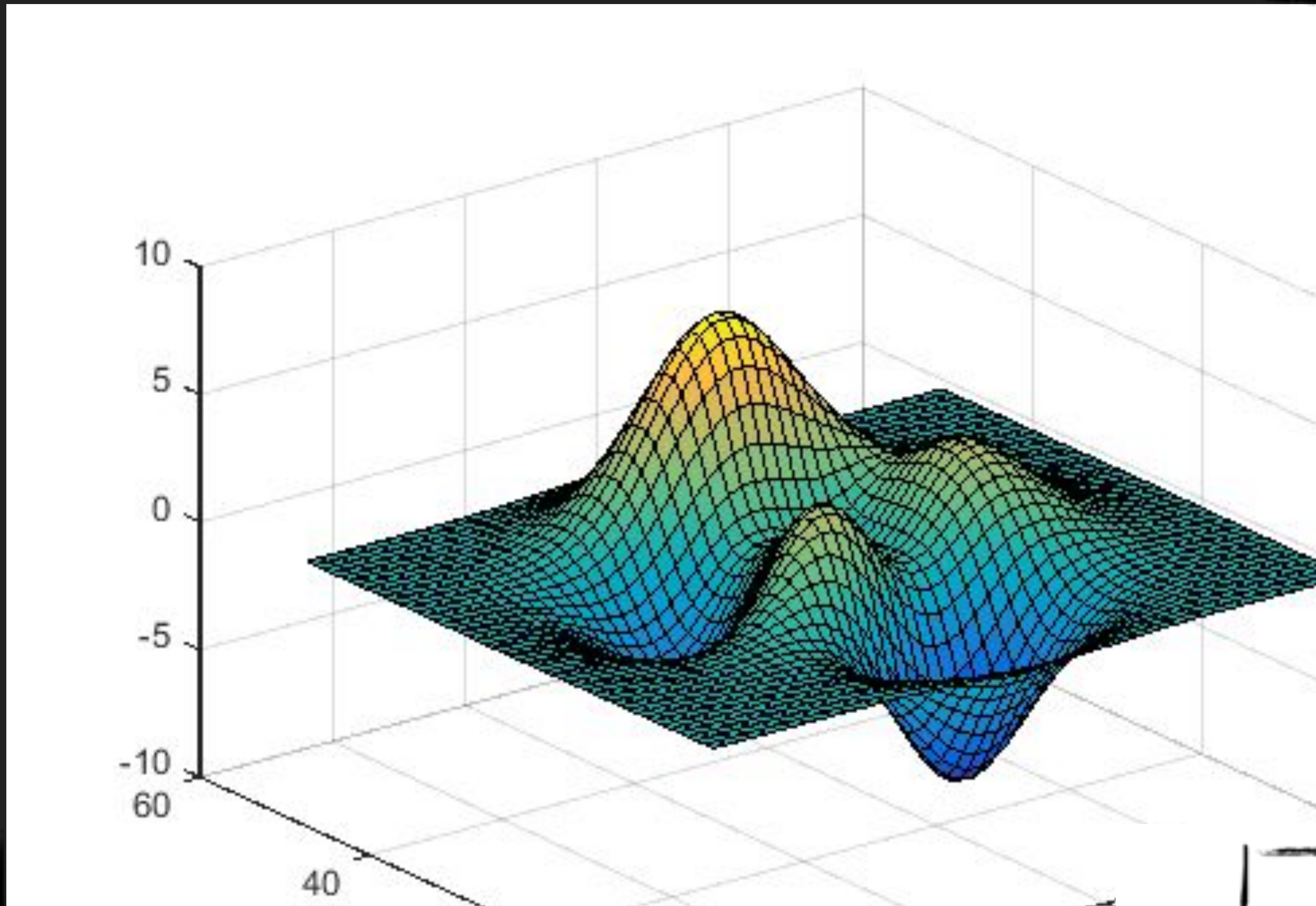
УРОК ПО АЛГЕБРЕ, 8 КЛАСС

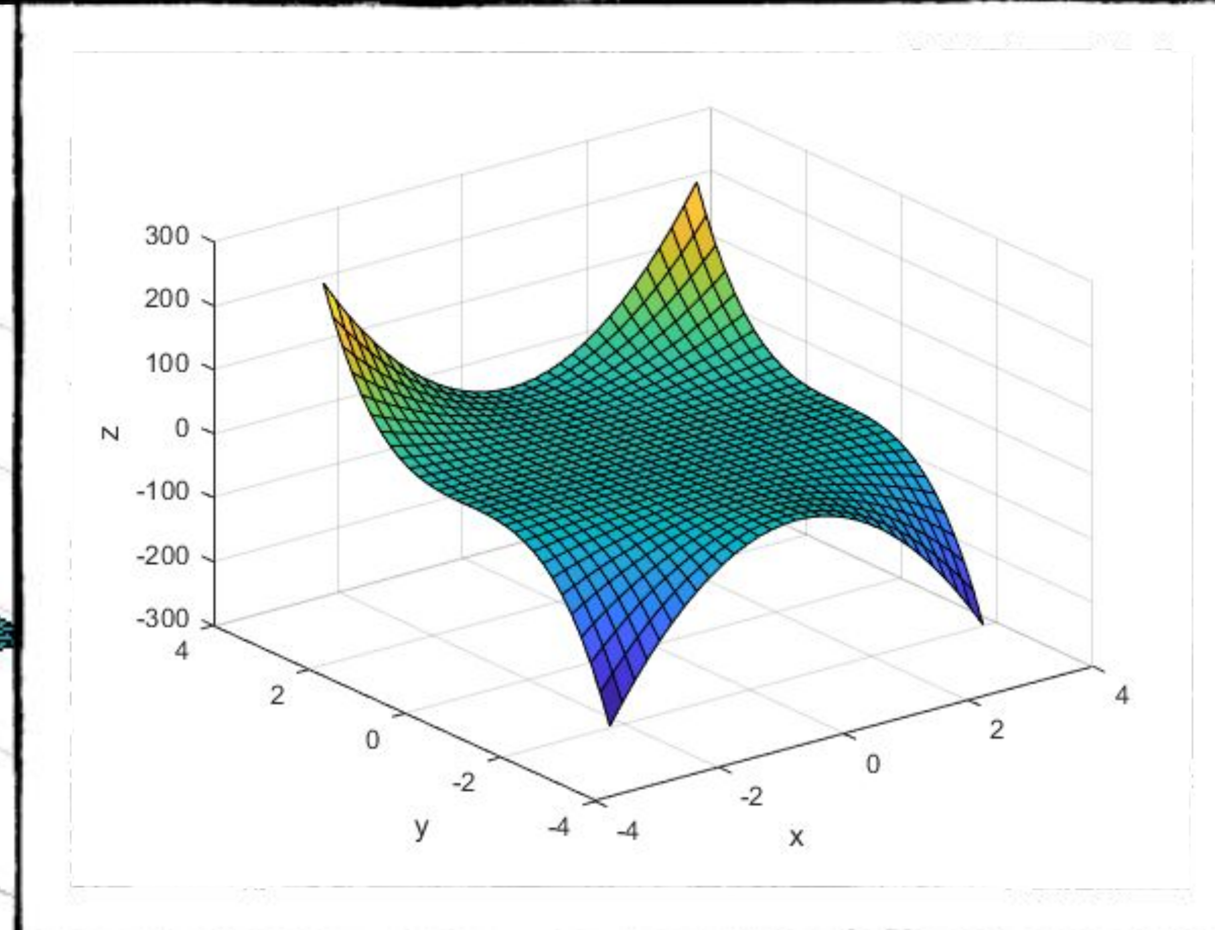
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

«В МАТЕМАТИКЕ ЕСТЬ СВОЯ КРАСОТА, КАК В ПОЭЗИИ И В ЖИВОПИСИ»

