

Лекция

Комплексные числа

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ПМиИТ
Журавлева Ирина Викторовна.

§ 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

⇒ *Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел $(x; y)$, первое из которых x называется его действительной частью, а второе число y — мнимой частью. Обозначение: $z = x + iy$. Символ i называется мнимой единицей.*

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*, если $y = 0$, то число $x + i \cdot 0 = x$ отождествляется с действительным числом x , а это означает, что множество \mathbb{R} действительных чисел является подмножеством множества \mathbb{C} всех комплексных чисел, т. е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Число x называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью, $y = \operatorname{Im} z$.

⇒ Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е.

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$$

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются *сопряженными*.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И наоборот.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа называется *комплексной плоскостью* (ее также обозначают \mathbb{C}). Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой*.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать и с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overline{OM} = (x; y)$.

Длина вектора \vec{r} , изображающего комплексное число z (см. рис. 112), называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r . Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1)$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором \vec{r} , изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где $\operatorname{arg} z = \varphi$ — *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi; \pi]$, то есть $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$. Аргумент комплексного числа $z = 0 = 0 + i0$ не определен.

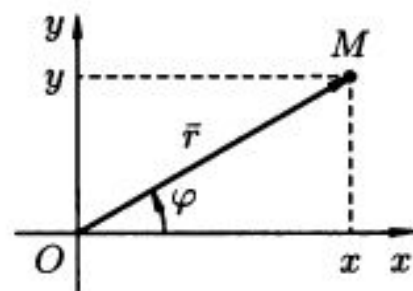


Рис. 112

⇒ Запись числа z в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Запись числа z в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой*.

Аргумент φ определяется из формул $\cos \varphi = \frac{x}{r}$, $\sin \varphi = \frac{y}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент z можно найти, используя формулу $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ находим

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{при } x > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi, & \text{при } x < 0, y > 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi, & \text{при } x < 0, y < 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

⇒ Запись числа z в виде

$$z = r e^{i\varphi} \quad \text{или} \quad z = |z| e^{i \arg z} \quad (1.4)$$

называют *показательной формой* (или *экспоненциальной*) комплексного числа.

Следующие комплексные числа изобразить векторами и записать в тригонометрической и показательной формах:

а) $z = 2 + 2i$;

б) $z = -1 + i\sqrt{3}$;

в) $z = -5i$;

г) $z = -3 - 2i$;

д) $z = -3\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)$.

○ Используем формулы (1.1)–(1.4).

а) Находим модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2i$. Здесь $x = 2 > 0$, $y = 2 > 0$, $|z| = r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = \arctg \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значит,

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

б) Для $z = -1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi$. Значит,

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

в) Имеем: $r = \sqrt{0 + 25} = 5$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Значит,

$$-5i = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

г) Имеем: $r = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, $\varphi = \arctg\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi = \arctg \frac{2}{3} - \pi$. Значит,

$$\begin{aligned} -3 - 2i &= \sqrt{13}\left(\cos\left(\arctg \frac{2}{3} - \pi\right) + i \sin\left(\arctg \frac{2}{3} - \pi\right)\right) = \\ &= \sqrt{13}e^{i(\arctg \frac{2}{3} - \pi)}. \end{aligned}$$

