Пример 5

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_R \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ посредством преобразования в полярные координаты. Область интегрирования R представляет собой круг $x^2+y^2 \le \pi^2$.

Решение.

Область интегрирования R представлена на рисунке 9.

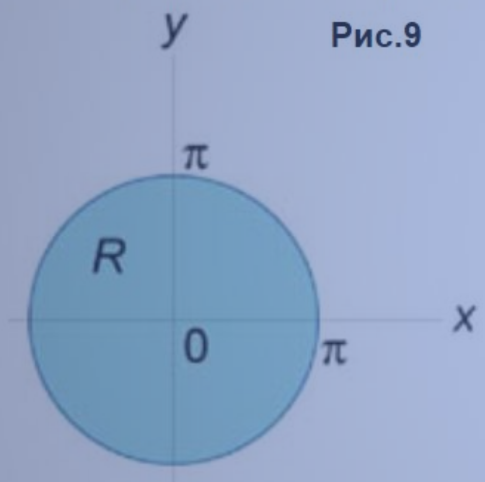


Рис.9

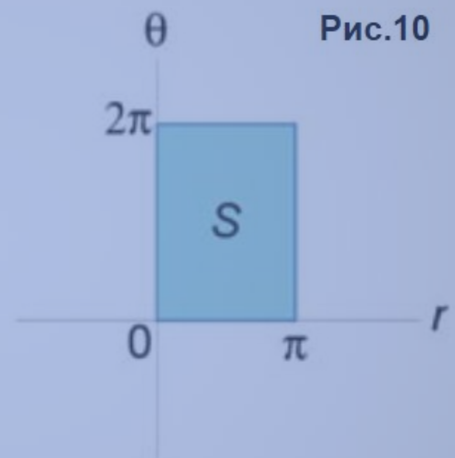


Рис.10

Образ S данной области описывается множеством $\{S=(r,\theta)\mid 0\le r\le\pi, 0\le\theta\le 2\pi\}$ и показан на рисунке 10. Запишем исходный двойной интеграл в полярных координатах.

$$I=\iint\limits_{R}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{S}\sin\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}rdrd\theta=\iint\limits_{S}r\sin rdrd\theta=\int\limits_{0}^{2\pi}d\theta\int\limits_{0}^{\pi}r\sin rdr$$

$$=2\pi\int\limits_{0}^{\pi}r\sin rdr.$$

Вычислим последний интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\int\limits_{a}^{b}udv=\left.(uv)\right|_{a}^{b}-\int\limits_{a}^{b}vdu.$$

Пусть $u=r$, $dv=\sin rdr$. Тогда $du=dr$, $v=\int\sin rdr=-\cos r$. Следовательно,

$$I=2\pi\int\limits_{0}^{\pi}r\sin rdr=2\pi\left[\left.(-r\cos r)\right|_{0}^{\pi}-\int\limits_{0}^{\pi}(-\cos r)\,dr\right]=2\pi\left[\left.(-r\cos r)\right|_{0}^{\pi}+\int\limits_{0}^{\pi}\cos rdr\right]$$

$$=2\pi\left[\left.(-r\cos r)\right|_{0}^{\pi}+\left.(\sin r)\right|_{0}^{\pi}\right]=2\pi\left.(\sin r-r\cos r)\right|_{0}^{\pi}=2\pi\left[(\sin\pi-\pi\cos\pi)-(\sin 0-0\cdot\cos 0)\right]$$

$$=2\pi\cdot\pi=2\pi^2.$$

Геометрические приложения двойных интегралов

Площадь плоской фигуры

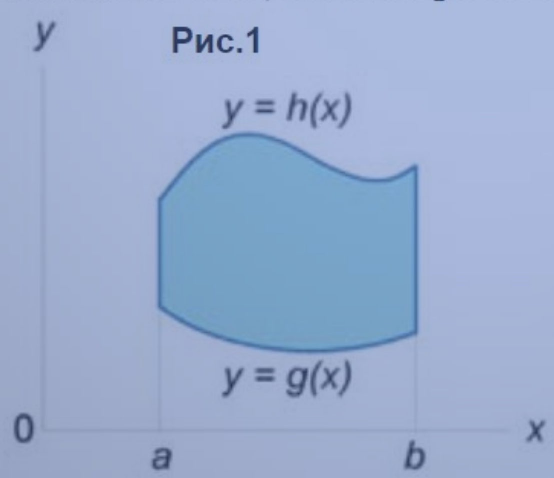
Если $f(x,y)=1$ в интеграле $\iint\limits_R f(x,y)\,dxdy$, то двойной интеграл равен площади области интегрирования R.