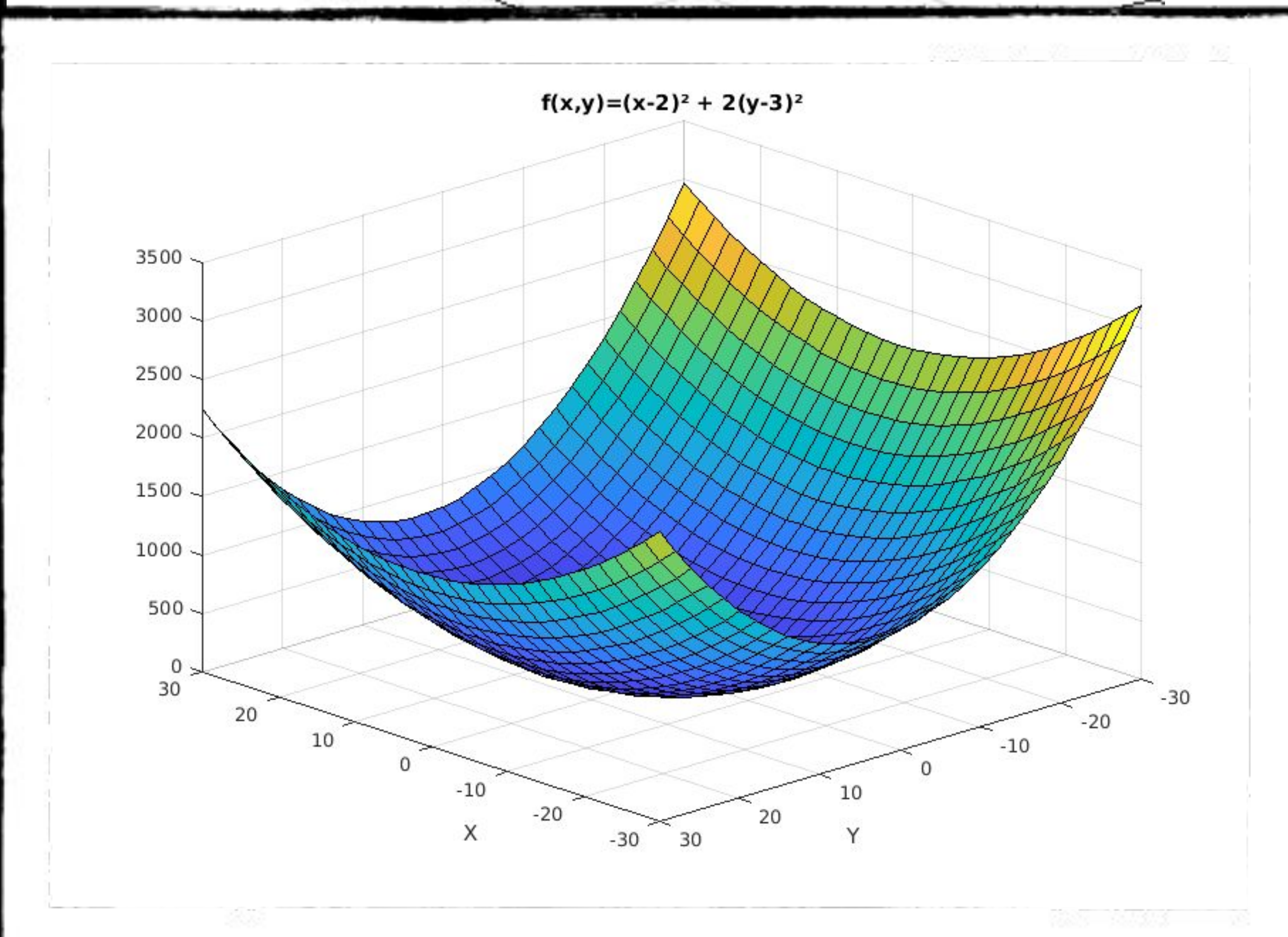
Н.Е.ЖУКОВСКИЙ



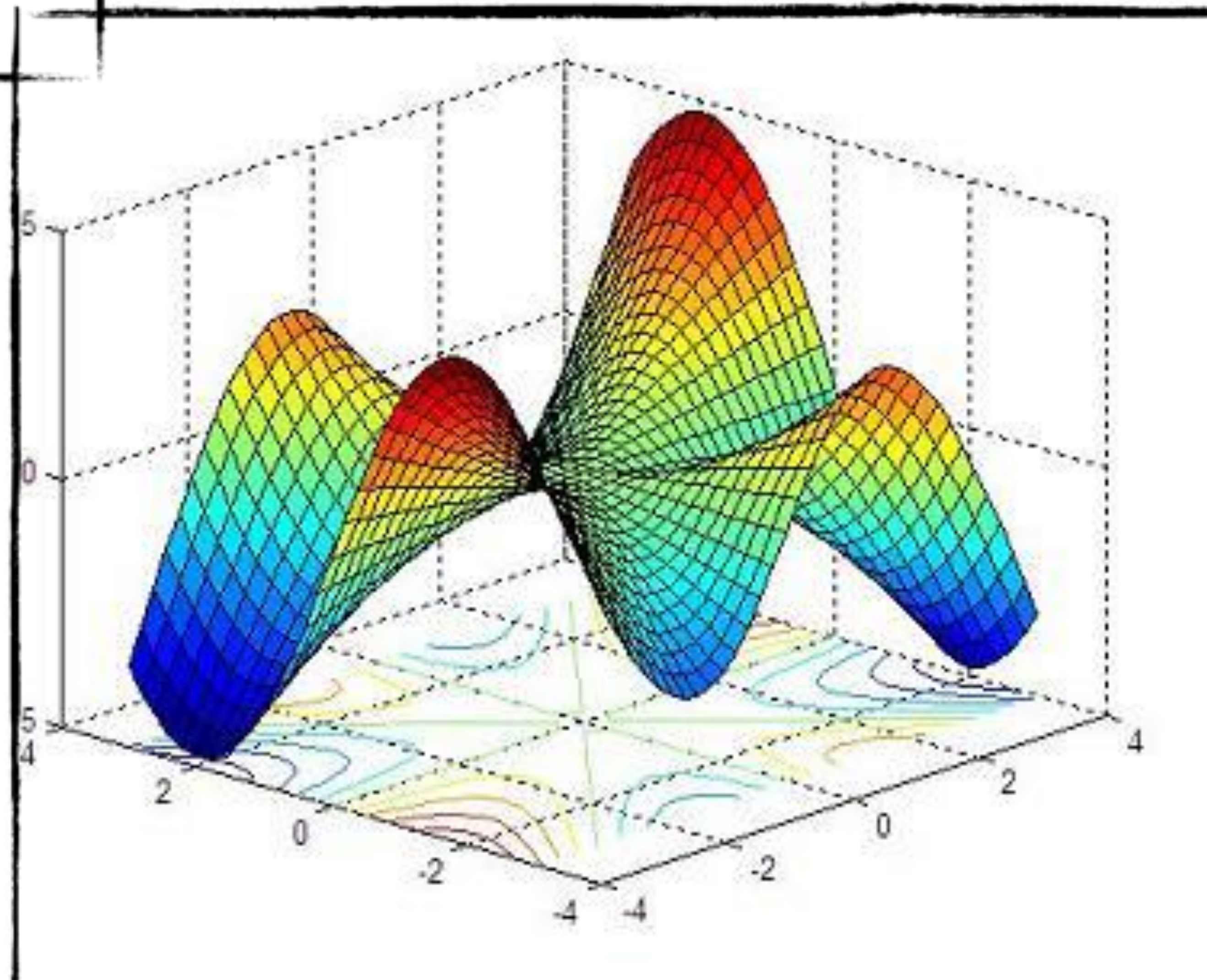
10
5
0
-5
-10
60
40



300
200
100
0
-100
-200
-300
z
4
2
0
-2
-4
y
-4
-2
0
2
4
x



$f(x,y)=(x-2)^2 + 2(y-3)^2$
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
30
20
10
0
-10
-20
-30
X
30
20
10
0
-10
-20
-30
Y



