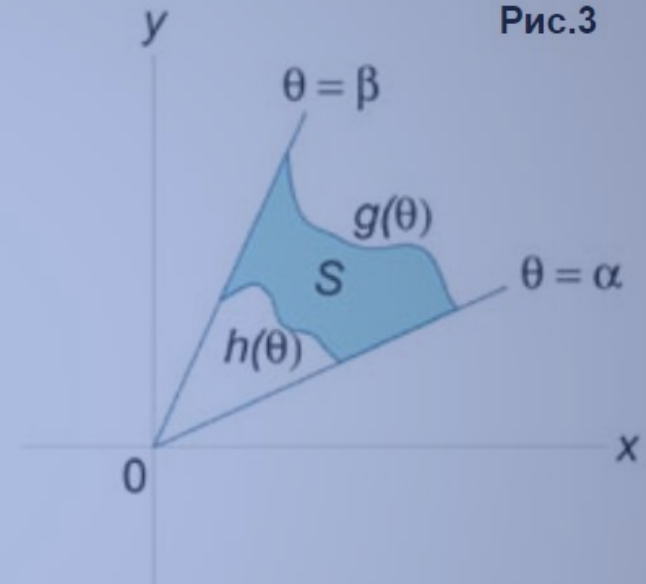
при условии, что частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  непрерывны всюду в области  $R$ .

### Площадь и объем в полярных координатах

Пусть  $S$  является областью, ограниченной линиями  $\theta = \alpha$ ,  $\theta = \beta$ ,  $r = h(\theta)$ ,  $r = g(\theta)$  (рисунок 3).

Тогда площадь этой области определяется формулой

$$A = \iint_R dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h(\theta)}^{g(\theta)} r dr d\theta.$$



Объем тела, ограниченного сверху поверхностью  $z = f(r, \theta)$  с основанием  $S$ , выражается в полярных координатах в виде

$$V = \iint_S f(r, \theta) r dr d\theta.$$

### Пример 1

Найти площадь области  $R$ , ограниченной гиперболами  $y = \frac{a^2}{x}$ ,  $y = \frac{2a^2}{x}$  ( $a > 0$ ) и вертикальными прямыми  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

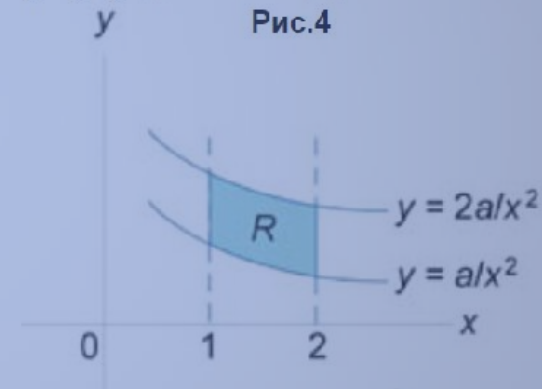
*Решение.*

Область  $R$  схематически показана на рисунке 4. Используя формулу для площади области  $I$  типа

$$A = \iint_R dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy dx,$$

получаем

$$\begin{aligned} A &= \iint_R dx dy = \int_1^2 \left[ \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} dy \right] dx = \int_1^2 \left[ y \Big|_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} \right] dx = \int_1^2 \left( \frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x} \right) dx = a^2 \int_1^2 \frac{dx}{x} \\ &= a^2 (\ln 2 - \ln 1) = a^2 \ln 2. \end{aligned}$$



## Пример 2

Вычислить площадь области  $R$ , ограниченной линиями  $y^2 = a^2 - ax$ ,  $y = a + x$ .

*Решение.*

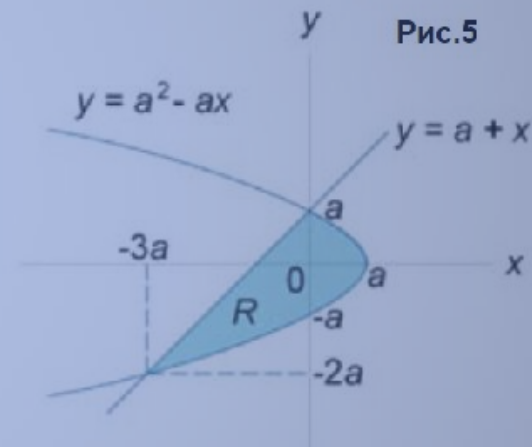
Сначала определим точки пересечения двух заданных линий.