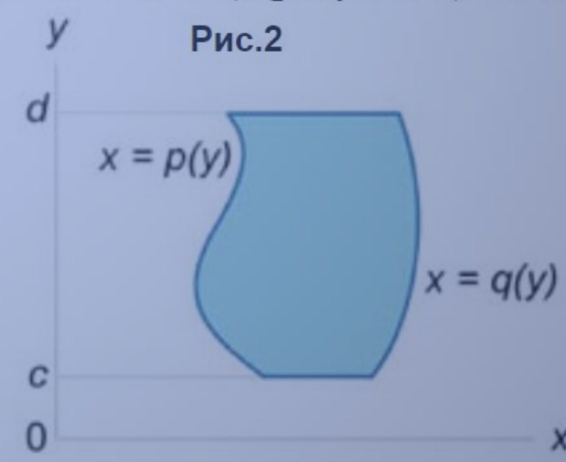
Площадь области типа I (элементарной относительно оси Oy) (рисунок 1) выражается через повторный интеграл в виде

$$A=\int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} dydx.$$

Аналогично, площадь области типа II (элементарной относительно оси Ox) (рисунок 2) описывается формулой

$$A=\int\limits_c^d \int\limits_{p(y)}^{q(y)} dxdy.$$





Объем тела

Если $f(x,y) > 0$ в области интегрирования R, то объем цилиндрического тела с основанием R, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, выражается формулой

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\,dA.$$

В случае, когда R является областью типа I, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = g(x)$, $y = h(x)$, объем тела равен

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dydx.$$

Для области R типа II, ограниченной графиками функций $y = c$, $y = d$, $x = p(y)$, $x = q(y)$, объем соответственно равен

$$V = \iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int\limits_c^d \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dxdy.$$

Если в области R выполняется неравенство $f(x,y) \geq g(x,y)$, то объем цилиндрического тела между поверхностями $z_1 = g(x,y)$ и $z_2 = f(x,y)$ с основанием R равен

$$V = \iint\limits_R [f(x,y) - g(x,y)]\,dA.$$

Площадь поверхности

Предположим, что поверхность задана функцией $z = g(x, y)$, имеющей область определения R. Тогда площадь такой поверхности над областью R определяется формулой

$$S = \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

при условии, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны всюду в области R.

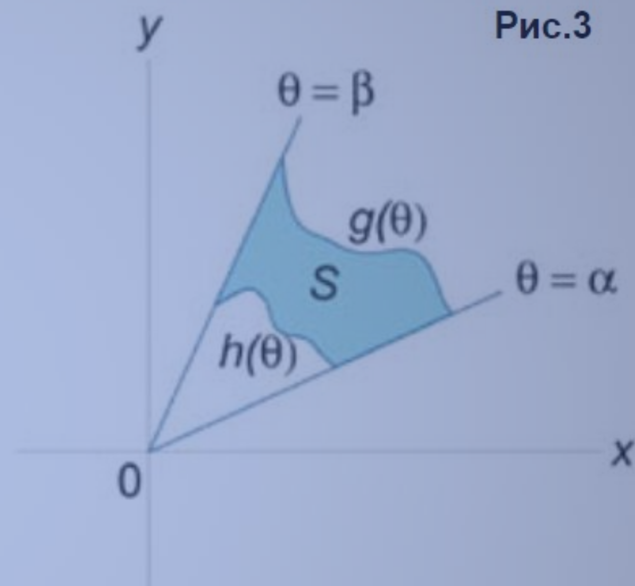
Площадь и объем в полярных координатах

Пусть S является областью, ограниченной линиями $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $r = h(\theta)$, $r = g(\theta)$ (рисунок 3).

Тогда площадь этой области определяется формулой

$$A = \iint\limits_R dA = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \int\limits_{h(\theta)}^{g(\theta)} r dr d\theta.$$

Рис.3



Объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(r, \theta)$ с основанием S, выражается в полярных координатах в виде

$$V = \iint\limits_S f(r, \theta) r dr d\theta.$$

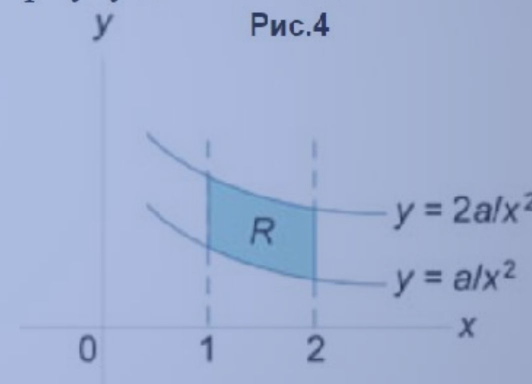
Пример 1

Найти площадь области R, ограниченной гиперболами $y = \dfrac{a^2}{x}$, $y = \dfrac{2a^2}{x}$ $(a > 0)$ и вертикальными прямыми $x = 1$, $x = 2$.

Решение.

Область R схематически показана на рисунке 4. Используя формулу для площади области I типа

Рис.4



$$A = \iint\limits_R dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} dydx,$$

получаем

$$A = \iint\limits_R dxdy = \int\limits_1^2 \left[\int\limits_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} dy \right] dx = \int\limits_1^2 \left[y \Big|_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{2a^2}{x}} \right] dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{2a^2}{x} - \frac{a^2}{x} \right) dx = a^2 \int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$$

$$= a^2 (\ln 2 - \ln 1) = a^2 \ln 2.$$

Пример 2

Вычислить площадь области R, ограниченной линиями $y^2 = a^2 - ax$, $y = a + x$.

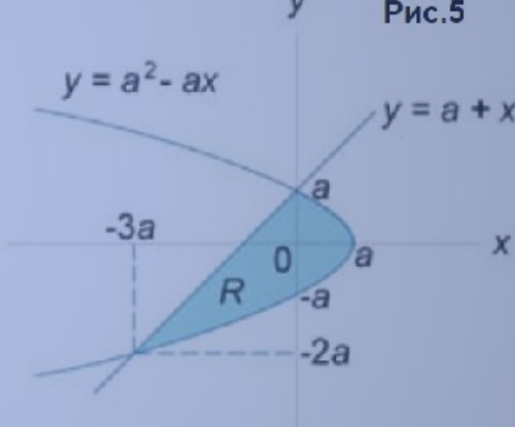
Решение.