5
0
5
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

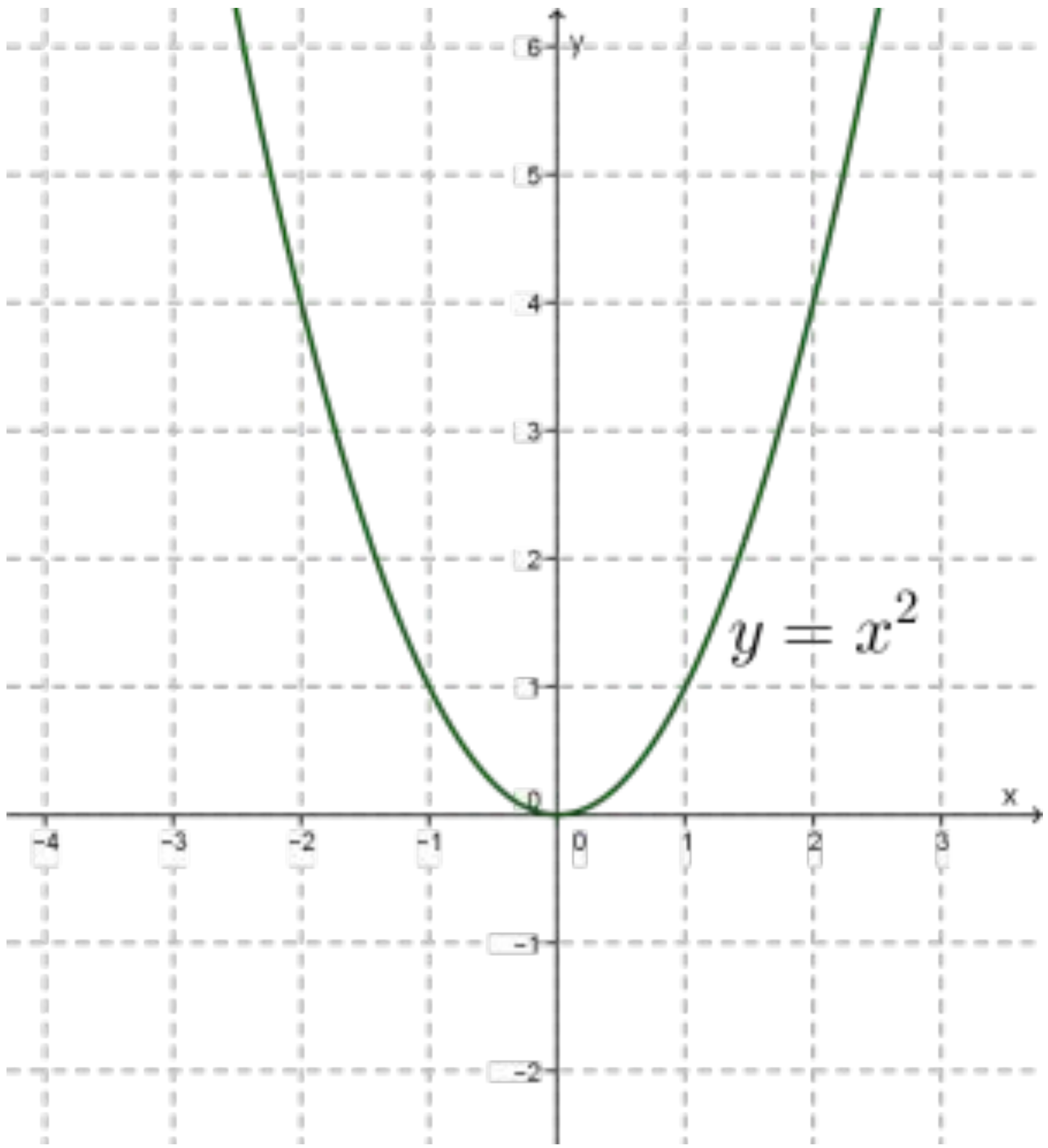


Рис.1

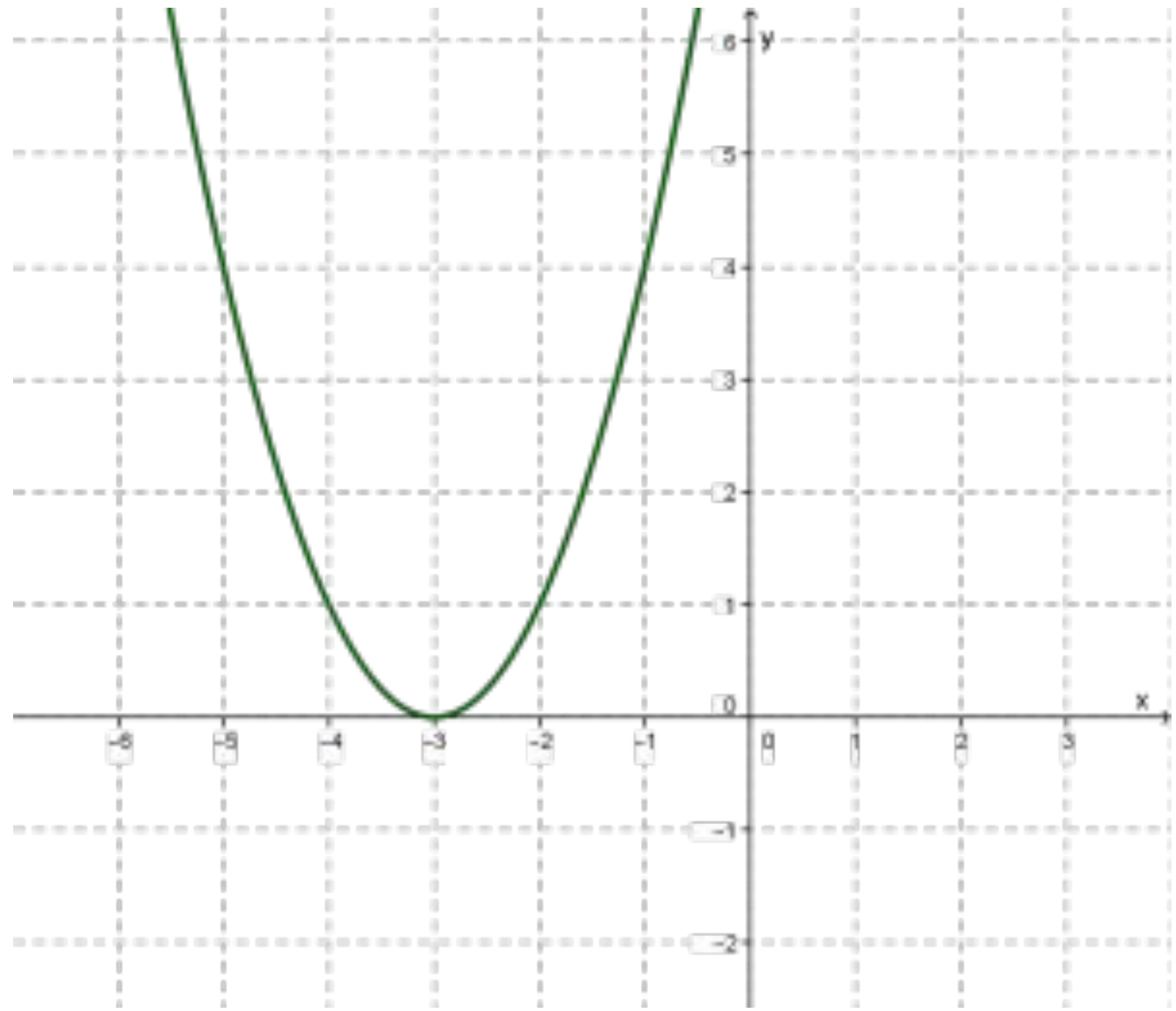
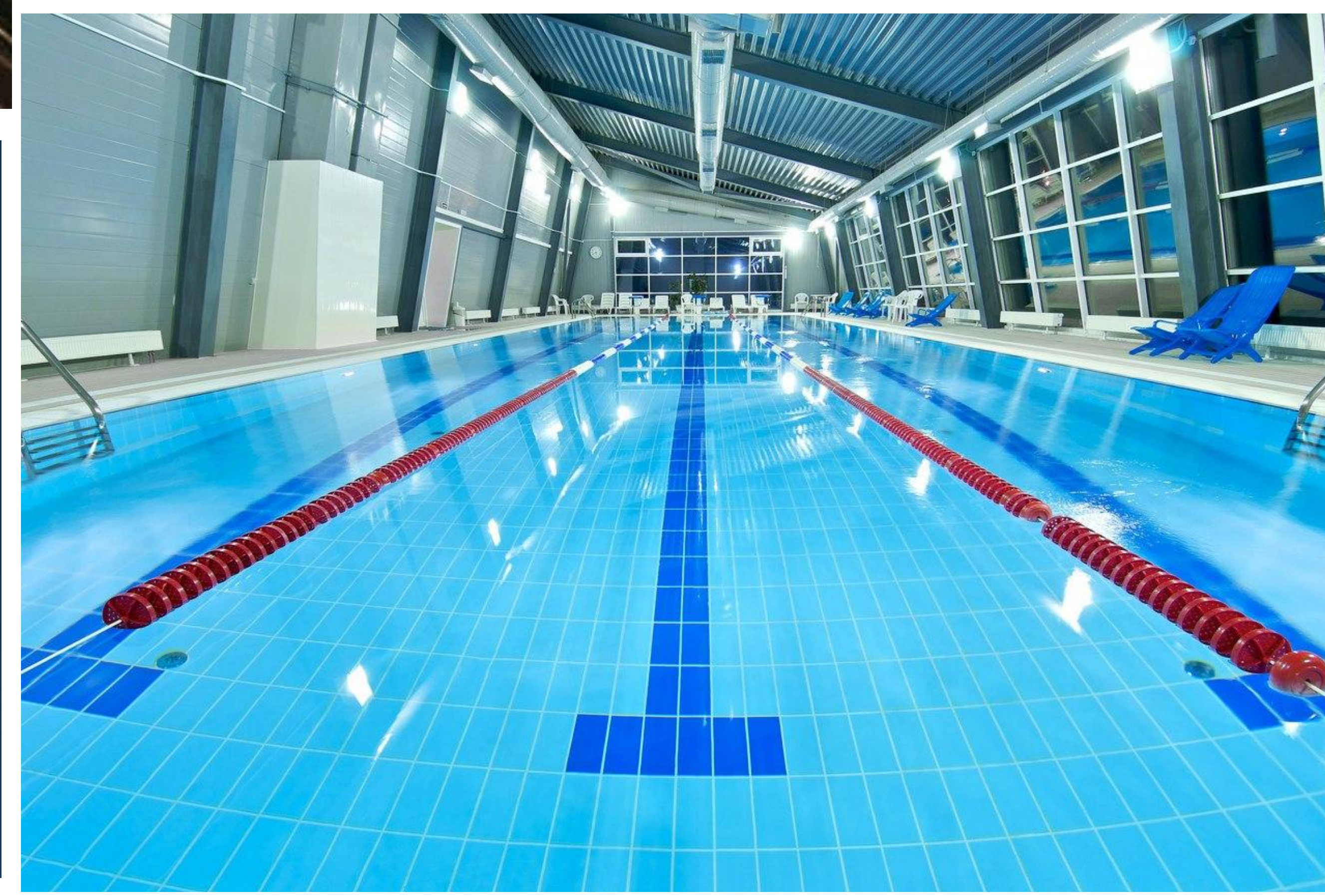