$$\begin{cases} y^2 = a^2 - ax \\ y = a + x \end{cases}, \Rightarrow (a + x)^2 = a^2 - ax, \Rightarrow a^2 + 2ax + x^2 = a^2 - ax, \Rightarrow x^2 + 3ax = 0, \\ \Rightarrow x(x + 3a) = 0, \Rightarrow x_{1,2} = 0; -3a.$$

Следовательно, координаты точек пересечения равны

$$x_1 = 0, \quad y_1 = a + 0 = a,$$

$$x_2 = -3a, \quad y_2 = a - 3a = -2a.$$



Область  $R$  представлена на рисунке 5. Будем рассматривать ее как область типа  $II$ .

Для вычисления площади преобразуем уравнения границ:

$$y^2 = a^2 - ax, \Rightarrow ax = a^2 - y^2, \Rightarrow x = a - \frac{y^2}{a},$$

$$y = a + x, \Rightarrow x = y - a.$$



Получаем

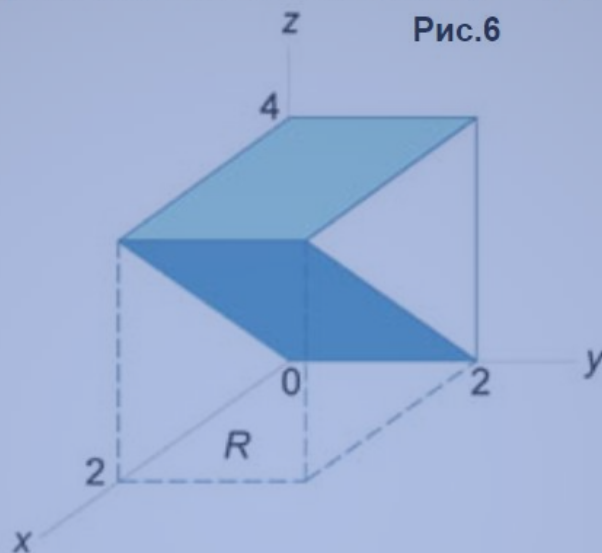
$$\begin{aligned} A &= \iint_R dx dy = \int_{-2a}^a \left[ \int_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} dx \right] dy = \int_{-2a}^a \left[ \int_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} dx \right] dy = \int_{-2a}^a \left[ x \Big|_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} \right] dy \\ &= \int_{-2a}^a \left[ a - \frac{y^2}{a} - (y - a) \right] dy = \int_{-2a}^a \left( 2a - \frac{y^2}{a} - y \right) dy = \left( 2ay - \frac{y^3}{3a} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{-2a}^a \\ &= \left( 2a^2 - \frac{a^3}{3a} - \frac{a^2}{2} \right) - \left( -4a^2 + \frac{8a^3}{3a} - \frac{4a^2}{2} \right) = \frac{9a^2}{2}. \end{aligned}$$

### Пример 3

Найти объем тела в первом октанте, ограниченного плоскостями  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $z = x$ ,  $z + x = 4$ .

*Решение.*

Данное тело показано на рисунке 6.



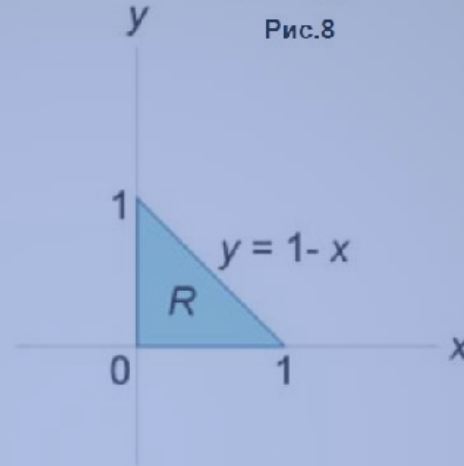
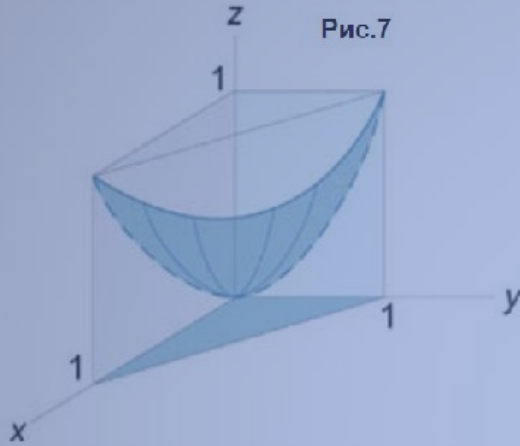
Из рисунка видно, что основание  $R$  является квадратом. Для заданных  $x, y$  значение  $z$  изменяется от  $z = x$  до  $z = 4 - x$ . Тогда объем равен

