Кафедра «КРЭМС»

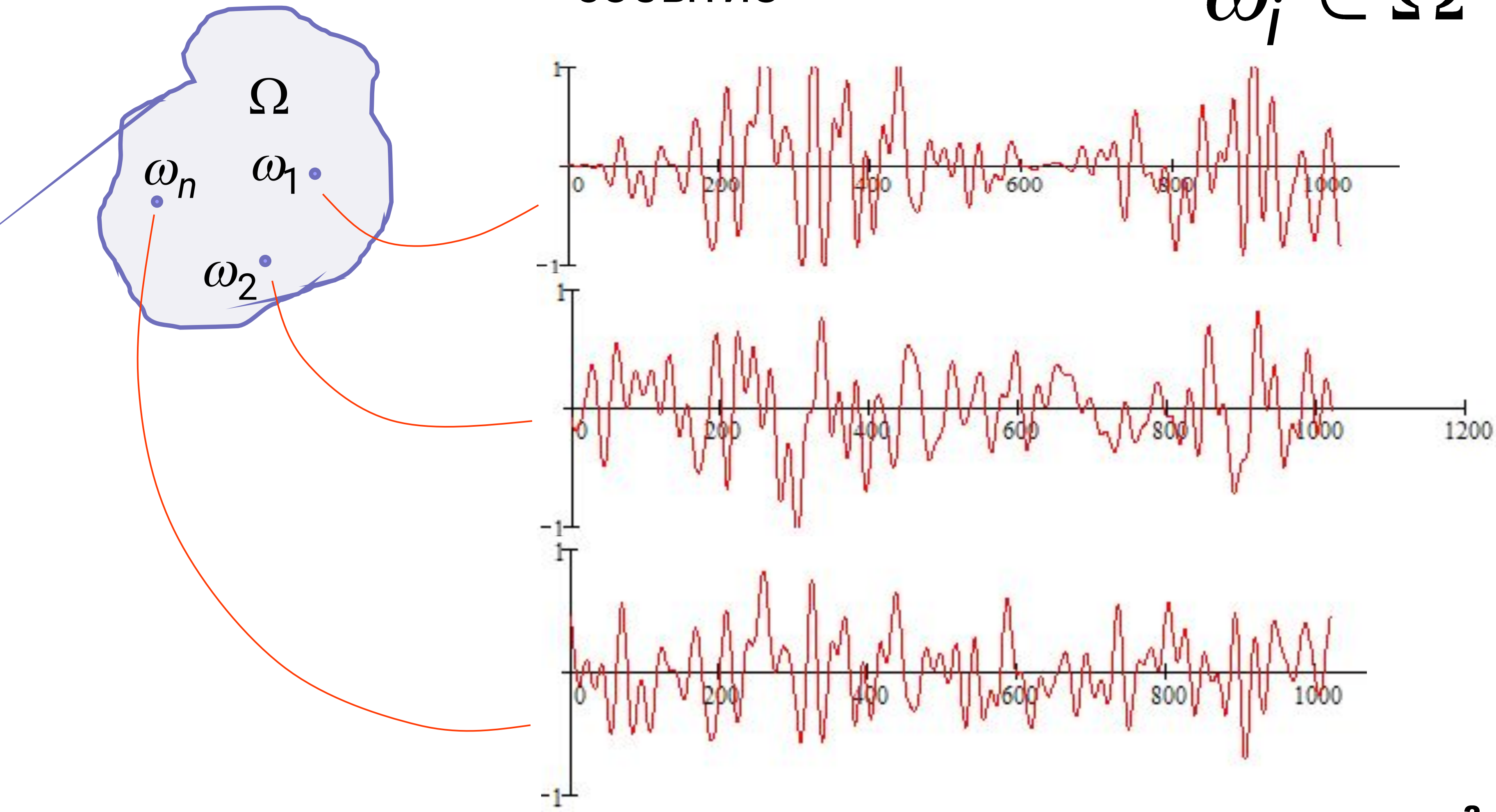
Основы теории СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ - 2

Зырянов Юрий Трифонович
доктор технических наук
профессор

Случайный процесс

ω_i – элементарное случайное событие

$$\omega_i \in \Omega$$



Случайные процессы

Перейти от описания с.в. к описанию с.п. можно, рассматривая совместные распределения двух, трех и т.д. значений $x(t_1),\ldots,x(t_n)$ процесса в некоторые различные моменты времени $t=t_1,\ldots,t_n$

$$\mathbf{P}\left\{\xi_1 \le x_1,\ldots,\xi_n \le x_n\right\} = F(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_n} w(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