Рис.2



ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФИКОМ ФУНКЦИИ?

Графиком функции f называется множество всех точек (x,y) координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции.

7

1 ГИПЕРБОЛА

2 ПАРАБОЛА

4 ОРДИНАТА

5 ФОРМУЛА

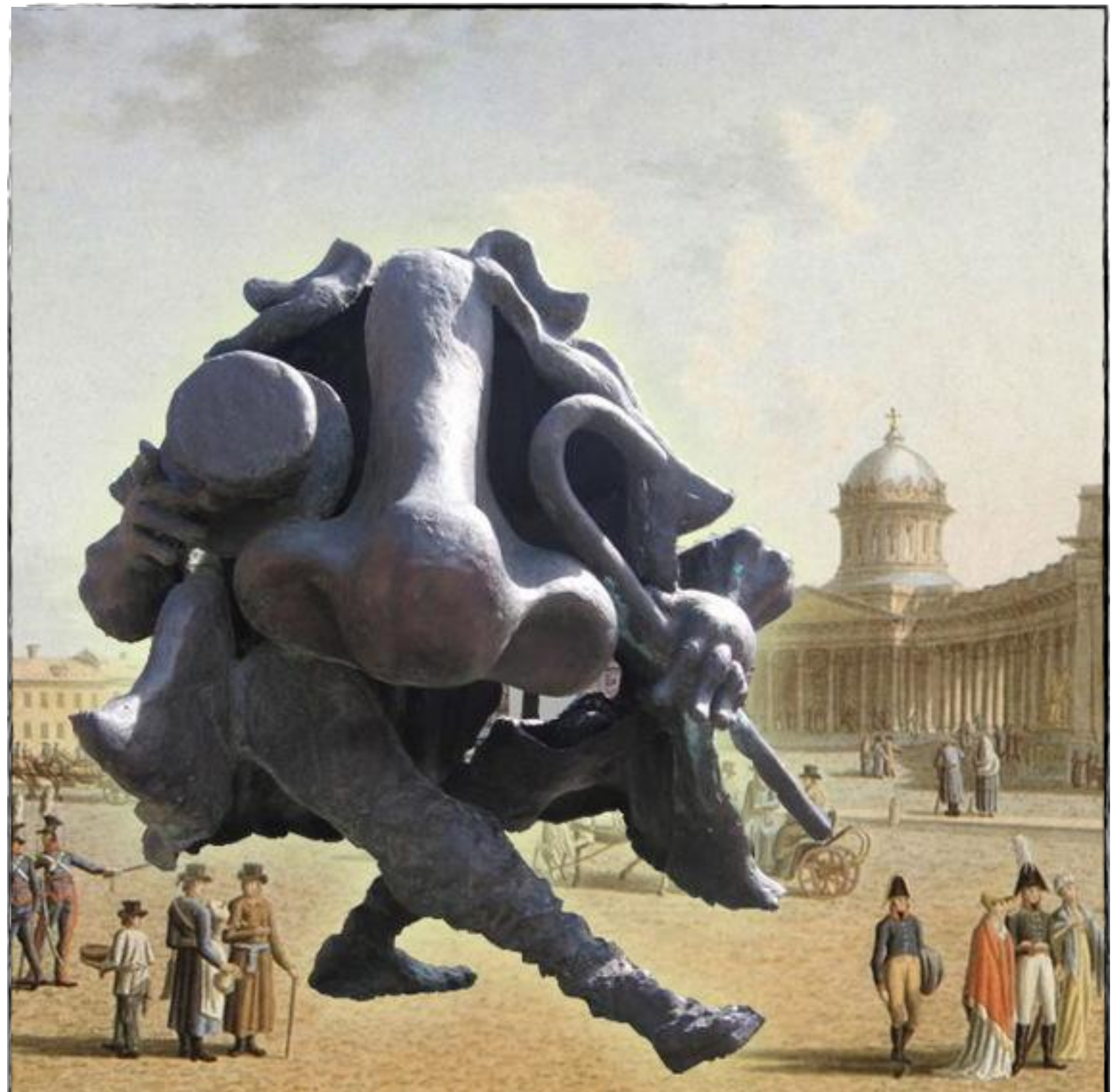
3 АБЦИССА

6 ФУНКЦИЯ

ВАШ ГРАФИК

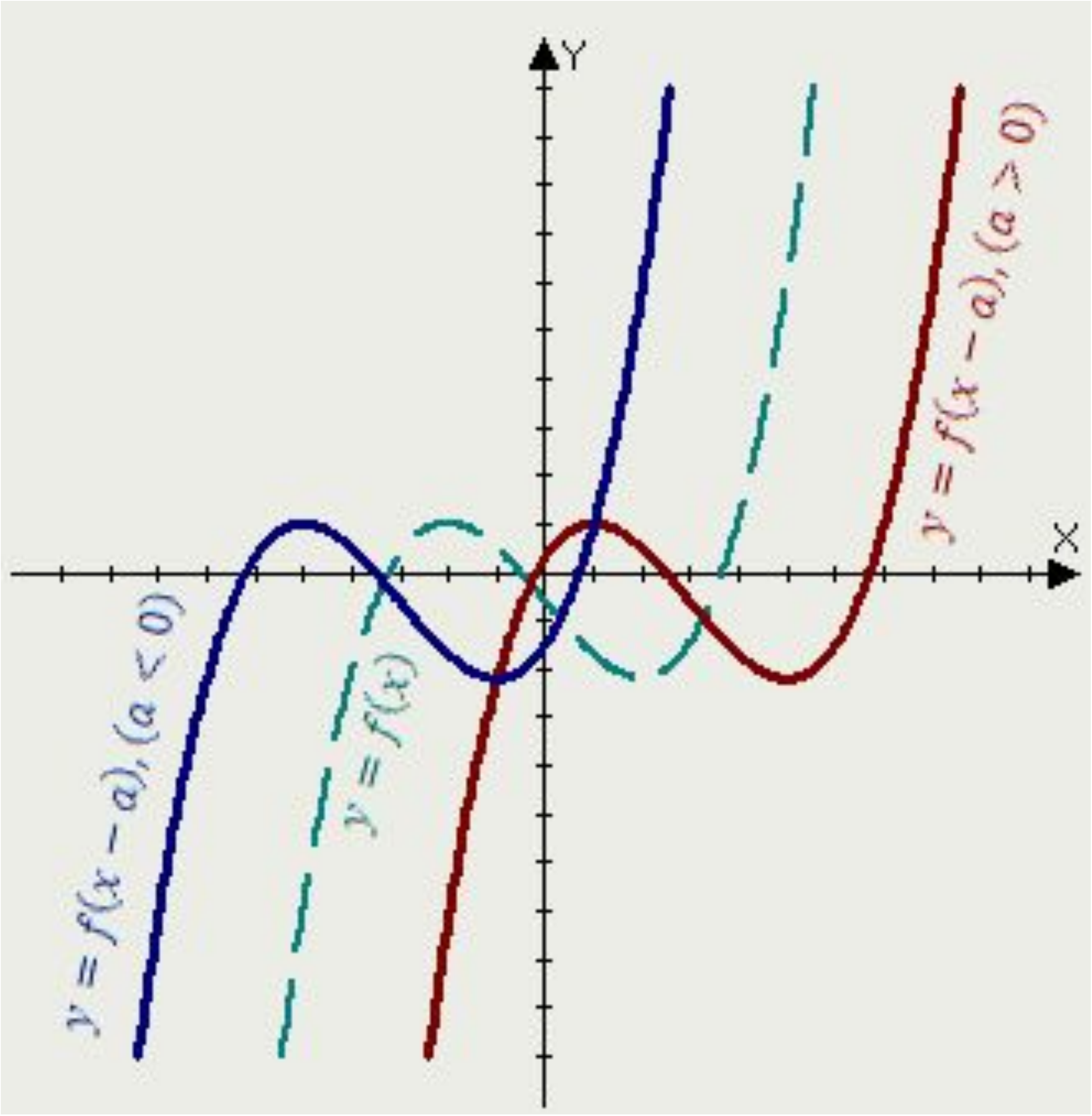
Я предлагаю Вам начертить график изменения вашего интереса, уровня познания и личной активности в течение этого урока!