Сначала определим точки пересечения двух заданных линий.

$$\begin{cases} y^2 = a^2 - ax \\ y = a + x \end{cases}, \Rightarrow (a+x)^2 = a^2 - ax, \Rightarrow a^2 + 2ax + x^2 = a^2 - ax, \Rightarrow x^2 + 3ax = 0,$$

$$\Rightarrow x(x+3a) = 0, \Rightarrow x_{1,2} = 0;\ -3a.$$

Рис.5



Следовательно, координаты точек пересечения равны

$$x_1 = 0,\ \ y_1 = a + 0 = a,$$

$$x_2 = -3a,\ \ y_2 = a - 3a = -2a.$$

Область R представлена на рисунке 5. Будем рассматривать ее как область типа II.

Для вычисления площади преобразуем уравнения границ:

$$y^2 = a^2 - ax, \Rightarrow ax = a^2 - y^2, \Rightarrow x = a - \frac{y^2}{a},$$

$$y = a + x, \Rightarrow x = y - a.$$

Получаем

$$A = \iint\limits_R dxdy = \int\limits_{-2a}^{a} \left[\int\limits_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} dx \right] dy = \int\limits_{-2a}^{a} \left[\int\limits_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} dx \right] dy = \int\limits_{-2a}^{a} \left[x\Big|_{y-a}^{a-\frac{y^2}{a}} \right] dy$$

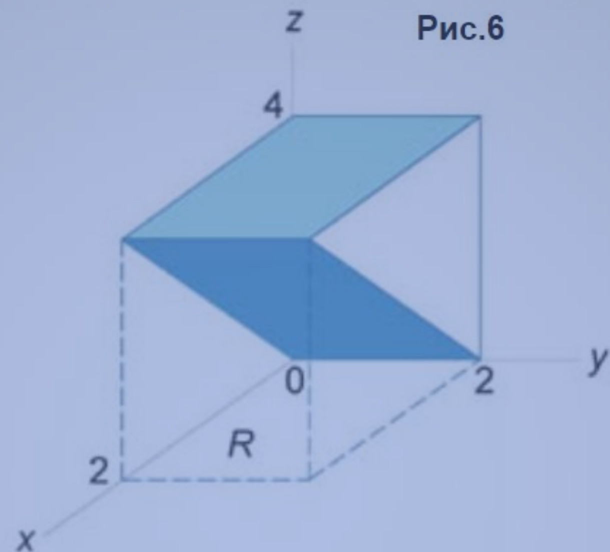
$$= \int\limits_{-2a}^{a} \left[a - \frac{y^2}{a} - (y-a) \right] dy = \int\limits_{-2a}^{a} \left(2a - \frac{y^2}{a} - y \right) dy = \left(2ay - \frac{y^3}{3a} - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{-2a}^{a}$$

$$= \left(2a^2 - \frac{a^3}{3a} - \frac{a^2}{2} \right) - \left(-4a^2 + \frac{8a^3}{3a} - \frac{4a^2}{2} \right) = \frac{9a^2}{2}.$$

Пример 3

Найти объем тела в первом октанте, ограниченного плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = x$, $z + x = 4$.

Рис.6



Решение.

Данное тело показано на рисунке 6.

Из рисунка видно, что основание R является квадратом. Для заданных x, y значение z изменяется от $z = x$ до $z = 4 - x$. Тогда объем равен

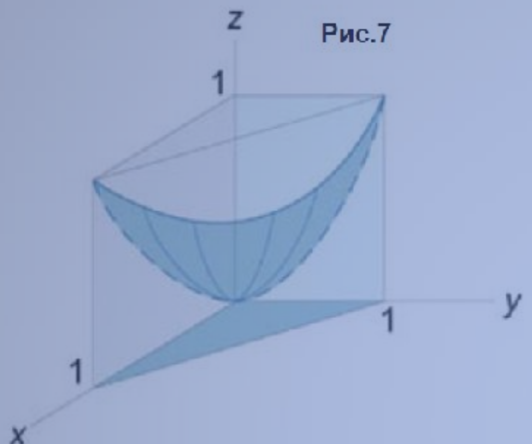
$$V = \iint\limits_R [(4 - x) - x]\, dxdy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^2 (4 - 2x)\, dy\right] dx = \int\limits_0^2 \left[(4y - 2xy)|_{y=0}^2\right] dx = \int\limits_0^2 (8 - 4x)\, dx$$

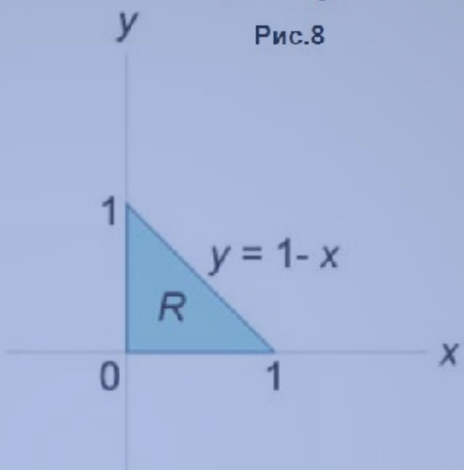
$$= \left(8x - 2x^2\right)\Big|_0^2 = 16 - 8 = 8.$$

Пример 4

Описать тело, объем которого определяется интегралом $V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy$.

