Лекция
Комплексные числа

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ПМиИТ
Журавлева Ирина Викторовна.

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

$\Rrightarrow$ *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, первое из которых x называется его *действительной частью*, а второе число y — *мнимой частью*. Обозначение: $z = x+iy$.Символ i называется *мнимой единицей*.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество $\mathbb{R}$ действительных чисел является подмножеством множества $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$.

$\Rrightarrow$ Два комплексных числа $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются *сопряженными*.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ *можно изобразить точкой* $M(x;y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной* плоскостью (ее также обозначают $\mathbb{C}$). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

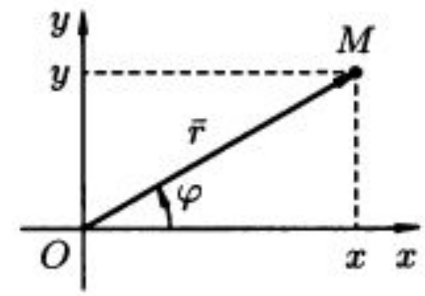


Рис. 112

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM} = (x;y)$.

Длина вектора $\bar{r}$, изображающего комплексное число z (см. рис. 112), называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r. Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots$, где $\arg z = \varphi$ — *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi;\pi]$, то есть $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

$\Rightarrow$ Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.2}$$

называется *тригонометрической формой.*

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

$\Rightarrow$ Запись числа z в виде

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{или} \quad z = |z|e^{i\arg z} \tag{1.4}$$

называют *показательной формой* (или экспоненциальной) комплексного числа.

Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$; **б)** $z = -1 + i\sqrt{3}$;

в) $z = -5i$; **г)** $z = -3 - 2i$;

д) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

Используем формулы (1.1)–(1.4).

а) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Значит,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\cdot\frac{2}{3}\pi}.$$

в) Имеем: $r = \sqrt{0 + 25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) Имеем: $r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi = \operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi$. Значит,

$$-3 - 2i = \sqrt{13}\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right) + i\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt{13}e^{i\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{5} - \pi\right)}.$$

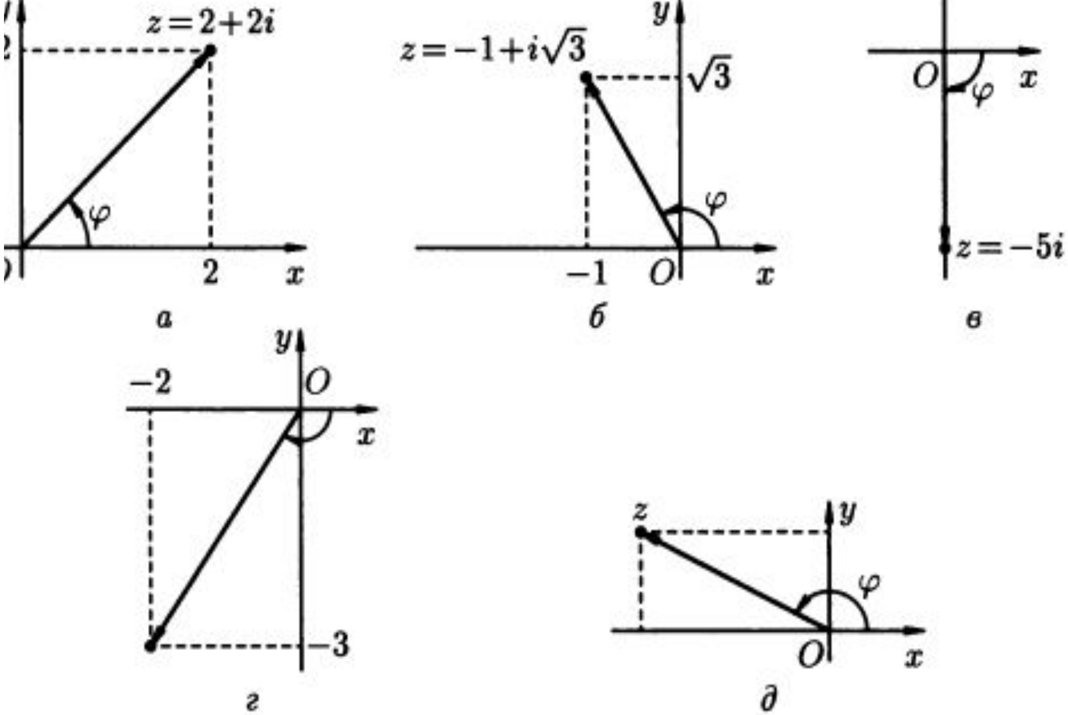


Рис. 113

д) Запись $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа (см. формулу (1.2)).

Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ, что $\cos\varphi = -\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{5}$. Таким углом является $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т.е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3\left(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi\right) = 3\cdot e^{i\cdot\frac{4}{5}\pi}.$$

Изобразить на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;

б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;

в) $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$;

г) $\operatorname{Re} z > 1$;

д) $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

а) Согласно формуле (1.1), имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z| = 2$,

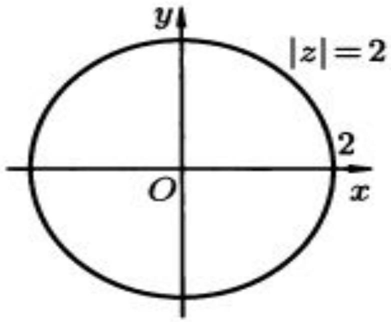
т.е. $x^2 + y^2 = 4$ представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки $O(0;0)$ под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.

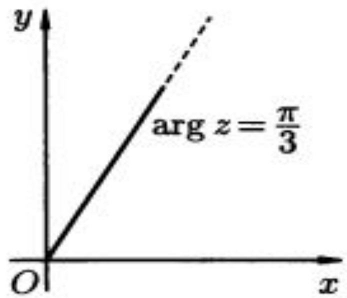
в) Неравенство $0 \leqslant \operatorname{Im} z < 1{,}5$ можно переписать так $0 \leqslant \leqslant y < 1{,}5$.

г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

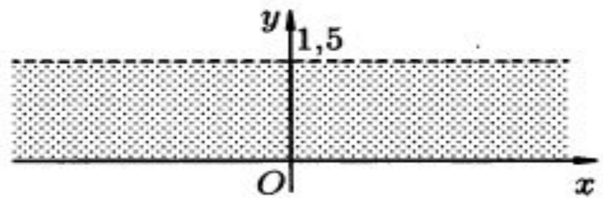
д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \leqslant 1$, заключенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ удовлетворяют условию $\begin{cases} |z| \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$



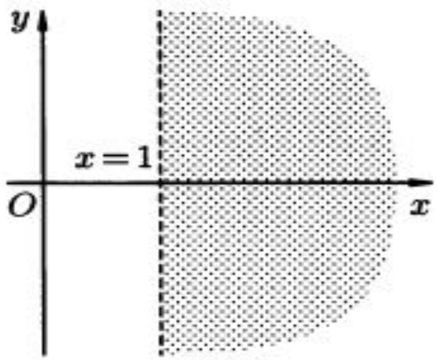
а



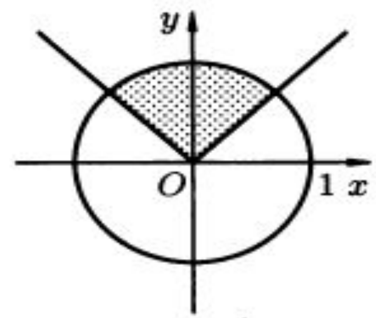
б



в



г



д

§ 2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные *в алгебраической форме*, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{2.1}$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{2.2}$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2), \tag{2.3}$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{2.4}$$

(при $z_2 \neq 0$).

Из равенства (2.2) следует, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}, \tag{2.5}$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Из равенства (2.3) следует, что

$$i^2 = -1.$$

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел* в натуральную степень:

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{2.6}$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big).$$

Корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$\text{где } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1. \tag{2.7}$$

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

❍ Используя формулы (2.1)–(2.4), находим:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i;$$
$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i;$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i;$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$ ●

Найти $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$.

❍ Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:
$|z| = r = \sqrt{1 + 3} = 2$, $\arg z = \varphi = \operatorname{tg} \dfrac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = -\dfrac{2}{3}\pi$, т. е.