$$\begin{aligned} V &= \iint_R [(4 - x) - x] dx dy = \int_0^2 \left[ \int_0^2 (4 - 2x) dy \right] dx = \int_0^2 \left[ (4y - 2xy) \Big|_{y=0}^2 \right] dx = \int_0^2 (8 - 4x) dx \\ &= (8x - 2x^2) \Big|_0^2 = 16 - 8 = 8. \end{aligned}$$

#### Пример 4

Описать тело, объем которого определяется интегралом  $V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy$ .

Решение.



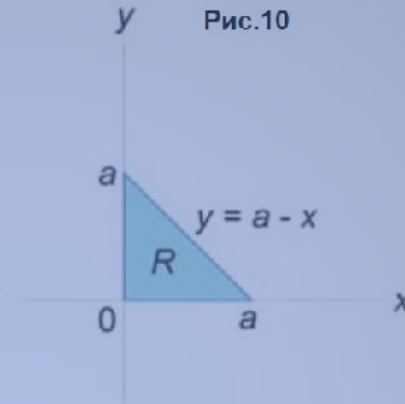
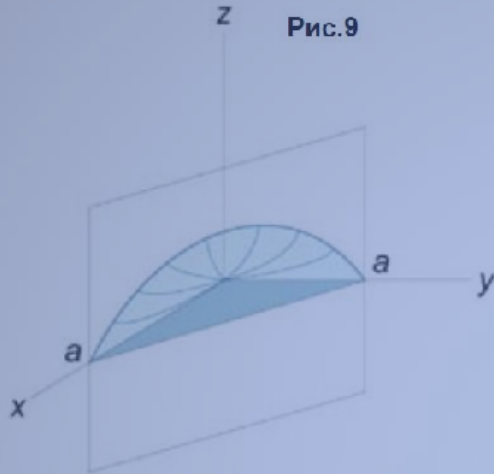
Данное тело (рис.7, 8) расположено над треугольной областью  $R$ , ограниченной координатными осями  $Ox$ ,  $Oy$  и прямой  $y = 1 - x$  ниже параболической поверхности  $z = x^2 + y^2$ . Объем тела равен

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy = \int_0^1 \left[ \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{1-x} \right] dx = \int_0^1 \left[ x^2 (1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 - x^3 + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left( 2x^2 - \frac{4x^3}{3} - x + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left( \frac{2x^3}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### Пример 5

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $z = xy$ ,  $x + y = a$ ,  $z = 0$ .

Решение.



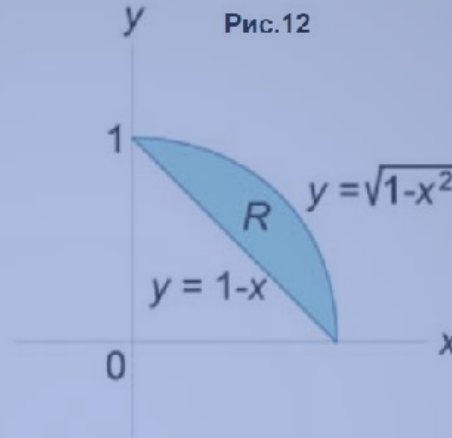
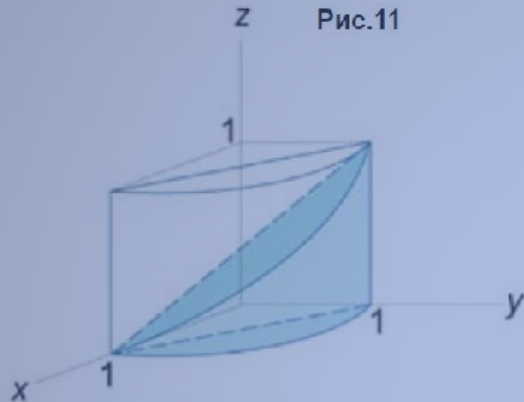
Данное тело лежит над треугольником  $R$  в плоскости  $Oxy$  (рисунки 9, 10) ниже поверхности  $z = xy$ . Объем тела равен

$$\begin{aligned} V &= \iint_R xy \, dx \, dy = \int_0^a \left[ \int_0^{a-x} xy \, dy \right] dx = \int_0^a \left[ \left. \frac{xy^2}{2} \right|_{y=0}^{a-x} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^a x(a-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a x(a^2 - 2ax + x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^a (a^2x - 2ax^2 + x^3) dx = \frac{1}{2} \left( a^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2a \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{2} - \frac{2a^3}{3} + \frac{a^4}{4} \right) = \frac{a^4}{24}. \end{aligned}$$

### Пример 6

Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $z = 0$ ,  $x + y = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1 - x$ .

