ВОРОНЕЖСКИЙ ИНСТИТУТ ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лекция «Комплексные числа»

Математика, 1 курс

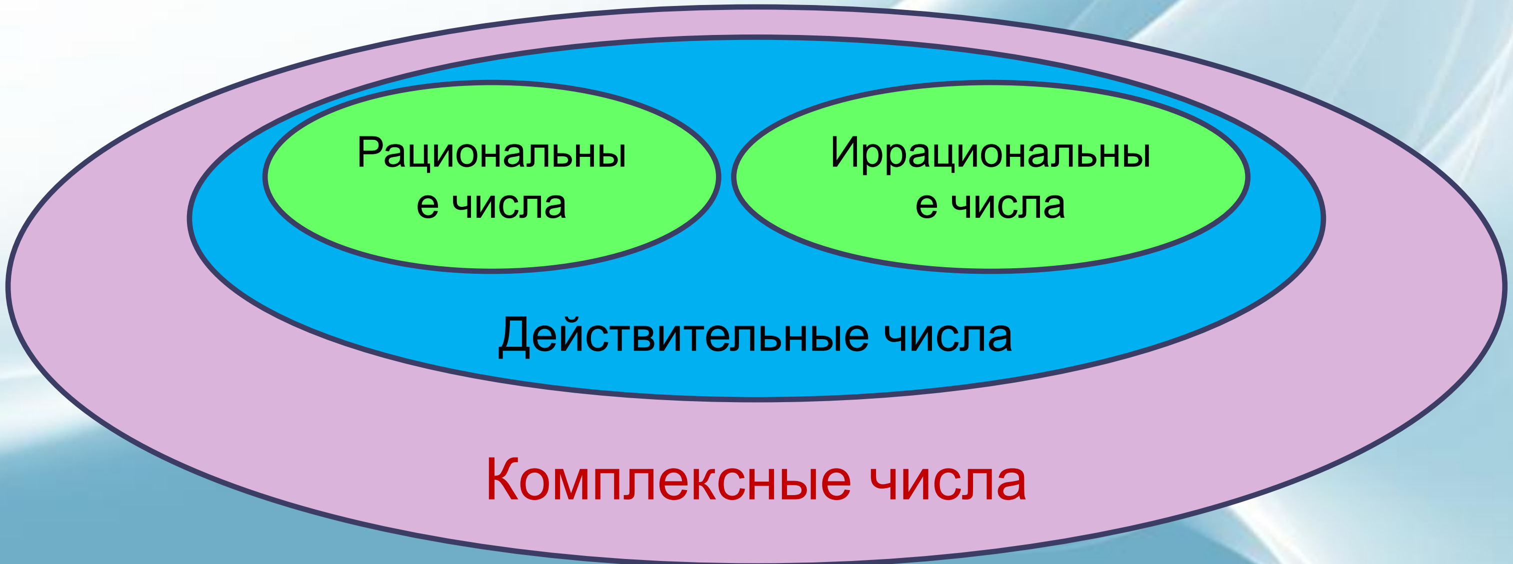
Автор: Ушакова Анна Евгеньевна,
кандидат физико-математических наук, доцент

Основные понятия

Комплексным числом называется упорядоченная пара действительных чисел (x, y), для которых выполняется равенство: $(x, y) = x + iy = z$,
где $x = Rez$-действительная часть комплексного числа;
$y = Imz$-мнимая часть комплексного числа;
i-мнимая единица, для которой верно равенство: $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым.

Если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом, следовательно множество всех действительных чисел является подмножеством всех комплексных чисел.



- Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными, если равны соответственно их действительные и мнимые части $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются комплексно-сопряженными (сопряженными), если они отличаются лишь знаком мнимой части.

Формы записи комплексных чисел

1) **Алгебраическая форма – это запись в виде** $z = x + iy$ **.**

Действия над комплексными числами в алгебраической форме:

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1 x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$

Из (3) следует важнейшее выражение:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$$

В результате перемножения комплексно-сопряженных чисел Получается действительное число:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

4. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + i\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

2) Тригонометрическая форма комплексного числа.

Сложение и вычитание комплексных чисел соответствует сложению и вычитанию векторов. По формулам, связывающим прямоугольные и полярные координаты, получаем тригонометрическую форму записи комплексного числа: $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

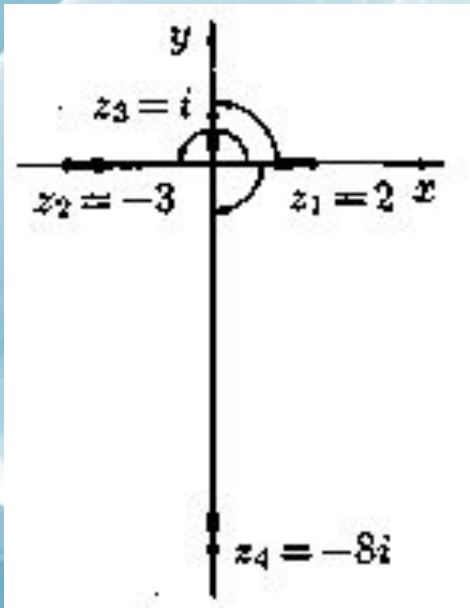
где $\rho = |z|$ - модуль комплексного числа;

угол $\varphi = Argz$ - аргумент комплексного числа.

Модуль однозначно определяется по формуле: $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Аргумент в общем виде можно представить следующим образом:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} \text{ для внутренних тточе I, IV четвертей} \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi \text{ для внутренних т точ II четверти} \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi \text{ для внутренних т то III четверти} \end{cases}$$



Сложение и вычитание комплексных чисел удобно производить в алгебраической форме, все остальные операции лучше выполнять в тригонометрической.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n-ое число множителей и все они одинаковы, то :

$$z^n = (\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

- **формула Муавра**

2. Извлечение корня

$$\sqrt[n]{x+iy} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

$$k = 0,1,2,\dots,n-1$$

3) Показательная форма комплексного числа.

Если в разложении функции в степенной ряд $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ вещественную переменную x заменить комплексной переменной z, то получим ряд по степеням z:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

Сумму ряда называют **показательной функцией комплексной переменной z.**

Аналогично определяются тригонометрические функции комплексной переменной z:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (3)$$

Подставим в выражение (1) iz вместо z и сгруппируем в правой части все слагаемые, содержащие множитель i и не содержащие этот множитель:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots =$$

$$= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \ldots = (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots) + i(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots)$$

Сравнивая полученный результат с формулами (2) и (3), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \qquad (4)$$

Подставив в выражение (1) -iz вместо z, получаем: $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$ (5)

Формулы (4) и (5) называются ***формулами Эйлера***.

Если почленно сложить и вычесть равенства (4) и (5), получаем другую запись формул Эйлера: $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ (6) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Используя формулу Эйлера (4) комплексное число $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать **в показательной форме**: $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$

где $\rho = |z|$ - модуль комплексного числа;

угол $\varphi = Argz$ - аргумент комплексного числа.

Действия над комплексными числами в показательной форме:

1. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

3. $z^n = \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}$

2. $\dfrac{z_1}{2} = \dfrac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

4. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i(\varphi + 2\pi\kappa)}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n}}$

Пример:

№1 Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

а) $z_1 = -1 + i$

$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$\varphi = \arg z = arctg\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4}$

$z_1 = -1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

б) $z_2 = -1$

$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2} = 1$

$\varphi = \arg z = arctg\left(\frac{0}{-1}\right) + \pi = \pi$

$z_2 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$

Спасибо

за внимание!!!