Зависимость от времени явно не указана для упрощения записи

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = 1$$ условие нормировки

Случайный процесс считается полностью определенным, *если для любого* n *можно записать его совместную ПРВ при любом выборе моментов времени*

Числовые характеристики СП

$$m_{k_1 \ldots k_n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} w(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

смешанные начальные моменты

$$M_{k_1 \ldots k_n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{x1})^{k_1} \ldots (x_n - m_{xn})^{k_n} w(x_1, \ldots, x_n) dx_1 .. dx_n$$

смешанные центральные моменты

В частности, при $k_1 = 1$, $k_2 = \ldots = k_n = 0$

получается математическое ожидание в сечении t_1

При $k_2 = 2$, $k_1 = k_3 = \ldots = k_n = 0$ дисперсия в сечении t_2

и т.д.

Моментные функции

В общем случае моменты совместной ПРВ зависят от расположения сечений на оси времени и называются *моментными функциями*.

Чаще всего используют второй смешанный центральный момент

$$M_{11} = R_x(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_{x1})(x_2 - m_{x2})w(x_1,x_2)dx_1 dx_2 =$$

$$= \overline{(x_1 - m_{x1})(x_2 - m_{x2})}$$

– функция *автокорреляции*, или автокорреляционная функция (АКФ)

здесь и далее явно не указана зависимость от времени, в частности, функциями времени являются $m_{x1} = m_{x1}(t_1)$ и $m_{x2} = m_{x2}(t_2)$

Совместное описание двух СП

$$x(t) \qquad y(t)$$

Полное описание такой пары – совместная ПРВ n_1 отсчетов первого СП и n_2 отсчетов второго процесса при любых n_1 и n_2

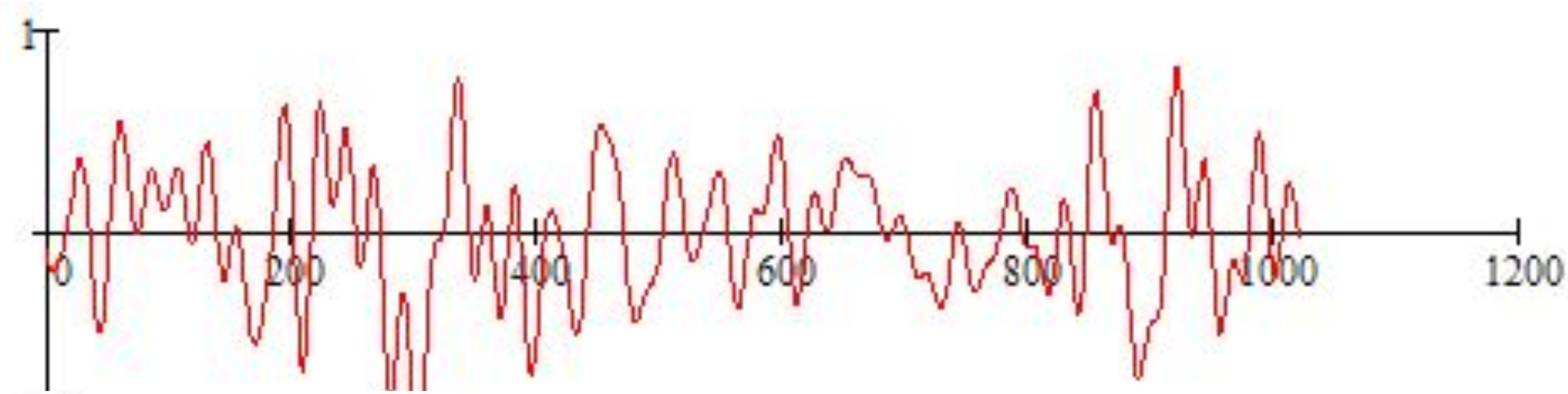
Числовые характеристики – всевозможные смешанные моменты, наиболее широко используется