Решение.



Как видно из рисунков 11 и 12, в области интегрирования  $R$  при  $0 \leq x \leq 1$  значения  $y$  изменяются от  $1 - x$  до  $\sqrt{1 - x^2}$ . Сверху тело ограничено плоскостью  $z = 1 - x$ . Следовательно, объем данного тела равен

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (1 - x) \, dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x) \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[ (1 - x) y \Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= \int_0^1 (1 - x) \left( \sqrt{1 - x^2} - 1 + x \right) dx = \int_0^1 \left( \sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} - 1 + 2x - x^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx - \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx - \int_0^1 (1 + 2x - x^2) dx. \end{aligned}$$

$$V = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 (1+2x-x^2) dx.$$

Вычислим полученные три интеграла отдельно.

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Сделаем замену:  $x = \sin t$ . Тогда  $dx = \cos t dt$ . Видно, что  $t = 0$  при  $x = 0$  и  $t = \frac{\pi}{2}$  при  $x = 1$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(Сравните с площадью сектора единичного круга в первом квадранте).

Вычислим второй интеграл  $I_2 = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$ , используя замену переменной. Полагаем  $1-x^2 = w$ . Тогда  $-2xdx = dw$  или  $xdx = \frac{-dw}{2}$ . Находим, что  $w = 1$  при  $x = 0$  и, наоборот,  $w = 0$  при  $x = 1$ . Интеграл равен

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \int_1^0 \sqrt{w} \left( -\frac{dw}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int_1^0 \sqrt{w}dw = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{w}dw = \frac{1}{2} \int_0^1 w^{\frac{1}{2}}dw \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2w^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Наконец, вычислим третий интеграл.

$$I_3 = \int_0^1 (1-2x+x^2) dx = \left( x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, объем тела равен

$$V = I_1 - I_2 - I_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \approx 0,12.$$

### Пример 7

Найти площадь лепестка розы, заданной уравнением  $r = \cos 2\theta$ .

*Решение.*

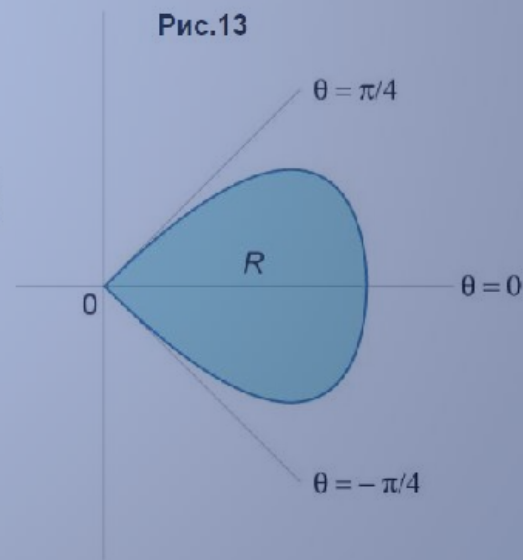
Рассмотрим лепесток в секторе  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  (рисунок 13). Область интегрирования имеет вид

$R = \left\{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \cos 2\theta, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$ . Следовательно, площадь данной фигуры в полярных координатах равна

$$A = \iint_R r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[ \int_0^{\cos 2\theta} r dr \right] d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[ \left( \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{\cos 2\theta} \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left( \theta + \frac{\sin 4\theta}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} \right) - \left( -\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi)}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{8}.$$





### Пример 8

Вычислить объем единичного шара.

