

ВОРОНЕЖСКИЙ ИНСТИТУТ ВЫСОКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

# Лекция «Комплексные числа»

Математика, 1 курс

Автор: Ушакова Анна Евгеньевна,  
кандидат физико-математических наук, доцент

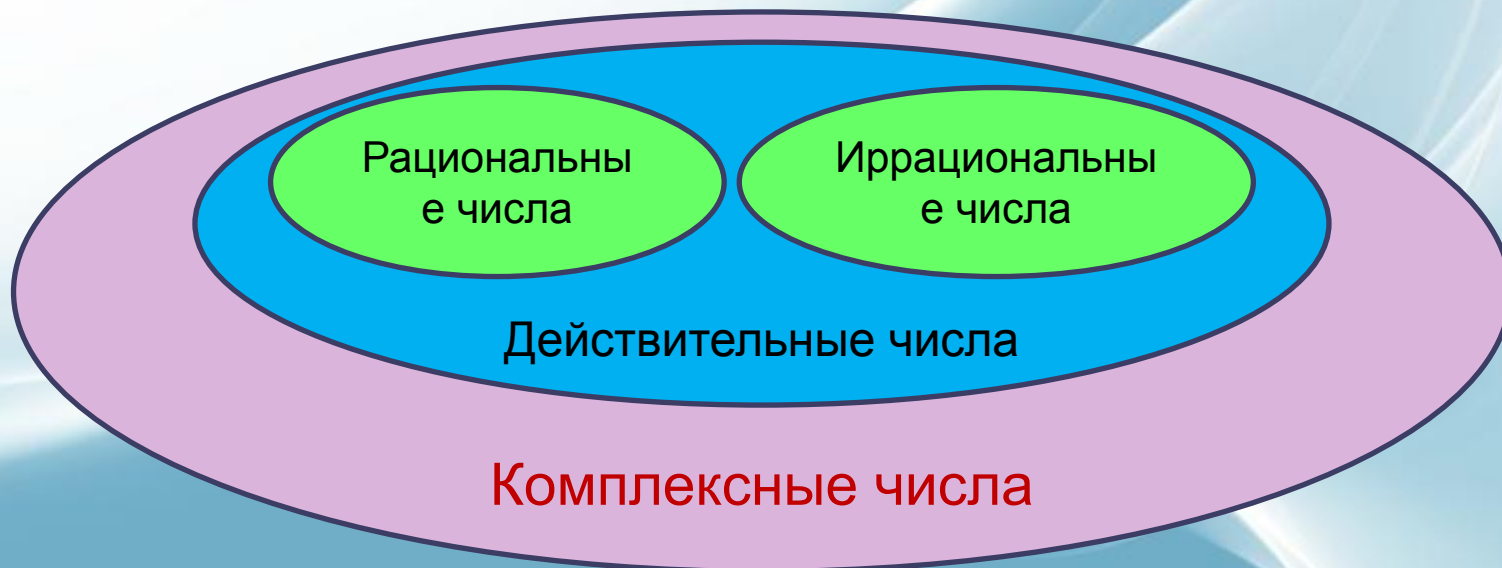
# Основные понятия

**Комплексным числом** называется упорядоченная пара действительных чисел  $(x, y)$ , для которых выполняется равенство:  $(x, y) = x + iy = z$ , где

- $x = \text{Re}z$  - действительная часть комплексного числа;
- $y = \text{Im}z$  - мнимая часть комплексного числа;
- $i$  - мнимая единица, для которой верно равенство:  $i^2 = -1$ .

Если  $x = 0$ , то число  $0 + iy = iy$  называется **чисто мнимым**.

Если  $y = 0$ , то число  $x + i0 = x$  отождествляется с действительным числом, следовательно множество всех действительных чисел является подмножеством всех комплексных чисел.



● Два комплексных числа  $z_1 = x_1 + iy_1$  и  $z_2 = x_2 + iy_2$  называются **равными**, если равны соответственно их действительные и мнимые части  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ .

Два комплексных числа  $z = x + iy$  и  $\bar{z} = x - iy$  называются **комплексно-сопряженными (сопряженными)**, если они отличаются лишь знаком мнимой части.