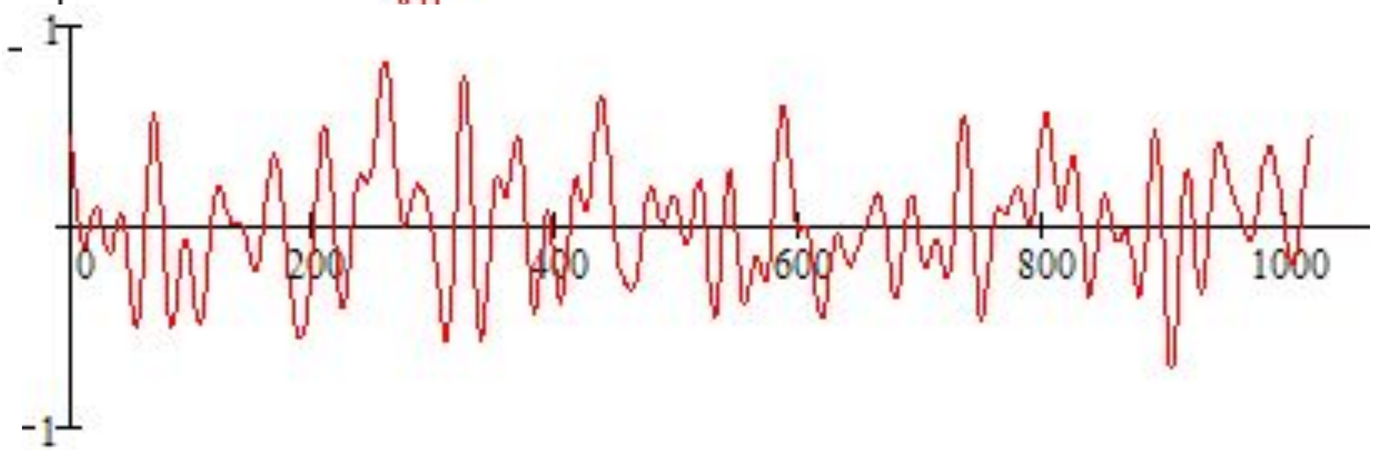
$$R_{xy}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m_{x1})(y_2 - m_{y2})w(x_1,y_2)dx_1 dy_2 =$$