*Решение.*

Уравнение сферы радиусом 1 имеет вид  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (рисунок 14). В силу симметрии, ограничимся нахождением объема верхнего полушара и затем результат умножим на 2. Уравнение верхней полусферы записывается как

$$z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

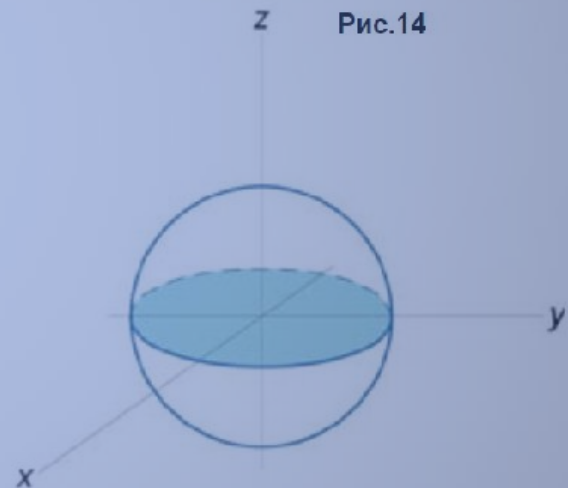
Преобразуя это уравнение в полярные координаты, получаем

$$z(r, \theta) = \sqrt{1 - r^2}.$$

В полярных координатах область интегрирования

$R$  описывается множеством

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$



В полярных координатах область интегрирования  $R$  описывается множеством  $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Следовательно, объем верхнего полушара выражается формулой

$$V_{\frac{1}{2}} = \iiint_R \sqrt{1-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr.$$

Сделаем замену переменной для оценки последнего интеграла. Пусть  $1 - r^2 = t$ . Тогда  $-2r dr = dt$  или  $r dr = -\frac{dt}{2}$ . Уточним пределы интегрирования:  $t = 1$  при  $r = 0$  и, наоборот,  $t = 0$  при  $r = 1$ . Получаем

$$V_{\frac{1}{2}} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = 2\pi \int_1^0 \sqrt{t} \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\pi \int_1^0 \sqrt{t} dt = \pi \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt = \pi \left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

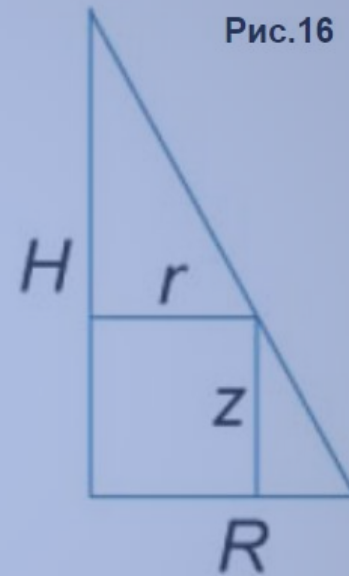
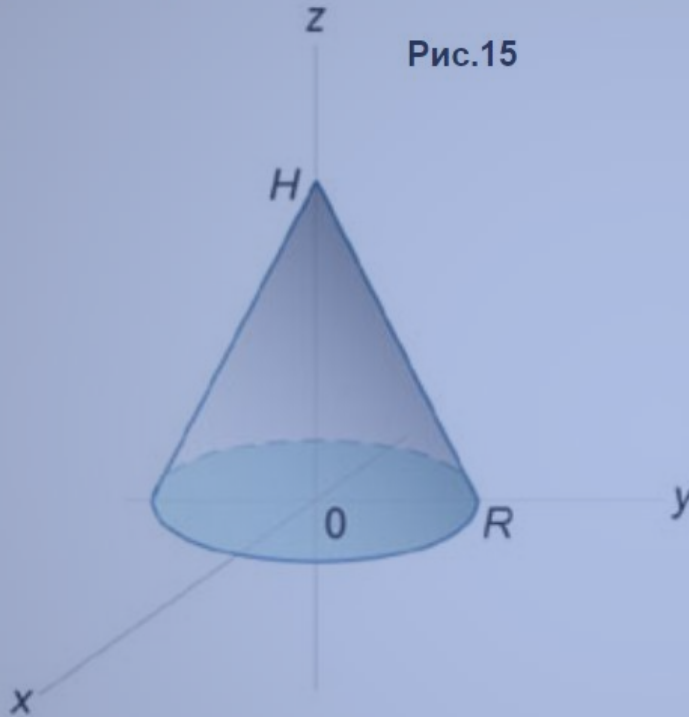
Таким образом, объем единичного шара равен

$$V = 2V_{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3}.$$

### Пример 9

Используя полярные координаты, найти объем конуса высотой  $H$  и радиусом основания  $R$  (рисунок 15).

Решение.