Решение.





Данное тело (рис.7, 8) расположено над треугольной областью R, ограниченной координатными осями Ox, Oy и прямой $y = 1 - x$ ниже параболической поверхности $z = x^2 + y^2$. Объем тела равен

$$V = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy = \int\limits_0^1 \left[\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{1-x}\right] dx = \int\limits_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}\right] dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3}\right) dx = \int\limits_0^1 \left(2x^2 - \frac{4x^3}{3} - x + \frac{1}{3}\right) dx$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Пример 5

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $x + y = a$, $z = 0$.

Решение.

Рис.9

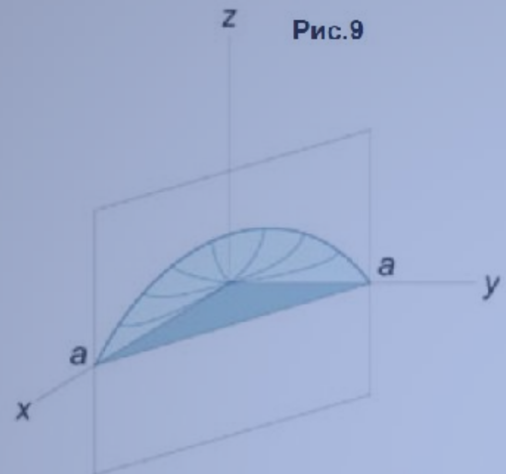
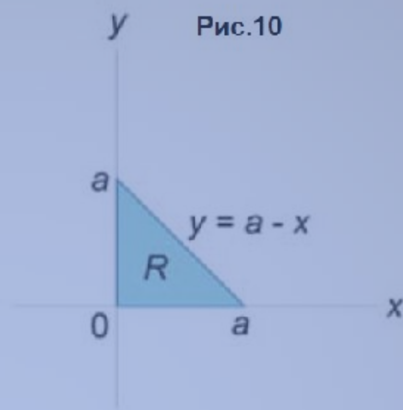


Рис.10



Данное тело лежит над треугольником R в плоскости Oxy (рисунки $9, 10$) ниже поверхности $z = xy$. Объем тела равен

$$V = \iint\limits_R xydxdy = \int\limits_0^a \left[\int\limits_0^{a-x} xydy \right] dx = \int\limits_0^a \left[\left(\frac{xy^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{a-x} \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^a x(a-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^a x \left(a^2 - 2ax + x^2\right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^a \left(a^2 x - 2ax^2 + x^3\right) dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2a \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^a$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4} \right) = \frac{a^4}{24}.$$

Пример 6

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1 - x$.

Решение.

Рис.11

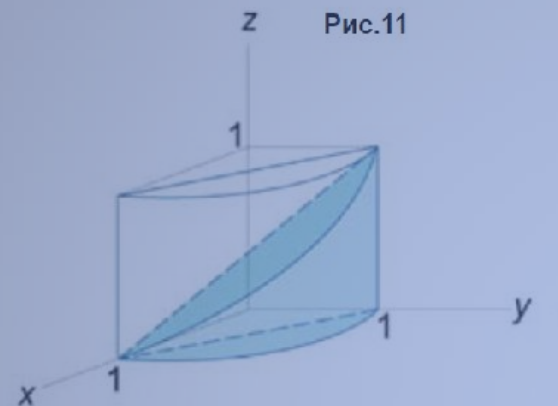
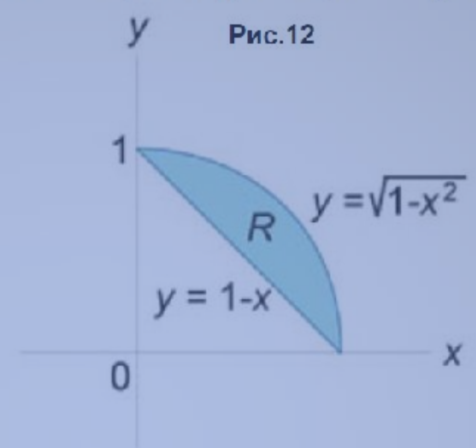


Рис.12



Как видно из рисунков 11 и 12, в области интегрирования R при $0 \le x \le 1$ значения y изменяются от $1 - x$ до $\sqrt{1 - x^2}$. Сверху тело ограничено плоскостью $z = 1 - x$. Следовательно, объем данного тела равен

$$V = \iint\limits_R (1 - x)\, dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\, dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[(1 - x)\, y\Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \right] dx$$

$$= \int\limits_0^1 (1 - x) \left(\sqrt{1 - x^2} - 1 + x \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} - 1 + 2x - x^2 \right) dx$$

$$= \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx - \int\limits_0^1 x\sqrt{1 - x^2} dx - \int\limits_0^1 \left(1 + 2x - x^2 \right) dx.$$

$$V = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx - \int_0^1 \left(1+2x-x^2\right) dx.$$

Вычислим полученные три интеграла отдельно.