$$= \overline{(x_1 - m_{x1})(y_2 - m_{y2})}$$ – взаимно корреляционная функция

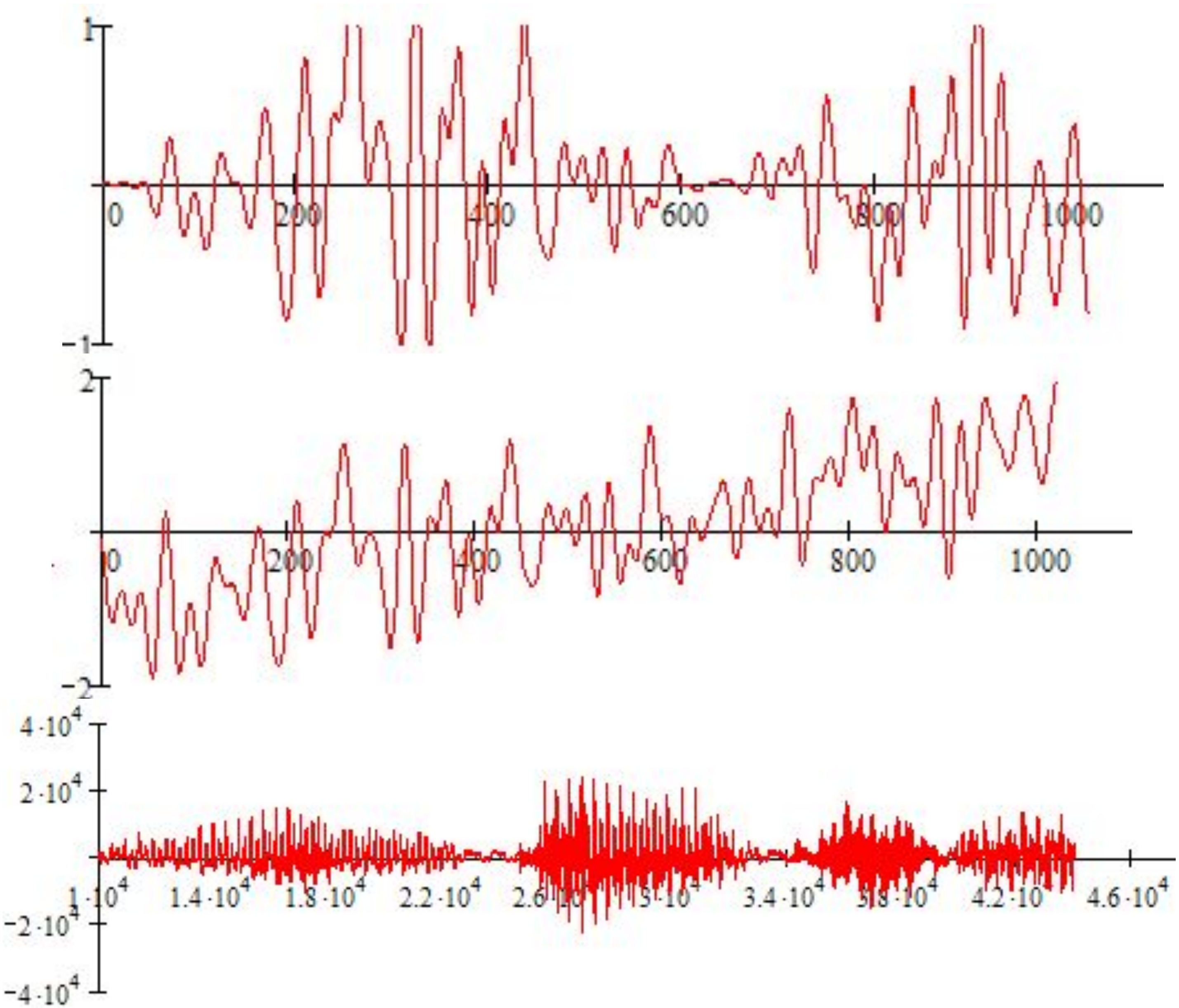
Стационарные СП

СП, для которых совместная n-мерная ПРВ не изменяется при одновременном сдвиге всех временных сечений на одну и ту же величину, называются *стационарными в узком смысле,* или *строго стационарными*.





Примеры реализаций нестационарных процессов



Стационарные в широком смысле СП

СП называется *стационарным в широком смысле*, если при одновременном сдвиге сечений не изменяются лишь его моменты не выше второго порядка.

$$m_x(t) = m_x$$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1) = R_x(\tau)$$

Заметим, что

$$R_x(0) = D_x$$

(второй центральный момент) откуда следует постоянство дисперсии

СП, стационарный в узком смысле, стационарен и в широком смысле. Обратное в общем случае неверно!

Обратный пример (частный случай)

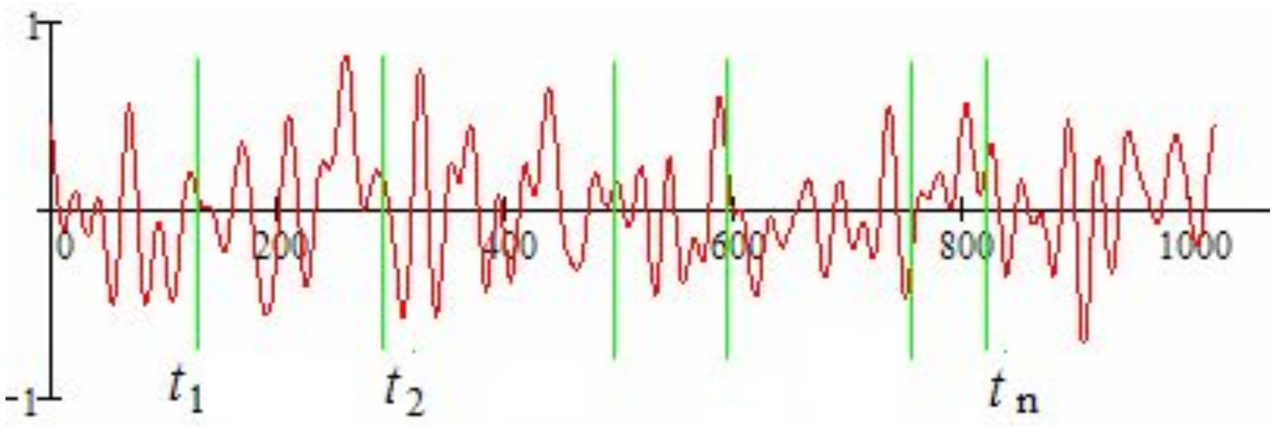
$$w(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n|\mathbf{r}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2|\mathbf{r}|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{A}_{ij}\frac{(x_i - m_i)}{\sigma_i}\frac{(x_j - m_j)}{\sigma_j}}$$

$|\mathbf{r}|$ – определитель квадратной матрицы, составленной из попарных коэффициентов корреляции отсчетов

$\mathbf{A}_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента r_{ij}

Если гауссовский процесс стационарен в ш.с., то МО и СКО не зависят от сдвига по времени



Коэффициенты r_{ij} полностью определяются автокорреляционной функцией и интервалами между временными сечениями.