Сначала получим уравнение поверхности конуса. Используя подобные треугольники (рисунок 16), можно записать

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H}, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$H - z = \frac{Hr}{R} \quad \text{или} \quad z(x, y) = H - \frac{Hr}{R} = \frac{H}{R}(R - r) = \frac{H}{R} \left( R - \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Тогда объем конуса равен

$$\begin{aligned} V &= \iint_R z(x, y) \, dx dy = \iint_R \frac{H}{R} \left( R - \sqrt{x^2 + y^2} \right) \, dx dy = \frac{H}{R} \iint_R (R - r) \, r dr d\theta \\ &= \frac{H}{R} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R (R - r) \, r dr \right] d\theta = \frac{H}{R} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (Rr - r^2) \, dr = \frac{2\pi H}{R} \int_0^R (Rr - r^2) \, dr \\ &= \frac{2\pi H}{R} \left( \frac{Rr^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_{r=0}^R = \frac{2\pi H}{R} \left( \frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2\pi H}{R} \cdot \frac{R^3}{6} = \frac{\pi R^2 H}{3}. \end{aligned}$$

### Пример 10

Вычислить площадь сферы радиуса  $a$ .

*Решение.*

Рассмотрим верхнюю полусферу. Ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{или} \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Очевидно, область интегрирования  $R$  представляет собой круг с таким же радиусом  $a$ , расположенный в центре координат. Площадь полусферы вычисляется по формуле

$$S_{\frac{1}{2}} = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Найдем частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}.$$

Подставляя найденные производные, получаем

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{2}} &= \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_R \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} dx dy = \iint_R \sqrt{\frac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2}} dx dy \\ &= \iint_R \frac{a}{z} dx dy. \end{aligned}$$

Преобразуем двойной интеграл в полярные координаты.

$$\begin{aligned} S_{\frac{1}{2}} &= \iint_R \frac{a}{z} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -2\pi a \int_0^a \frac{d(a^2 - r^2)}{2\sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= -2\pi a \left( \sqrt{a^2 - r^2} \right) \Big|_{r=0}^a = -2\pi a (0 - a) = 2\pi a^2. \end{aligned}$$

Площадь поверхности полной сферы, соответственно, равна

$$S = 2S_{\frac{1}{2}} = 4\pi a^2.$$

## Физические приложения двойных интегралов

### *Масса и статические моменты пластины*

Предположим, что плоская пластина изготовлена из неоднородного материала и занимает область  $R$  в плоскости  $Oxy$ . Пусть плотность пластины в точке  $(x, y)$  в области  $R$  равна  $\rho(x, y)$ . Тогда *масса пластины* выражается через двойной интеграл в виде

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA.$$

*Статический момент пластины относительно оси  $Ox$*  определяется формулой

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y) dA.$$

Аналогично находится *статический момент пластины относительно оси  $Oy$* :

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y) dA.$$

Координаты *центра масс пластины*, занимающей область  $R$  в плоскости  $Oxy$  с плотностью, распределенной по закону  $\rho(x, y)$ , описываются формулами

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_R x \rho(x, y) dA = \frac{\iint_R x \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_R y \rho(x, y) dA = \frac{\iint_R y \rho(x, y) dA}{\iint_R \rho(x, y) dA}.$$

Для однородной пластины с плотностью  $\rho(x, y) = 1$  для всех  $(x, y)$  в области  $R$  центр масс определяется только формой области и называется *центроидом*.



## Моменты инерции пластины

Момент инерции пластины относительно оси  $Ox$  выражается формулой

$$I_x = \iint_R y^2 \rho(x, y) dA.$$

Аналогично вычисляется момент инерции пластины относительно оси  $Oy$ :

$$I_y = \iint_R x^2 \rho(x, y) dA.$$

Полярный момент инерции пластины равен

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA.$$

### **Заряд пластины**

Предположим, что электрический заряд распределен по области  $R$  в плоскости  $Oxy$  и его плотность распределения задана функцией  $\sigma(x, y)$ . Тогда полный *заряд пластины*  $Q$  определяется выражением

$$Q = \iint_R \sigma(x, y) dA.$$

### **Среднее значение функции**

Приведем также формулу для расчета среднего значения некоторой распределенной величины. Пусть  $f(x, y)$  является непрерывной функцией в замкнутой области  $R$  в плоскости  $Oxy$ . Среднее значение  $\mu$  функции  $f(x, y)$  в области  $R$  определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{S} \iint_R f(x, y) dA,$$

где  $S = \iint_R dA$  – площадь области интегрирования  $R$ .