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Сделаем замену: $x = \sin t$. Тогда $dx = \cos t dt$. Видно, что $t = 0$ при $x = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$ при $x = 1$. Следовательно,

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(Сравните с площадью сектора единичного круга в первом квадранте).

Вычислим второй интеграл $I_2 = \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$, используя замену переменной. Полагаем $1 - x^2 = w$. Тогда $-2xdx = dw$ или $xdx = \frac{-dw}{2}$. Находим, что $w = 1$ при $x = 0$ и, наоборот, $w = 0$ при $x = 1$. Интеграл равен

$$I_2 = \int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \int\limits_1^0 \sqrt{w}\left(-\frac{dw}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int\limits_1^0 \sqrt{w}dw = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{w}dw = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 w^{\frac{1}{2}}dw$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2w^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Наконец, вычислим третий интеграл.

$$I_3 = \int\limits_0^1 \left(1 - 2x + x^2\right)dx = \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, объем тела равен

$$V = I_1 - I_2 - I_3 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \approx 0,12.$$

Пример 7

Найти площадь лепестка розы, заданной уравнением $r = \cos 2\theta$.

Решение.

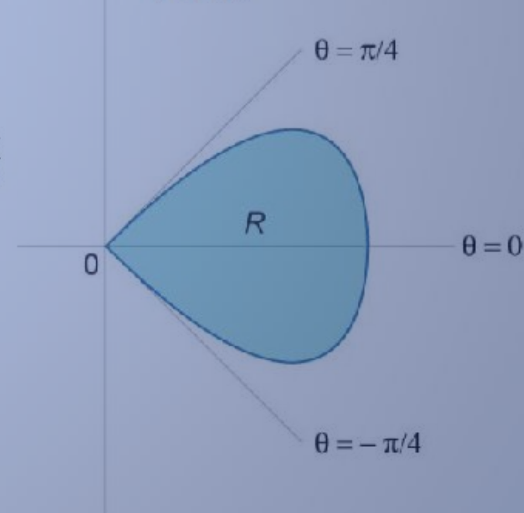
Рассмотрим лепесток в секторе $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ (рисунок 13). Область интегрирования имеет вид $R = \left\{ (r,\theta) \mid 0 \le r \le \cos 2\theta, -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\}$. Следовательно, площадь данной фигуры в полярных координатах равна

$$A = \iint\limits_R r dr d\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\int\limits_0^{\cos 2\theta} r dr \right] d\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(\frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^{\cos 2\theta} \right] d\theta = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4\theta}{2} d\theta = \frac{1}{4} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4\theta)\, d\theta = \frac{1}{4} \left(\theta + \frac{\sin 4\theta}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} \right) - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi)}{4} \right) \right] = \frac{\pi}{8}.$$

Рис.13



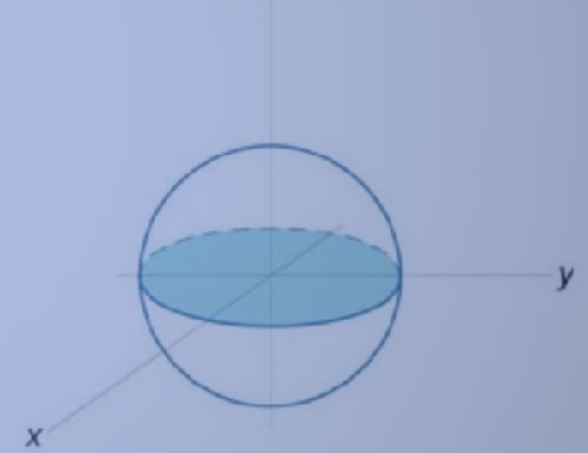
Пример 8

Вычислить объем единичного шара.

Решение.
Уравнение сферы радиусом 1 имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (рисунок 14). В силу симметрии, ограничимся нахождением объема верхнего полушара и затем результат умножим на 2. Уравнение верхней полусферы записывается как

$$z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Рис.14



Преобразуя это уравнение в полярные координаты, получаем

$$z(r, \theta) = \sqrt{1 - r^2}.$$

В полярных координатах область интегрирования R описывается множеством

$$R = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

В полярных координатах область интегрирования R описывается множеством $R = \{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Следовательно, объем верхнего полушара выражается формулой

$$V_{\frac{1}{2}} = \iint_R \sqrt{1-r^2}\, r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr.$$

Сделаем замену переменной для оценки последнего интеграла. Пусть $1 - r^2 = t$. Тогда $-2rdr = dt$ или $rdr = -\frac{dt}{2}$. Уточним пределы интегрирования: $t = 1$ при $r = 0$ и, наоборот, $t = 0$ при $r = 1$. Получаем

$$V_{\frac{1}{2}} = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r dr = 2\pi \int_1^0 \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\pi \int_1^0 \sqrt{t} dt = \pi \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt = \pi \left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Таким образом, объем единичного шара равен

$$V = 2V_{\frac{1}{2}} = \frac{4\pi}{3}.$$

Пример 9

Используя полярные координаты, найти объем конуса высотой H и радиусом основания R (рисунок 15).

Решение.