ТЕМА УРОКА



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ ОХ

f(x) —> f(x-a)



ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Построить графики функций:

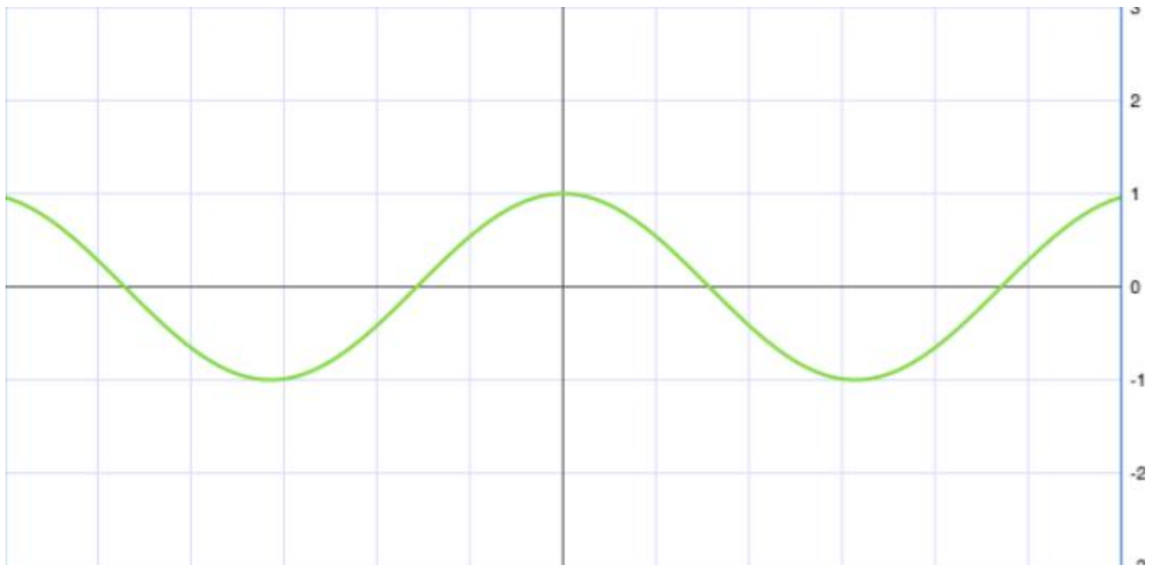
y=cos(x+pi/3)

y=cos(x-pi/3)

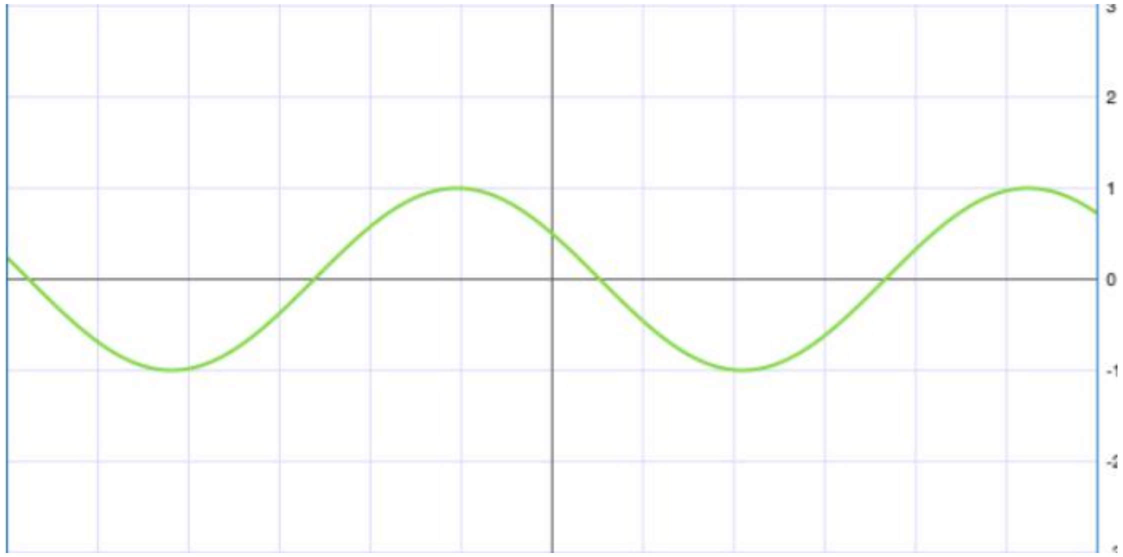
Для начала построим график y=cos(x).

Далее воспользуемся параллельным переносом и сдвинем график на pi/3 влево/вправо.

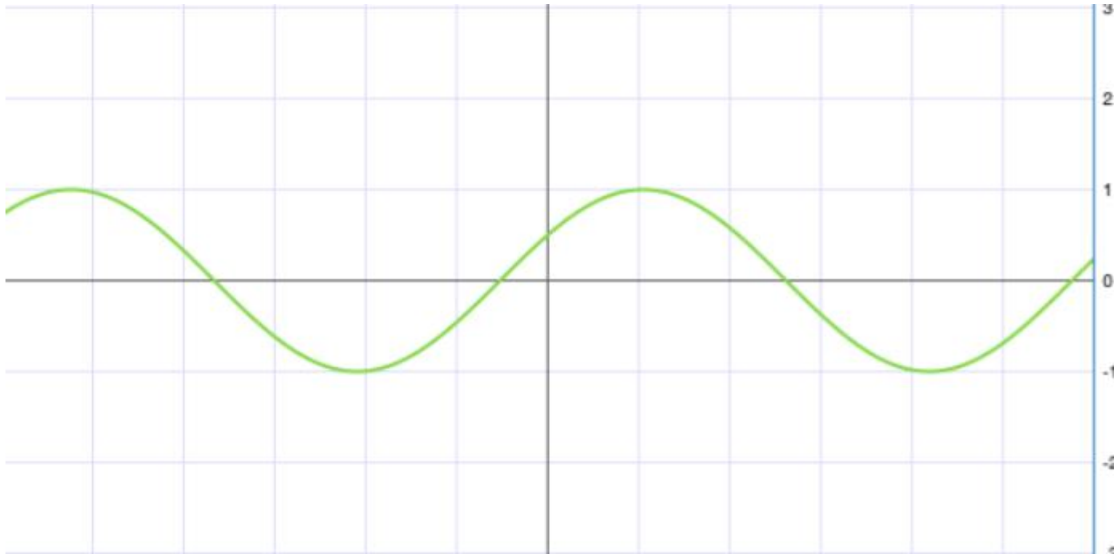
y=cos(x)



y=cos(x+pi/3)