# Формы записи комплексных чисел

1) Алгебраическая форма – это запись в виде  $z = x + iy$ .

Действия над комплексными числами в алгебраической форме:

1.  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

2.  $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

3.  $z_1 \cdot z_2 = (x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$

Из (3) следует важнейшее выражение:

$$i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1$$

В результате перемножения комплексно-сопряженных чисел

Получается действительное число:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

4.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю («избавляются от мнимости в знаменателе»).

## 2) Тригонометрическая форма комплексного числа.

Сложение и вычитание комплексных чисел соответствует сложению и вычитанию векторов. По формулам, связывающим прямоугольные и полярные координаты, получаем тригонометрическую форму записи комплексного числа:  $z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

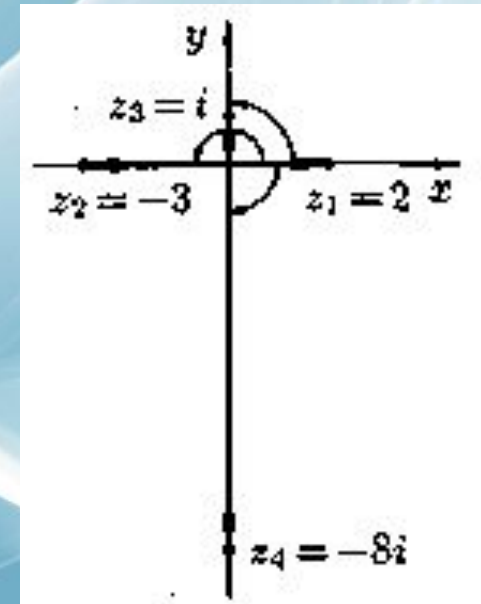
где  $\rho = |z|$  - модуль комплексного числа;

угол  $\varphi = \text{Arg}z$  - аргумент комплексного числа.

Модуль однозначно определяется по формуле:  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Аргумент в общем виде можно представить следующим образом:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{для внутренних точек I, IV четвертей} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек II четверти} \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек III четверти} \end{cases}$$



Сложение и вычитание комплексных чисел удобно производить в алгебраической форме, все остальные операции лучше выполнять в тригонометрической.

**Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:**

**1.**  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$   
Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть  $n$ -ое число множителей и все они одинаковы, то :

$$z^n = (\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{- формула}$$

**Муавра**

**2. Извлечение корня**

$$\sqrt[n]{x + iy} = \sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

### 3) Показательная форма комплексного числа.

Если в разложении функции в степенной ряд  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$  вещественную переменную  $x$  заменить комплексной переменной  $z$ , то получим ряд по степеням  $z$ :

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (1)$$

Сумму ряда называют **показательной функцией комплексной переменной  $z$** .

Аналогично определяются тригонометрические функции комплексной переменной  $z$ :

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (3)$$

Подставим в выражение (1)  $iz$  вместо  $z$  и сгруппируем в правой части все слагаемые, содержащие множитель  $i$  и не содержащие этот

множитель:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots = \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \dots = (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots) + i(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots) \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с формулами (2) и (3), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (4)$$

Подставив в выражение (1)  $-iz$  вместо  $z$ , получаем:  $e^{-iz} = \cos z - i \sin z \quad (5)$

Формулы (4) и (5) называются **формулами Эйлера**.

Если почленно сложить и вычесть равенства (4) и (5), получаем другую запись формул Эйлера:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (6) \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Используя формулу Эйлера (4) комплексное число  $z = x + iy = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  можно записать **в показательной форме**:

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi}$$

где  $\rho = |z|$  - модуль комплексного числа;

угол  $\varphi = \text{Arg} z$  - аргумент комплексного числа.

**Действия над комплексными числами в показательной форме:**

1.  $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$  3.

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$$

2.  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$  4.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i(\varphi + 2\pi k)}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$$



## Пример:

№1 Записать комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

а)  $z_1 = -1 + i$

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \arg z = \arctg\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

б)  $z_2 = -1$

$$|z| = \rho = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

$$\varphi = \arg z = \arctg\left(\frac{0}{-1}\right) + \pi = \pi$$

$$z_2 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$$

Спасибо

за внимание!!!