Рис.15

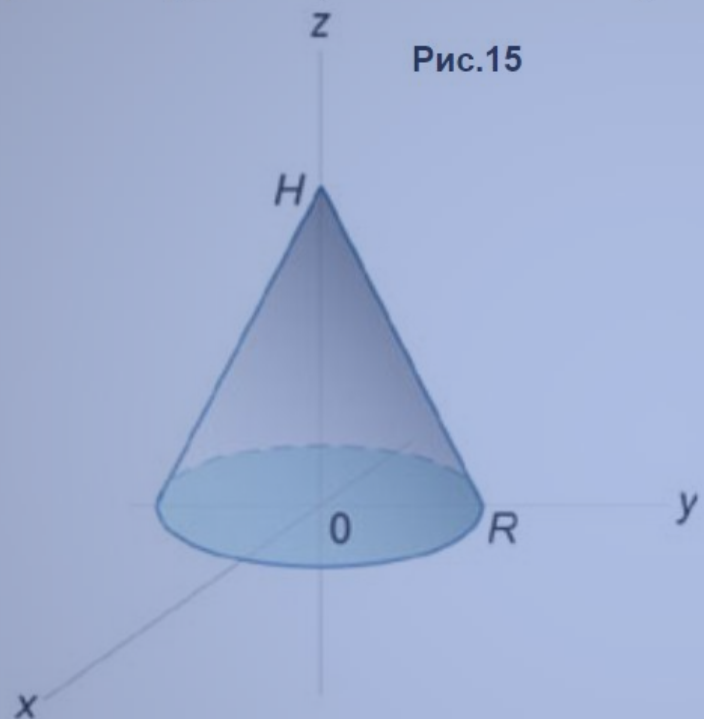
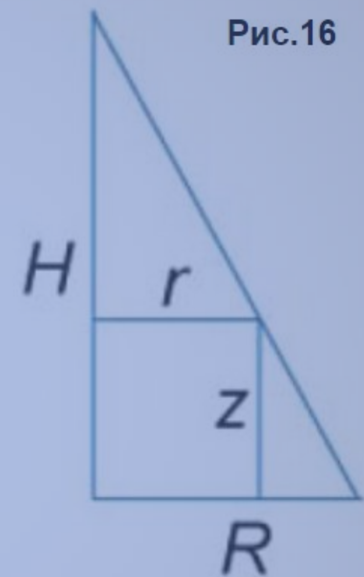


Рис.16



Сначала получим уравнение поверхности конуса. Используя подобные треугольники (рисунок 16), можно записать

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H}, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,

$$H - z = \frac{Hr}{R} \text{ или } z(x,y) = H - \frac{Hr}{R} = \frac{H}{R}(R - r) = \frac{H}{R}\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Тогда объем конуса равен

$$V = \iint\limits_R z(x,y)\,dxdy = \iint\limits_R \frac{H}{R}\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = \frac{H}{R}\iint\limits_R (R-r)\,rdrd\theta$$

$$= \frac{H}{R}\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R (R-r)\,drd\right]d\theta = \frac{H}{R}\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^R \left(Rr - r^2\right)dr = \frac{2\pi H}{R}\int\limits_0^R \left(Rr - r^2\right)dr$$

$$= \frac{2\pi H}{R}\left(\frac{Rr^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_{r=0}^{R} = \frac{2\pi H}{R}\left(\frac{R^3}{2} - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2\pi H}{R}\cdot\frac{R^3}{6} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Пример 10

Вычислить площадь сферы радиуса a.

Решение.
Рассмотрим верхнюю полусферу. Ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ или } z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Очевидно, область интегрирования R представляет собой круг с таким же радиусом a, расположенный в центре координат. Площадь полусферы вычисляется по формуле

$$S_{\frac{1}{2}} = \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Найдем частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}.$$

Подставляя найденные производные, получаем

$$S_{\frac{1}{2}} = \iint\limits_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy = \iint\limits_R \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}dxdy = \iint\limits_R \sqrt{\frac{z^2 + x^2 + y^2}{z^2}}dxdy$$

$$= \iint\limits_R \frac{a}{z}dxdy.$$

Преобразуем двойной интеграл в полярные координаты.

$$S_{\frac{1}{2}} = \iint\limits_R \frac{a}{z}dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}rdrd\theta = a\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -2\pi a \int\limits_0^a \frac{d\left(a^2 - r^2\right)}{2\sqrt{a^2 - r^2}}$$

$$= -2\pi a \left(\sqrt{a^2 - r^2}\right)\Big|_{r=0}^{a} = -2\pi a\,(0 - a) = 2\pi a^2.$$

Площадь поверхности полной сферы, соответственно, равна

$$S = 2S_{\frac{1}{2}} = 4\pi a^2.$$

Физические приложения двойных интегралов

Масса и статические моменты пластины

Предположим, что плоская пластина изготовлена из неоднородного материала и занимает область R в плоскости Oxy. Пусть плотность пластины в точке (x, y) в области R равна $\rho(x, y)$. Тогда *масса пластины* выражается через двойной интеграл в виде

$$m = \iint\limits_R \rho(x, y)\, dA.$$

Статический момент пластины относительно оси Ox определяется формулой

$$M_x = \iint\limits_R y\rho(x, y)\, dA.$$

Аналогично находится *статический момент пластины относительно оси Oy*:

$$M_y = \iint\limits_R x\rho(x, y)\, dA.$$

Координаты *центра масс пластины*, занимающей область R в плоскости Oxy с плотностью, распределенной по закону $\rho(x, y)$, описываются формулами

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint\limits_R x\rho(x, y)\, dA = \frac{\iint\limits_R x\rho(x, y)\, dA}{\iint\limits_R \rho(x, y)\, dA},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint\limits_R y\rho(x, y)\, dA = \frac{\iint\limits_R y\rho(x, y)\, dA}{\iint\limits_R \rho(x, y)\, dA}.$$

Для однородной пластины с плотностью $\rho(x, y) = 1$ для всех (x, y) в области R центр масс определяется только формой области и называется *центроидом*.