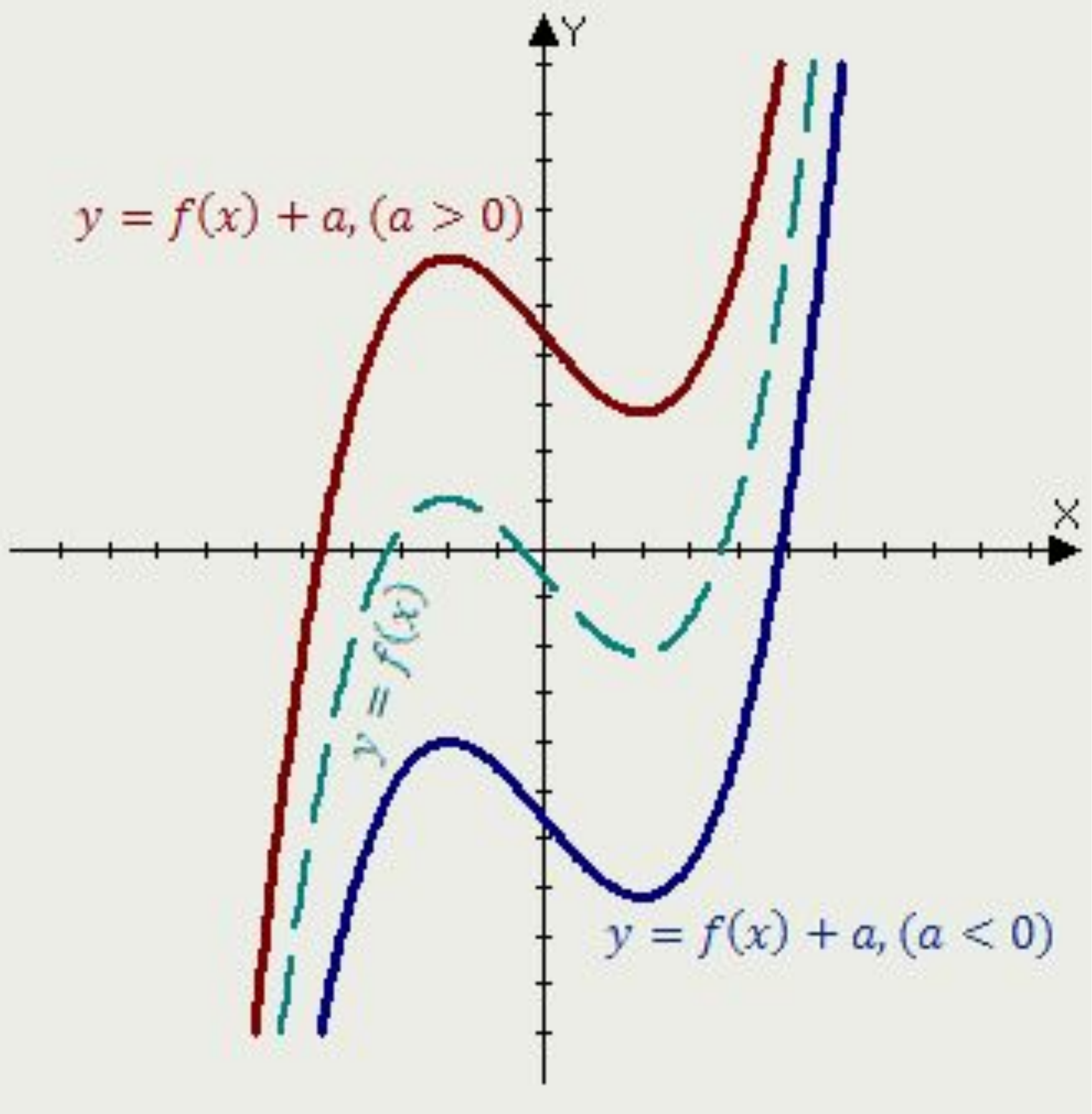


y=cos(x-pi/3)



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОУ

f(x) —> f(x)+a



ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Определите, какой формулой задана функция:

y=(x-2)^3

y=x^3+1

y=x^3

ЗАДАНИЯ В ПАРАХ ПО УЧЕБНИКУ

Выполнить номера 19.1, 19.3, 19.5, 19.11.

§ 19. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x + l)$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Постройте в одной системе координат графики функций:

19.1. а) $y = x^2$ и $y = (x + 1)^2$; в) $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$;
б) $y = x^2$ и $y = (x - 3)^2$; г) $y = x^2$ и $y = (x + 4)^2$.

19.2. а) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x - 2}$; в) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x + 3}$;
б) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x + 2}$; г) $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x - 5}$.

19.3. а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x + 2}$; в) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x + 4}$;
б) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x - 1}$; г) $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x - 2}$.

19.4. а) $y = |x|$ и $y = |x - 3|$; в) $y = |x|$ и $y = |x + 1|$;
б) $y = |x|$ и $y = |x + 5|$; г) $y = |x|$ и $y = |x - 4|$.

19.5. График какой функции получится, если:
а) параболу $y = 3x^2$ перенести на 4 единицы влево вдоль оси Ox;
б) гиперболу $y = -\frac{7}{x}$ перенести на 3 единицы вправо вдоль оси Ox;
в) график функции $y = \sqrt{x}$ перенести на 2 единицы вправо вдоль оси Ox;
г) график функции $y = |x|$ перенести на 1 единицу влево вдоль оси Ox?

19.6. График какой функции получится, если:
а) параболу $y = -\frac{1}{3}x^2$ перенести на 0,5 единицы вправо вдоль оси Ox;
б) гиперболу $y = \frac{2}{x}$ перенести на 2 единицы влево вдоль оси Ox;
в) график функции $y = -|x|$ перенести на 4 единицы вправо вдоль оси Ox;
г) график функции $y = -\sqrt{x}$ перенести на 1,5 единицы влево вдоль оси Ox?

Постройте график функции и укажите, где она убывает, где возрастает:

19.7. а) $y = 2(x + 1)^2$; в) $y = 3(x - 5)^2$;
б) $y = -(x - 3)^2$; г) $y = -4(x + 2)^2$.

19.8. а) $y = \frac{2}{x + 5}$; б) $y = -\frac{1}{x - 2}$; в) $y = \frac{3}{x - 1}$; г) $y = -\frac{4}{x + 4}$.

19.9. а) $y = \sqrt{x - 3}$; б) $y = -\sqrt{x + 4}$; в) $y = \sqrt{x - 1}$; г) $y = -\sqrt{x - 2}$.

19.10. а) $y = |x + 3|$; в) $y = |x - 2|$;
б) $y = -|x - 4|$; г) $y = -|x + 1|$.

○**19.11.** Напишите уравнение параболы $y = a(x + l)^2$, изображенной:
а) на рис. 24; в) на рис. 26;
б) на рис. 25; г) на рис. 27.