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\Big(\cos\Big(-\tfrac{2}{3}\pi\Big) + i\sin(-\tfrac{2}{3}\pi)\Big).$$

По формуле Муавра (2.6) имеем

$$(-1 - i\sqrt{3})^{15} = \Big[2\Big(\cos\Big(-\tfrac{2}{3}\pi\Big) + i\sin\Big(-\tfrac{2}{3}\pi\Big)\Big)\Big]^{15} =$$
$$= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)) = 2^{15}(1 + 0i) = 2^{15} = 32768.$$

●

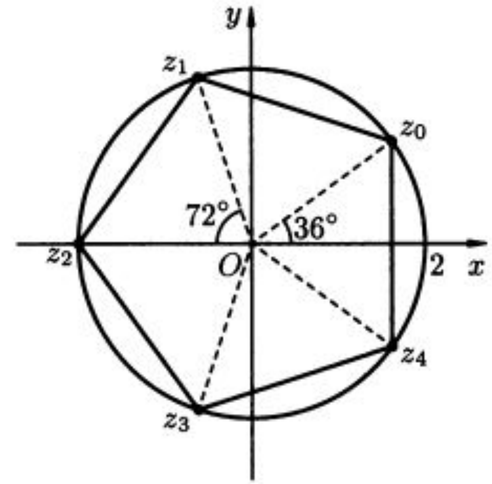
Решить уравнение $z^5+32=0$ на множестве комплексных чисел.

◐ Перепишем уравнение в виде $z=\sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме:

$$-32=32(\cos\pi+i\sin\pi).$$

По формуле (2.7) находим

$$z=\sqrt[5]{32(\cos\pi+i\sin\pi)}=2\Big(\cos\frac{\pi+2\pi k}{5}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{5}$$



где $k=0,1,2,3,4.$

Полагая $k=0,1,2,3,4$, получим

$$z_0=2\Big(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\Big)\approx 1{,}6180+1{,}1756\cdot i,$$

$$z_1=2\Big(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\Big)\approx -0{,}6180+1{,}9021\cdot i,$$

$$z_2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=-2,$$

$$z_3=2\Big(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\Big)\approx -0{,}6180-1{,}9021\cdot i,$$

$$z_4=2\Big(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\Big)\approx 1{,}6180-1{,}1756\cdot i.$$

Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат (рис. 115). ●

Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

а) $\begin{cases} 1 \leqslant z \cdot \bar{z} \leqslant 2, \\ -\sqrt{3} \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 0; \end{cases}$

б) $|z - i| = |z + 2|$;

в) $\begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geqslant \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

а) Так как $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде $\begin{cases} 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2, \\ -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R = 1$ и $R = 2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$. Искомое множество точек z заштриховано на рисунке 116.