Моменты инерции пластины

Момент инерции пластины относительно оси Ox выражается формулой

$$I_x = \iint\limits_R y^2 \rho(x, y)\, dA.$$

Аналогично вычисляется *момент инерции пластины относительно оси Oy*:

$$I_y = \iint\limits_R x^2 \rho(x, y)\, dA.$$

Полярный момент инерции пластины равен

$$I_0 = \iint\limits_R \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y)\, dA.$$

Заряд пластины

Предположим, что электрический заряд распределен по области R в плоскости Oxy и его плотность распределения задана функцией $\sigma(x, y)$. Тогда полный *заряд пластины* Q определяется выражением

$$Q = \iint\limits_R \sigma(x, y)\, dA.$$

Среднее значение функции

Приведем также формулу дял расчета среднего значения некоторой распределенной величины. Пусть $f(x, y)$ является непрерывной функцией в замкнутой области R в плоскости Oxy. Среднее значение μ функции $f(x, y)$ в области R определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{S} \iint\limits_R f(x, y)\, dA,$$

где $S = \iint\limits_R dA$ – площадь области интегрирования R.

Пример 1

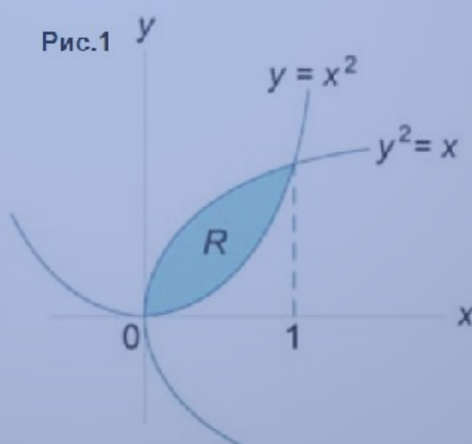
Определить координаты центра тяжести однородной пластины, образованной параболами $y^2 = x$ и $y = x^2$.

Решение.
Заданная пластина имеет форму, показанную на рисунке 1. Поскольку пластина однородна, то можно положить $\rho(x, y) = 1$. Тогда масса пластины равна

$$m = \iint\limits_R dA = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[y|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2 \right) dx$$

$$= \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Рис.1



Найдем теперь статические моменты относительно осей Ox и Oy.

$$M_x = \iint\limits_R y dA = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x - x^4 \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{20},$$

$$M_y = \iint\limits_R x dA = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right] x dx = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) x dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3 \right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

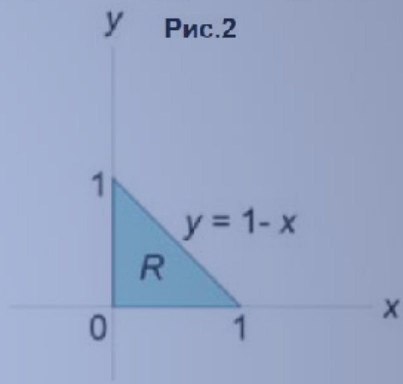
Вычисляем координаты центра масс.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$

Пример 2

Вычислить моменты инерции треугольника, ограниченного прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ (рисунок 2) и имеющего плотность $\rho(x,y)=xy$.

Рис.2



Решение.

Найдем момент инерции пластины относительно оси Ox :

$$I_x=\iint\limits_R y^2\rho(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{1-x}y^2xydy\right]dx=\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{1-x}y^3dy\right]xdx=\int\limits_0^1\left[\left(\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^{1-x}\right]xdx$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1(1-x)^4xdx=\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)xdx=\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{49}{120}.$$

Аналогично вычислим момент инерции относительно оси Oy :

$$I_y = \iint\limits_R x^2 \rho(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{1-x} x^2 xydy\right] dx = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{1-x} ydy\right] x^3 dx = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}\right] x^3 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2 x^3 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1-2x+x^2\right) x^3 dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(x^3 - 2x^4 + x^5\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{120}.$$

Пример 3

Электрический заряд распределен по площади диска $x^2 + y^2 = 1$ таким образом, что его поверхностная плотность равна $\sigma(x, y) = 1 + x^2 + y^2 \ \left(\text{Кл/м}^2\right)$. Вычислить полный заряд диска.

Решение.

В полярных координатах область, занятая диском, описывается множеством $\{(r, \theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

Полный заряд будет равен

$$Q = \iint\limits_R \sigma(x, y)\, dx dy = \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^1 \left(1 + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\right) r dr \right] d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \left(1 + r^2\right) r dr$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \left(r + r^3\right) dr = 2\pi \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}\ (\text{Кл}).$$

Определение и свойства тройных интегралов

Определение тройного интеграла

Формально определение тройного интеграла можно ввести аналогично двойному интегралу как предел суммы Римана. Начнем с простейшего случая, когда область интегрирования U имеет вид параллелепипеда $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ (рисунок 1).