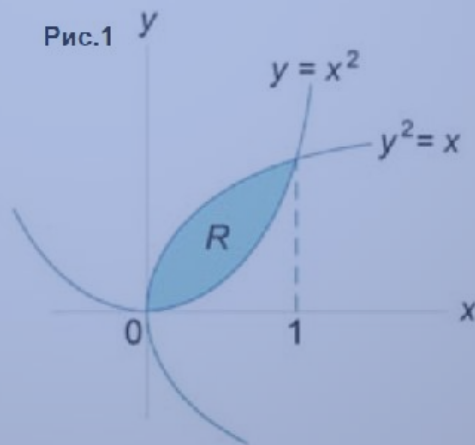
### Пример 1

Определить координаты центра тяжести однородной пластины, образованной параболой  $y^2 = x$  и  $y = x^2$ .

*Решение.*

Заданная пластина имеет форму, показанную на рисунке 1. Поскольку пластина однородна, то можно положить  $\rho(x, y) = 1$ . Тогда масса пластины равна

$$\begin{aligned} m &= \iint_R dA = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right] dx = \int_0^1 \left[ y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 \left( x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx \\ &= \left( \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



Найдем теперь статические моменты относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ .

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_R y dA = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_R x dA = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right] x dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) x dx = \int_0^1 \left( x^{\frac{3}{2}} - x^3 \right) dx = \left( \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

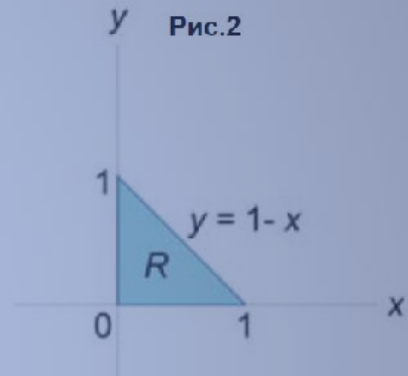
Вычисляем координаты центра масс.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$

## Пример 2

Вычислить моменты инерции треугольника, ограниченного прямыми  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  (рисунок 2) и имеющего плотность  $\rho(x, y) = xy$ .

Решение.



Найдем момент инерции пластины относительно оси  $Ox$  :

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_R y^2 \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} y^2 xy dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} y^3 dy \right] x dx = \int_0^1 \left[ \left( \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{1-x} \right] x dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-x)^4 x dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4) x dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5) dx \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{6x^4}{4} - \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{49}{120}. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим момент инерции относительно оси  $Oy$  :

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_R x^2 \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} x^2 x y dy \right] dx = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} y dy \right] x^3 dx = \int_0^1 \left[ \left( \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} \right] x^3 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) x^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - 2x^4 + x^5) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

### Пример 3

Электрический заряд распределен по площади диска  $x^2 + y^2 = 1$  таким образом, что его поверхностная плотность равна  $\sigma(x, y) = 1 + x^2 + y^2$  (Кл/м<sup>2</sup>). Вычислить полный заряд диска.

*Решение.*

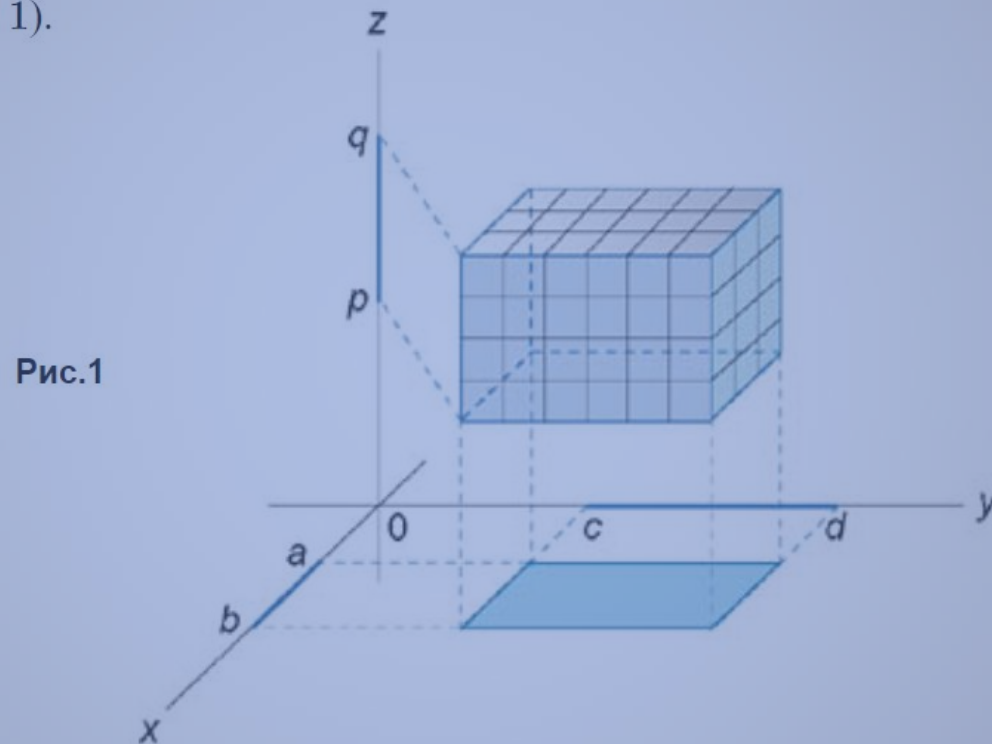
В полярных координатах область, занятая диском, описывается множеством  $\{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Полный заряд будет равен