При одновременном сдвиге всех сечений эти интервалы не меняются, не меняются и коэффициенты. Следовательно, совместная плотность инвариантна к сдвигу, а это и означает строгую стационарность

Эргодические случайные процессы

Для эргодических процессов моменты, найденные усреднением по ансамблю, равны соответствующим моментам, найденным усреднением по времени

$$m_k = \left\langle [x(t)]^k \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)]^k \, dt$$

$$M_k = \left\langle [x(t)-m]^k \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m]^k \, dt$$

В частности

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t) dt$$

$$D = \left\langle [x(t)-m]^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m]^2 \, dt$$

АКФ

$$R(\tau)=\langle[x(t)-m][x(t+\tau)-m]\rangle=\langle x(t)x(t+\tau)\rangle-m^2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt-m^2.$$

Обычно наблюдателю доступна лишь одна (хотя, возможно, достаточно длинная) реализация случайного процесса.

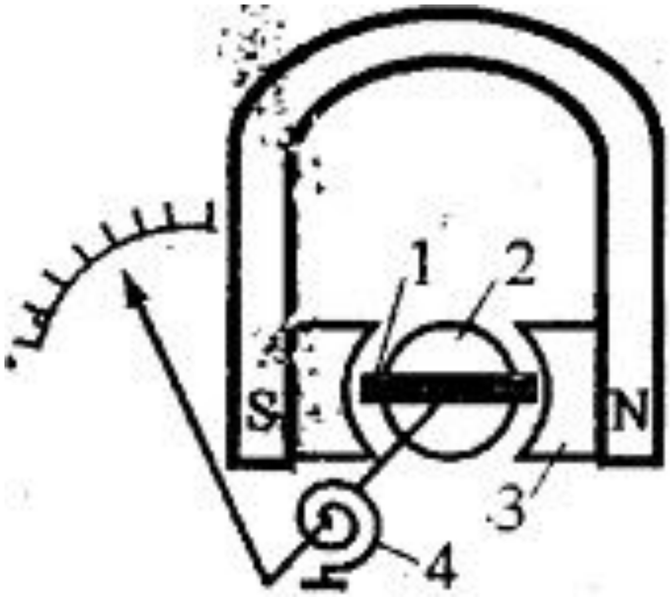
Эргодичность означает, по существу, то, что эта единственная реализация является полноправным представителем всего ансамбля

Достаточные условия эргодичности стационарного СП

$$\lim_{\tau\to\infty}R(\tau)=0 \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T R(\tau)d\tau=0$$

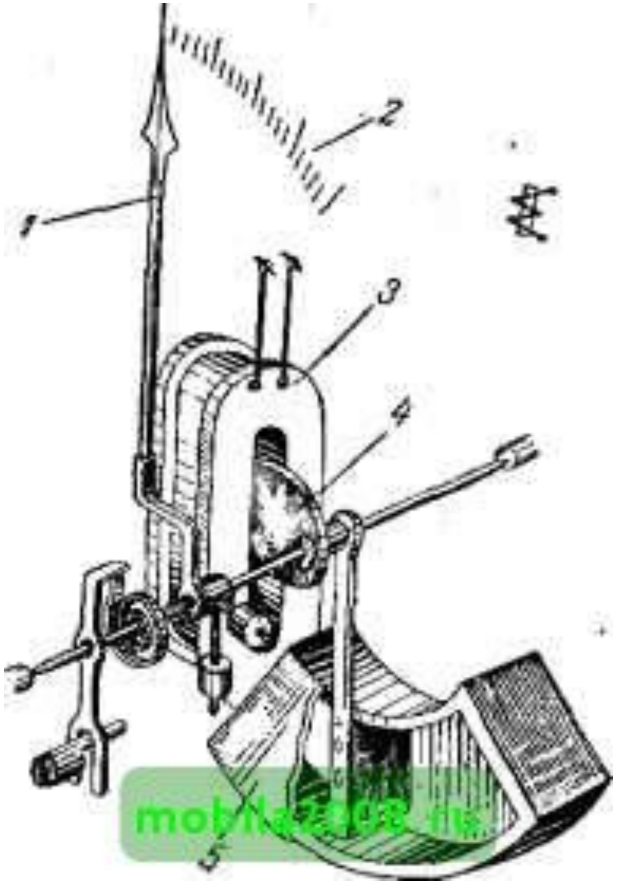
Измерение характеристик эргодического процесса

Вольтметр *магнитоэлектрической* системы измеряет математическое ожидание



Измерение характеристик эргодического процесса

Вольтметр электромагнитной или термоэлектрической системы, подключенный через разделительную емкость (для исключения постоянной составляющей) – измеряет среднеквадратическое значение (СКО)



Измерение характеристик эргодического процесса

Прибор для измерения АКФ (коррелометр)