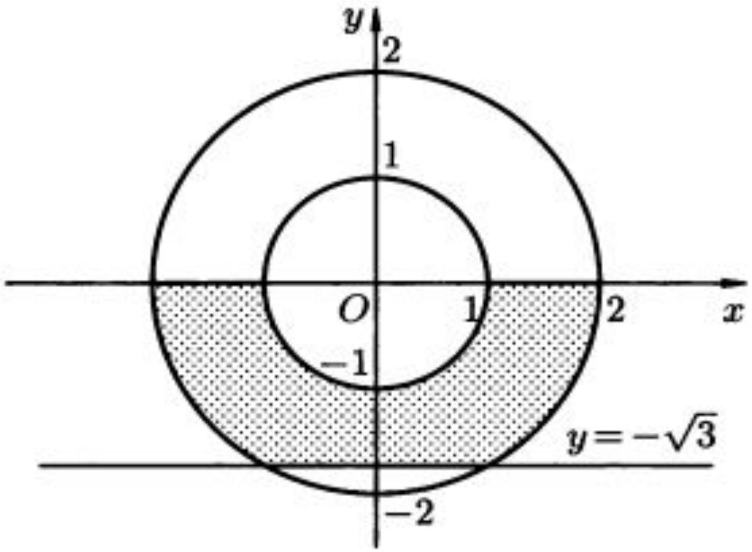


Рис. 116

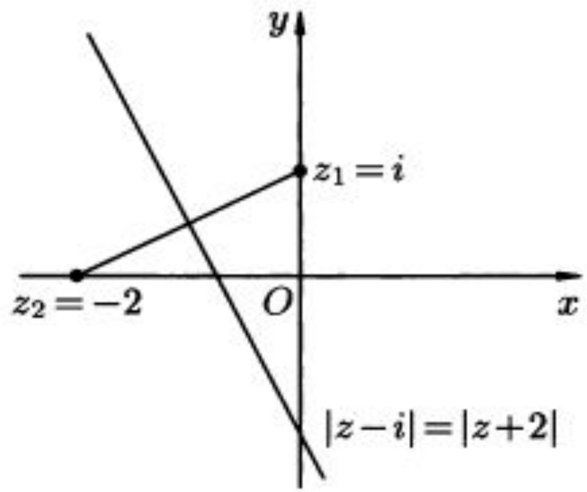


Рис. 117

б) Согласно формуле (2.5), равенству $|z-i| = |z-(-2)|$ удовлетворяет множество точек z, равноудаленных от точек $z_1 = i$ и $z_2 = -2$. Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1 = i$ и $z_2 = -2$ (см. рис. 117).

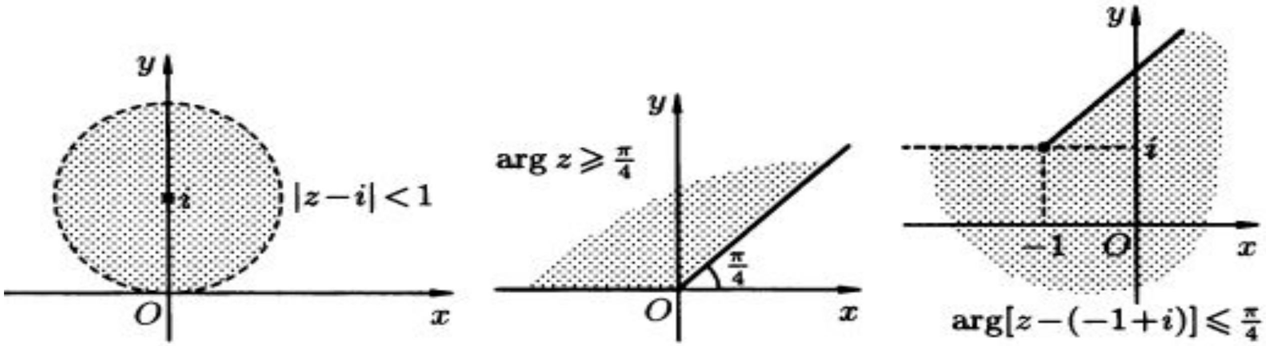


Рис. 118

в) Изобразим на отдельных рисунках множества точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условия (см. рис. 118).

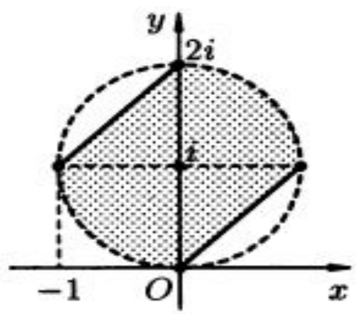


Рис. 119

Находим пересечение трех полученных областей — это и будет искомое множество (выделено на рис. 119). ●

Домашнее задание:

1. Вычислить:

   а) $1 - i^5 + i^{10} - i^{15} + \cdots + i^{50}$;

   б) $\dfrac{3+4i}{i} + \dfrac{4-i}{3+2i}$.

2. Вычислить $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, если $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \dfrac{1}{4}(\sin 30^\circ + i\cos 30^\circ)$.

3. Решить уравнение:

   а) $z^2 - 4z + 20 = 0$;

   б) $\bar{z} \cdot |z| = 4 - 3i$.

4. Изобразить на комплексной области множества всех точек z, удовлетворяющих условию:

   а) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$;

   б) $|z - 1 - i| < 1$, $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

5. Где расположены точки $1 + 2z$, для которых $|z| = 1$?