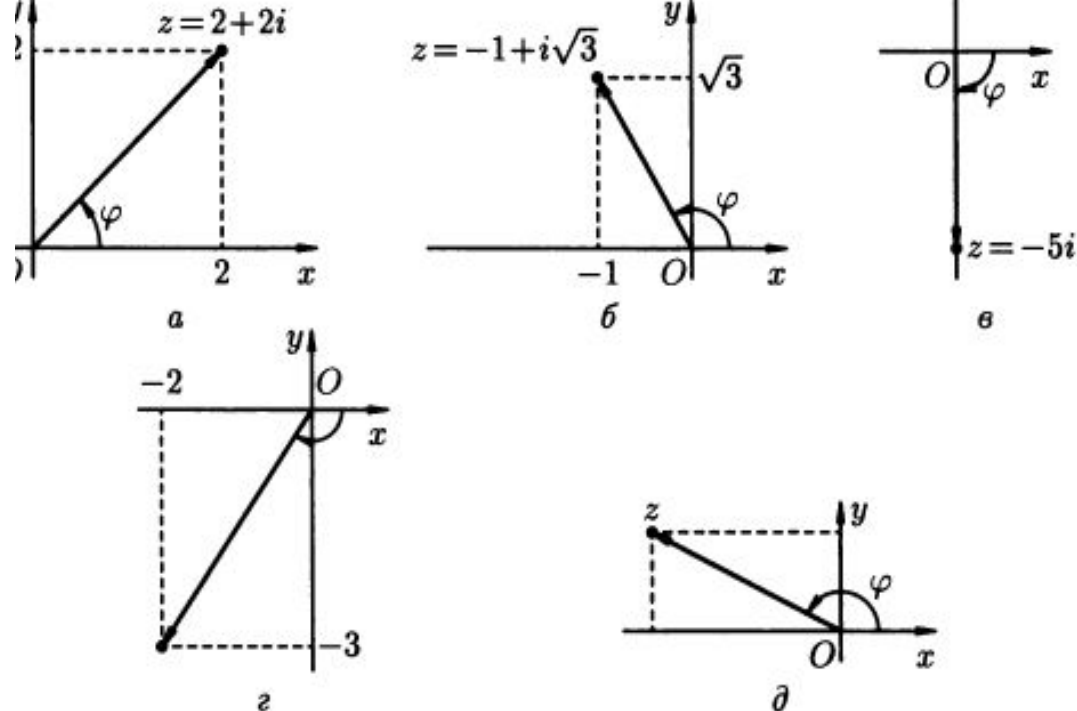


Рис. 113

д) Запись $z = -3\left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа (см. формулу (1.2)).

Перепишем z в виде $z = 3\left(-\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)$. Надо найти такой угол φ , что $\cos \varphi = -\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \varphi = \sin \frac{\pi}{5}$. Таким углом является $\pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5}\pi$, т.е. $\varphi = \frac{4}{5}\pi$. Значит,

$$z = 3\left(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi\right) = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{4}{5}\pi}.$$

Изобразить на комплексной плоскости \mathbb{C} множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$;

б) $\arg z = \frac{\pi}{3}$;

в) $0 \leq \operatorname{Im} z < 1,5$;

г) $\operatorname{Re} z > 1$;

д) $\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3}{4}\pi. \end{cases}$

○ а) Согласно формуле (1.1), имеем $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, т. е. $x^2 + y^2 = 4$. Множество точек, удовлетворяющих условию $|z| = 2$,

т. е. $x^2 + y^2 = 4$ представляет собой окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат.

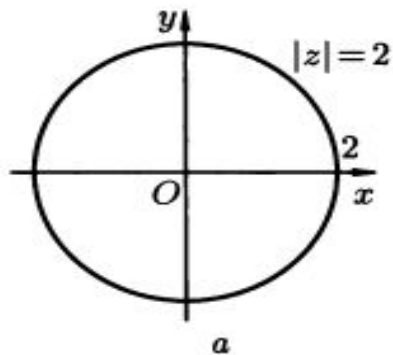
б) Точки z лежат на луче, выходящем из точки $O(0; 0)$ под углом $\frac{\pi}{3}$ к действительной оси.

в) Неравенство $0 \leq \operatorname{Im} z < 1,5$ можно переписать так $0 \leq y < 1,5$.

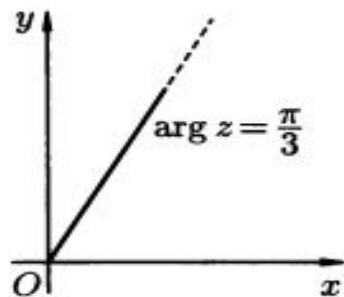
г) Условие $\operatorname{Re} z > 1$ или $x > 1$ определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$.

д) Множества точек, расположенных внутри и на границе круга $|z| \leq 1$, заключенных между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

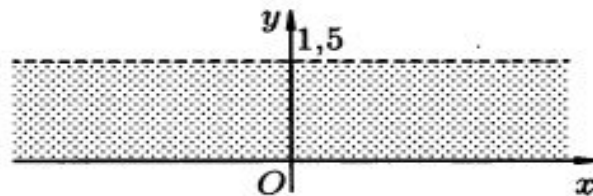
удовлетворяют условию $\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$



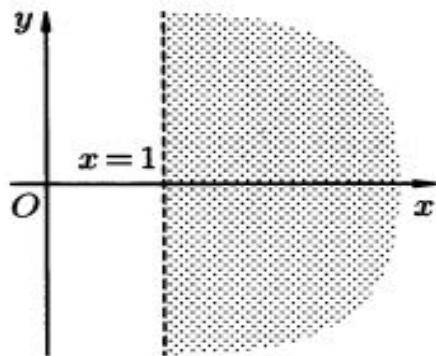
a



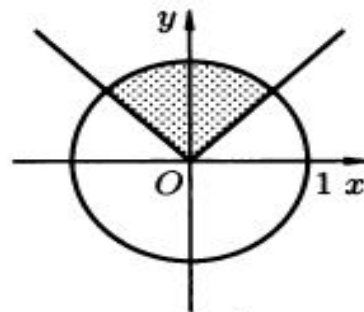
b



c



d



e

§ 2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Основные действия над комплексными числами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, заданные в алгебраической форме, определяются следующими равенствами:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (2.1)$$

$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \quad (2.2)$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2), \quad (2.3)$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad (2.4)$$

(при $z_2 \neq 0$).