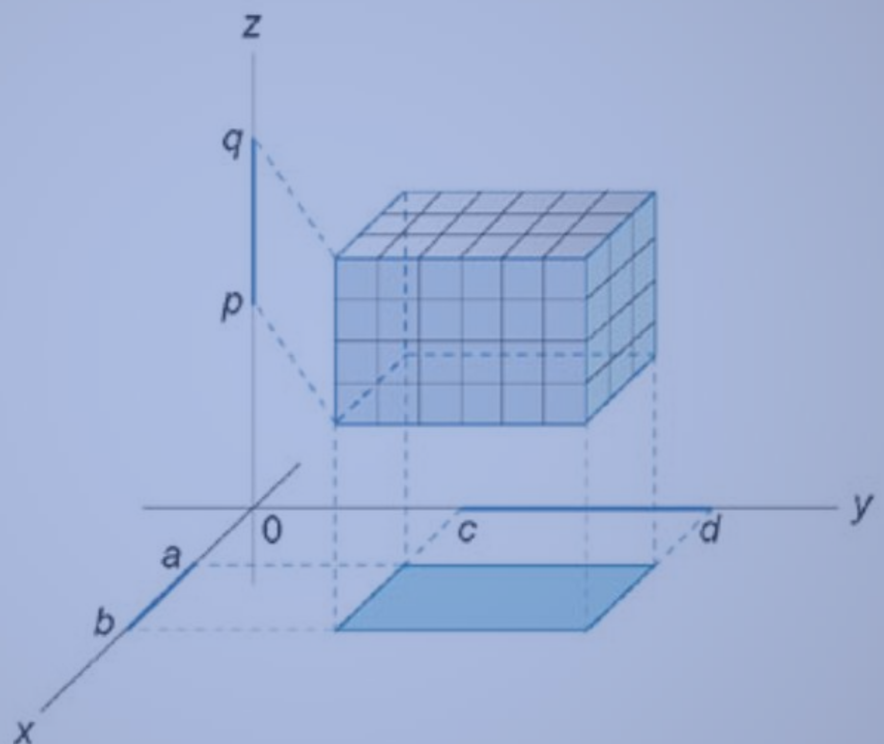


Рис.1

Пусть множество чисел $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ разбивает отрезок $[a, b]$ на малые интервалы, так что справедливо соотношение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Аналогично построим разбиение отрезка $[c, d]$ вдоль оси Oy и $[p, q]$ вдоль оси Oz :

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_j < \ldots < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$p = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_k < \ldots < z_{\ell-1} < z_\ell = q.$$

Сумма Римана функции $f(x, y, z)$ над разбиением $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} f(u_i, v_j, w_k)\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Здесь (u_i, v_j, w_k) – некоторая точка в параллелепипеде $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j) \times (z_{k-1}, z_k)$, а приращения равны

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \ \Delta y_j = y_j - y_{j-1},\ \ \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ в параллелепипеде $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ определяется как предел суммы Римана, при котором максимальное значение приращений Δx_i, Δy_j и Δz_k стремятся к нулю:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x, y, z)\, dV = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_j \to 0 \\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} f(u_i, v_j, w_k)\, \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Чтобы определить тройной интеграл в произвольной области U, выберем параллелепипед $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, включающий заданную область U. Введем функцию $g(x, y, z)$, такую, что

$$\begin{cases} g(x, y, z) = f(x, y, z), & \text{если } f(x, y, z) \in U \\ g(x, y, z) = 0, & \text{если } f(x, y, z) \notin U \end{cases}.$$

Тогда тройной интеграл от функции функции $f(x, y, z)$ в произвольной области U определяется в виде:

$$\iiint\limits_{U} f(x, y, z)\, dV = \iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} g(x, y, z)\, dV.$$

Основные свойства тройного интеграла

Пусть функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в области U.

Тогда справедливы следующие свойства:

1. $\iiint\limits_U [f(x,y,z) + g(x,y,z)]\,dV = \iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_U g(x,y,z)\,dV;$

2. $\iiint\limits_U [f(x,y,z) - g(x,y,z)]\,dV = \iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV - \iiint\limits_U g(x,y,z)\,dV;$

3. $\iiint\limits_U kf(x,y,z)\,dV = k\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV$, где k - константа;

4. Если $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ в любой точке области U, то $\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV \le \iiint\limits_U g(x,y,z)\,dV;$

5. Если область U является объединением двух непересекающихся областей U_1 и U_2, то

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{U_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{U_2} f(x,y,z)\,dV;$$

6. Пусть m - наименьшее и M - наибольшее значение непрерывной функции $f\left(x,y,z\right)$ в области U. Тогда для тройного интеграла справедлива оценка:

$$m\cdot V\leq\iiint\limits_U f\left(x,y,z\right)dV\leq M\cdot V,$$

где V - объем области интегрирования U.

7. *Теорема о среднем значении тройного интеграла*.
Если функция $f\left(x,y,z\right)$ непрерывна в области U, то существует точка $M_0\in U$, такая, что

$$\iiint\limits_U f\left(x,y,z\right)dV=f\left(M_0\right)\cdot V,$$

где V - объем области U.