$$\begin{aligned} Q &= \iint_R \sigma(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 (1 + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 + r^2) r dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (r + r^3) dr = 2\pi \left( \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{2} \text{ (Кл)}. \end{aligned}$$

## Определение и свойства тройных интегралов

### Определение тройного интеграла

Формально определение тройного интеграла можно ввести аналогично двойному интегралу как предел суммы Римана. Начнем с простейшего случая, когда область интегрирования  $U$  имеет вид параллелепипеда  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  (рисунок 1).





Пусть множество чисел  $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  разбивает отрезок  $[a, b]$  на малые интервалы, так что справедливо соотношение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Аналогично построим разбиение отрезка  $[c, d]$  вдоль оси  $Oy$  и  $[p, q]$  вдоль оси  $Oz$  :

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$p = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_k < \dots < z_{\ell-1} < z_{\ell} = q.$$

Сумма Римана функции  $f(x, y, z)$  над разбиением  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Здесь  $(u_i, v_j, w_k)$  – некоторая точка в параллелепипеде  $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k)$ , а приращения равны

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Тройной интеграл от функции  $f(x, y, z)$  в параллелепипеде  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$  определяется как предел суммы Римана, при котором максимальное значение приращений  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  и  $\Delta z_k$  стремятся к нулю:

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [p,q]} f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} f(u_i, v_j, w_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Чтобы определить тройной интеграл в произвольной области  $U$ , выберем параллелепипед  $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ , включающий заданную область  $U$ . Введем функцию  $g(x, y, z)$ , такую, что

$$\begin{cases} g(x, y, z) = f(x, y, z), & \text{если } f(x, y, z) \in U \\ g(x, y, z) = 0, & \text{если } f(x, y, z) \notin U \end{cases}.$$

Тогда тройной интеграл от функции  $f(x, y, z)$  в произвольной области  $U$  определяется в виде:

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [p,q]} g(x, y, z) dV.$$

### Основные свойства тройного интеграла

Пусть функции  $f(x, y, z)$  и  $g(x, y, z)$  интегрируемы в области  $U$ .

Тогда справедливы следующие свойства:

$$1. \iiint_U [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dV = \iiint_U f(x, y, z) dV + \iiint_U g(x, y, z) dV;$$

$$2. \iiint_U [f(x, y, z) - g(x, y, z)] dV = \iiint_U f(x, y, z) dV - \iiint_U g(x, y, z) dV;$$

$$3. \iiint_U kf(x, y, z) dV = k \iiint_U f(x, y, z) dV, \text{ где } k - \text{ константа};$$

$$4. \text{ Если } f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \text{ в любой точке области } U, \text{ то } \iiint_U f(x, y, z) dV \leq \iiint_U g(x, y, z) dV;$$

5. Если область  $U$  является объединением двух непересекающихся областей  $U_1$  и  $U_2$ , то

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_{U_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{U_2} f(x, y, z) dV;$$

6. Пусть  $m$  - наименьшее и  $M$  - наибольшее значение непрерывной функции  $f(x, y, z)$  в области  $U$ . Тогда для тройного интеграла справедлива оценка:

$$m \cdot V \leq \iiint_U f(x, y, z) dV \leq M \cdot V,$$

где  $V$  - объем области интегрирования  $U$ .

7. *Теорема о среднем значении тройного интеграла.*

Если функция  $f(x, y, z)$  непрерывна в области  $U$ , то существует точка  $M_0 \in U$ , такая, что

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = f(M_0) \cdot V,$$

где  $V$  - объем области  $U$ .