Из равенства (2.2) следует, что

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}, \quad (2.5)$$

т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Из равенства (2.3) следует, что

$$i^2 = -1.$$

При умножении комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, заданных в *тригонометрической форме* их модули перемножаются, а аргументы складываются, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отсюда следует *формула Муавра для возведения комплексных чисел в натуральную степень*:

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (2.6)$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, осуществляется по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$. (2.7)

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$.

○ Используя формулы (2.1)–(2.4), находим:

$$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (2 - i) = 3 + i;$$

$$z_1 - z_2 = (1 + 2i) - (2 - i) = -1 + 3i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (2 - i) = 2 - i + 4i - 2i^2 = 4 + 3i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

Найти $(-1 - i\sqrt{3})^{15}$.

○ Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$|z| = r = \sqrt{1 + 3} = 2, \arg z = \varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = -\frac{2}{3}\pi, \text{ т. е.}$$

$$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right).$$

По формуле Муавра (2.6) имеем

$$\begin{aligned} (-1 - i\sqrt{3})^{15} &= \left[2 \left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right) \right]^{15} = \\ &= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i \sin(-10\pi)) = 2^{15}(1 + 0i) = 2^{15} = 32768. \end{aligned}$$

Решить уравнение $z^5 + 32 = 0$ на множестве комплексных чисел.

○ Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме:

$$-32 = 32(\cos \pi + i \sin \pi).$$

По формуле (2.7) находим

$$z = \sqrt[5]{32(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, 4$, получим

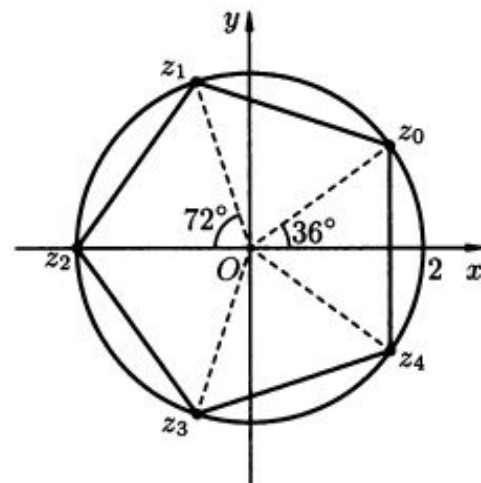
$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \approx 1,6180 + 1,1756 \cdot i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \approx -0,6180 + 1,9021 \cdot i,$$

$$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right) \approx -0,6180 - 1,9021 \cdot i,$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right) \approx 1,6180 - 1,1756 \cdot i.$$



Найденным корням уравнения соответствуют вершины правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (рис. 115). ●

Изобразить на рисунке множества точек z комплексной области, удовлетворяющих условию:

а)
$$\begin{cases} 1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 2, \\ -\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases}$$

б) $|z - i| = |z + 2|;$

в)
$$\begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

○ а) Так как $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, а $\operatorname{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде
$$\begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \\ -\sqrt{3} \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Неравенства $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R = 1$ и $R = 2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \leq y \leq 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$. Искомое множество точек z заштриховано на рисунке 116.