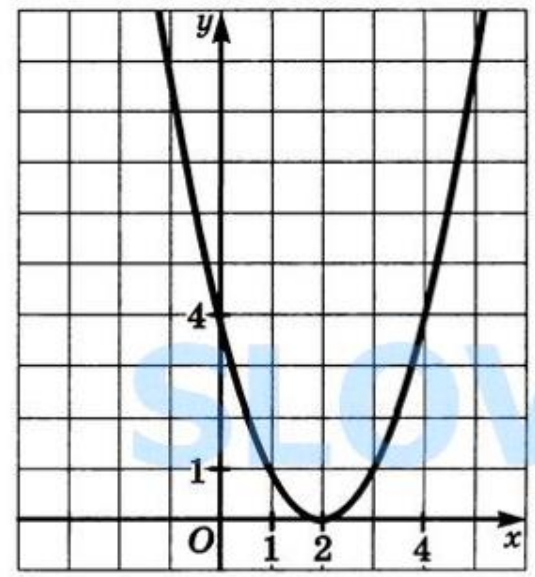


Рис. 24

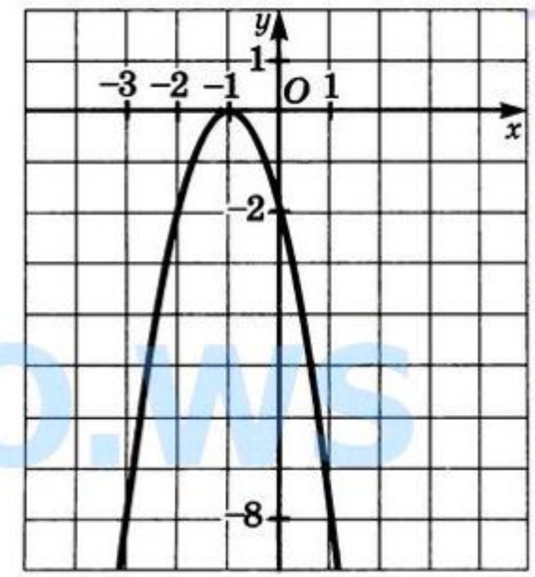


Рис. 25

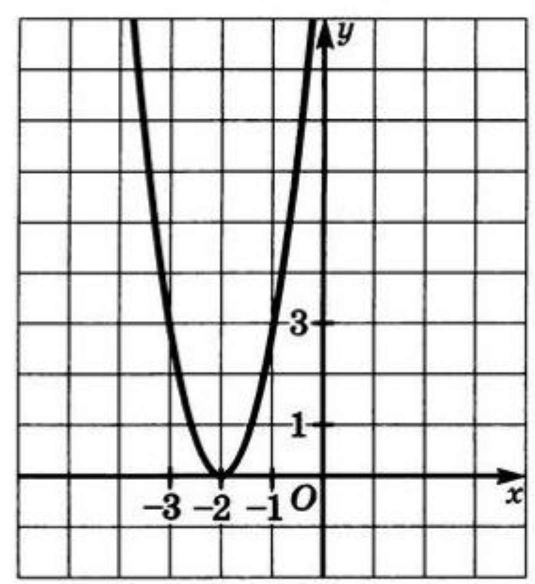


Рис. 26

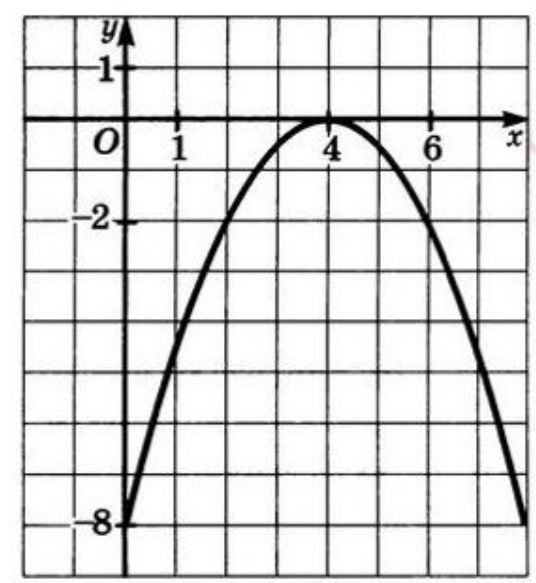


Рис. 27

ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ В ГРУППАХ

Придумайте графики функций, с помощью которых можно нарисовать рисунок!

РЕФЛЕКСИЯ

А теперь посмотрите на свои графики, как изменились их показатели?

- интерес к уроку;

- уровень познания,

- личная активность.

Назовите 3 момента, которые у вас получились хорошо и 1 действие, которое улучшит вашу работу на следующем уроке!,

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

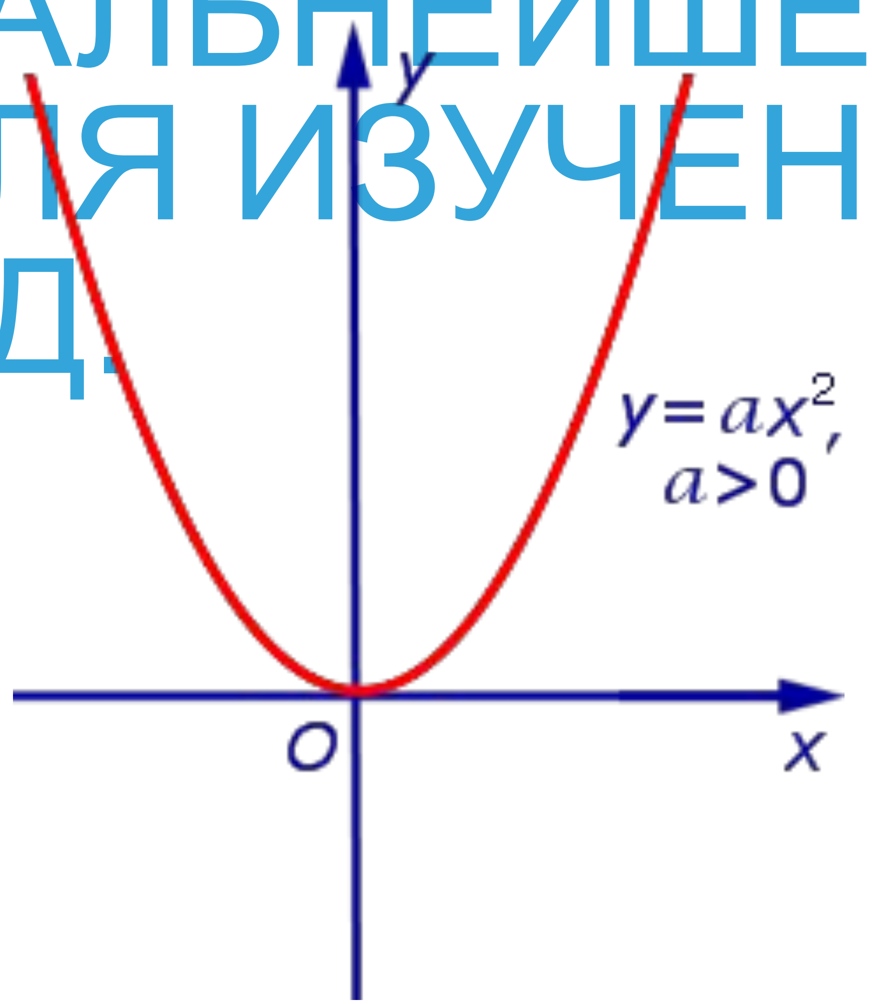
Выполнить номера 19.2, 19.4, 19.6, 19.12; прочитать и изучить параграфы 19,20.

ИЛЛЮСТРАЦИЯ КОНКРЕТНЫХ ПРИМЕРОВ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ И ПЕРЕНОСА

УЧЕБНИК 1

МОРДКОВИЧ 8 КЛ

ПОНЯТИЕ ВВОДИТСЯ ВО ВРЕМЯ ИЗУЧЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ. В ДАЛЬНЕЙШЕМ ПРИМЕНЯЕТСЯ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ГИПЕРБОЛЫ И Т.Д.



Следовательно,

$$f(x-3) - f(x+2) = \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+2} =$$

$$= \frac{2(x+2) - 2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

С другой стороны,

$$2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2) = 2{,}5 \cdot \frac{2}{x-3} \cdot \frac{2}{x+2} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Итак,

$$f(x-3) - f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}$$

и

$$2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Значит, $f(x-3) - f(x+2) = 2{,}5f(x-3) \cdot f(x+2)$, что и требовалось доказать.