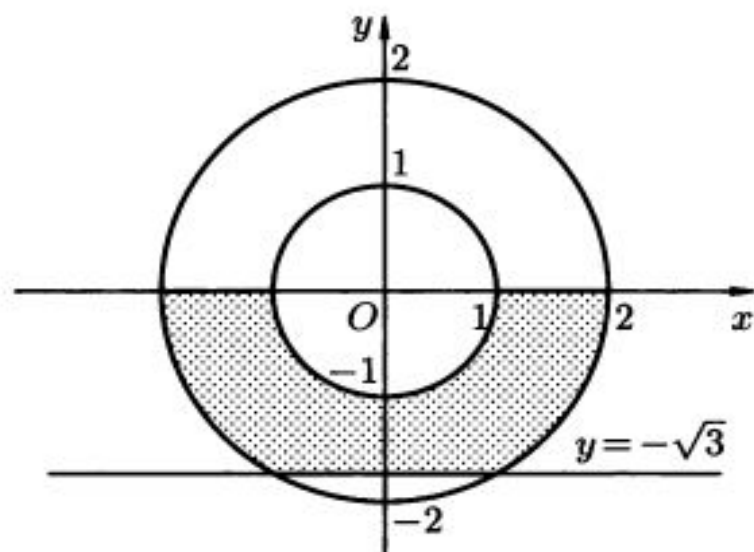


Рис. 116

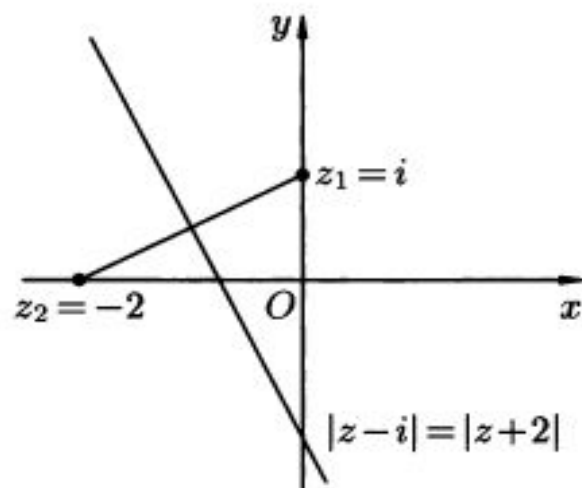


Рис. 117

б) Согласно формуле (2.5), равенству $|z - i| = |z - (-2)|$ удовлетворяет множество точек z , равноудаленных от точек $z_1 = i$ и $z_2 = -2$. Это множество точек представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z_1 = i$ и $z_2 = -2$ (см. рис. 117).

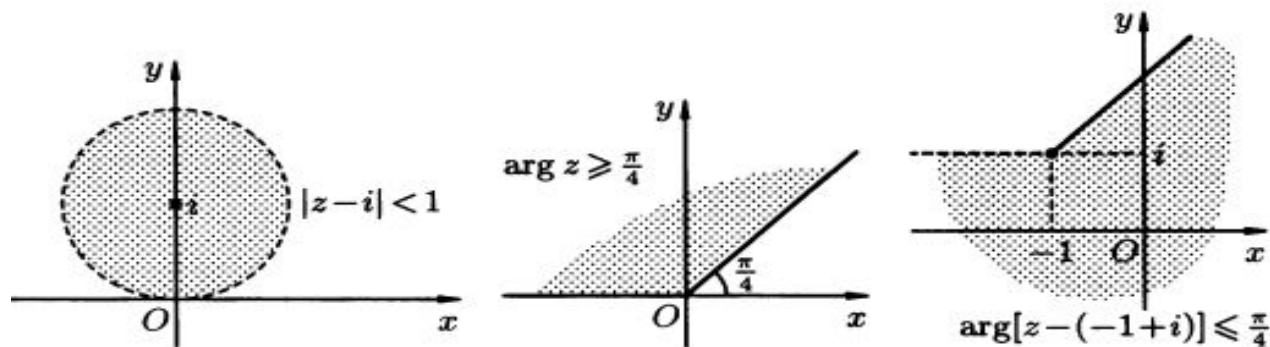


Рис. 118

в) Изобразим на отдельных рисунках множества точек, удовлетворяющих каждому из неравенств условия (см. рис. 118).

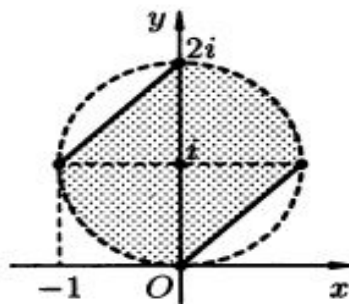


Рис. 119

Находим пересечение трех полученных областей — это и будет искомое множество (выделено на рис. 119). ●

Домашнее задание:

1. Вычислить:

а) $1 - i^5 + i^{10} - i^{15} + \dots + i^{50}$;

б) $\frac{3 + 4i}{i} + \frac{4 - i}{3 + 2i}$.

2. Вычислить $(z_1 \cdot z_2)^{10}$, если $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{1}{4}(\sin 30^\circ + i \cos 30^\circ)$.

3. Решить уравнение:

а) $z^2 - 4z + 20 = 0$;

б) $\bar{z} \cdot |z| = 4 - 3i$.

4. Изобразить на комплексной области множества всех точек z , удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$;

б) $|z - 1 - i| < 1$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$.

5. Где расположены точки $1 + 2z$, для которых $|z| = 1$?