§ 19. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x + l)$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x + 3)^2$. Графиком первой функции является парабола (пунктирная линия на рис. 64). Для функции $y = (x + 3)^2$ составим таблицу значений:

x	−3	−2	−4	−5	−1	−6	0
y	0	1	1	4	4	9	9

обратите внимание

Построив точки (−3; 0), (−2; 1), (−4; 1), (−5; 4), (−1; 4), (−6; 9), (0; 9) на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (цветная линия на рис. 64). Обратите внимание — это точно такая же парабола,

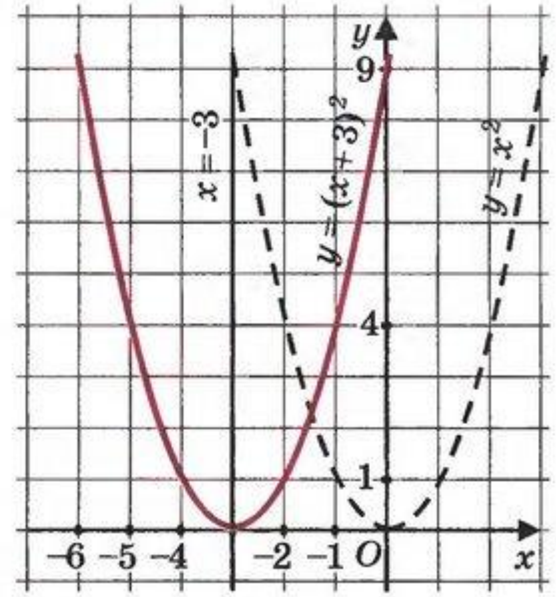


Рис. 64

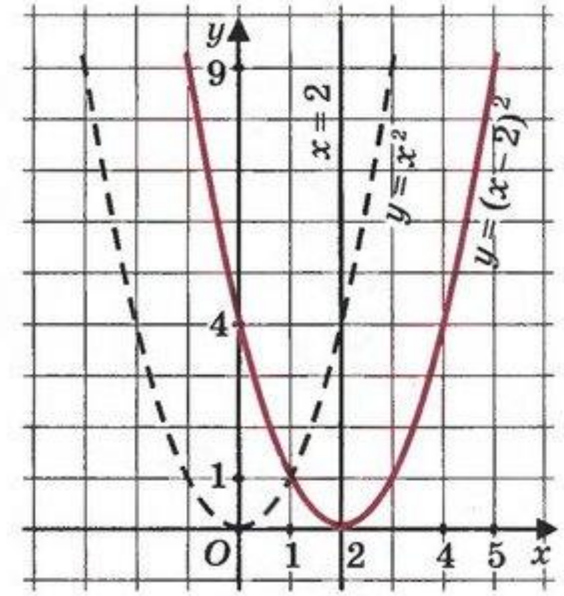


Рис. 65

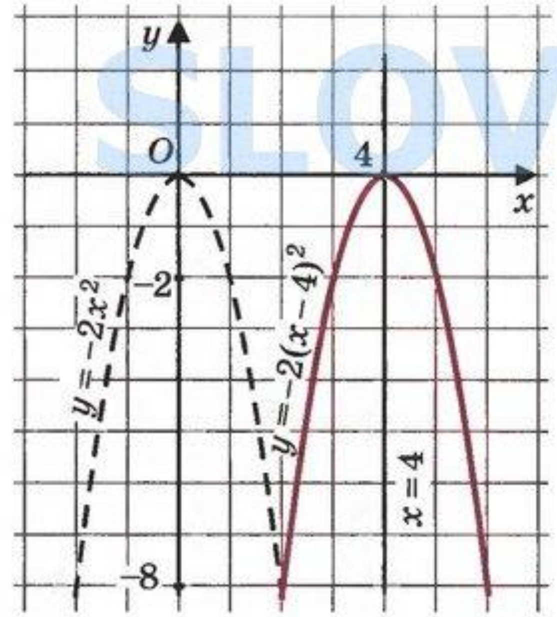


Рис. 66

как и $y = x^2$, но только сдвинутая вдоль оси x на 3 единицы масштаба *влево*. Вершина параболы теперь находится в точке (−3; 0), а не в точке (0; 0), как для параболы $y = x^2$. Осью симметрии служит прямая $x = -3$, а не $x = 0$, как это было в случае параболы $y = x^2$.

Если же построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$, то заметим (рис. 65), что второй график получается из первого сдвигом (или, как еще говорят, *параллельным переносом*) вдоль оси x на 2 единицы масштаба *вправо*.

Точно так же обстоит дело и с графиками других функций. Например, график функции $y = -2(x - 4)^2$ — парабола, которая получается из параболы $y = -2x^2$ сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси x на 4 единицы масштаба *вправо* (рис. 66).

запомните

Вообще, справедливо следующее утверждение: ***чтобы построить график функции $y = f(x + l)$, где l — заданное положительное число, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси x на l единиц масштаба влево;***
чтобы построить график функции $y = f(x - l)$, где l — заданное положительное число, нужно сдвинуть график функции $y = f(x)$ вдоль оси x на l единиц масштаба вправо.

Пример 1. Построить график функции $y = -\frac{3}{x+5}$.

Решение. Построив гиперболу $y = -\frac{3}{x}$ и сдвинув ее вдоль оси x влево на 5 единиц, получим требуемый график (рис. 67). Это — гипербола с асимптотами $x = -5$ и $y = 0$.

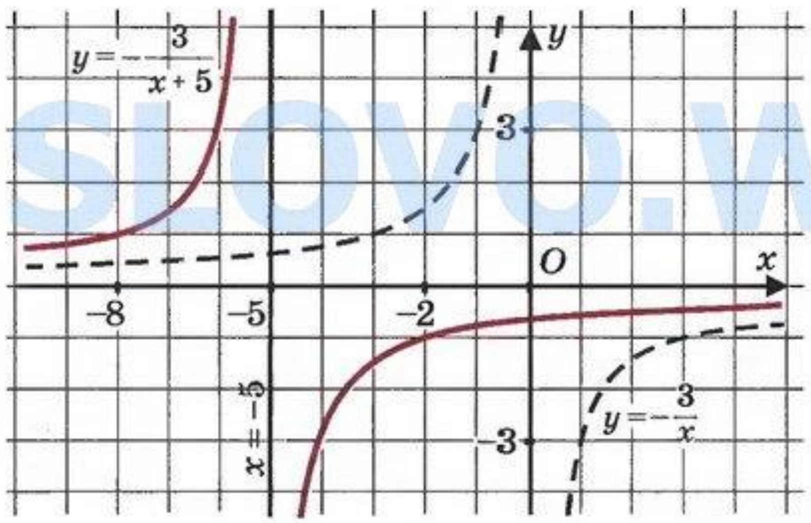


Рис. 67

Пример 2. Построить график функции $y = |x + 2|$.

Решение. График этой функции получается из графика функции $y = |x|$ (см. рис. 28 на с. 80) сдвигом последнего на две единицы масштаба влево (рис. 68).

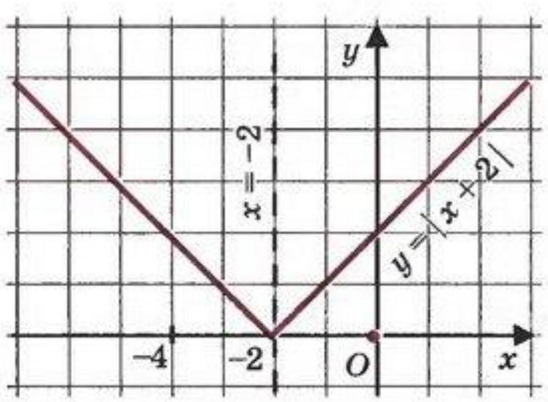


Рис. 68

Замечание. По сути дела, в этом параграфе речь шла о построении графика функции $y = f(x + l)$, где l — любое число, как положительное, так и отрицательное. Вы, наверное, заметили, что, думая, на сколько единиц масштаба надо сдвинуть вдоль оси x график функции $y = f(x)$, мы не обращали внимания на знак числа l; график сдвигался в действительности вправо или влево на $|l|$ единиц. А направление сдвига определялось знаком числа l: при $l > 0$ график сдвигался влево, при $l < 0$ — вправо.

§ 20. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x) + m$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ (пунктирная линия на рис. 69) и $y = x^2 + 4$. Составим таблицу значений функции $y = x^2 + 4$:

x	0	1	−1	2	−2
y	4	5	5	8	8

обратите внимание

Построив точки (0; 4), (1; 5), (−1; 5), (2; 8), (−2; 8) на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (цветная линия на рис. 69). Обратите внимание — это точно такая же парабола, как и $y = x^2$, но только сдвинутая вдоль оси y на 4 единицы масштаба *вверх*. Вершина параболы теперь находится в точке (0; 4), а не в точке (0; 0), как для параболы $y = x^2$. Осью симметрии по-прежнему служит прямая $x = 0$, как это было и в случае параболы $y = x^2$.

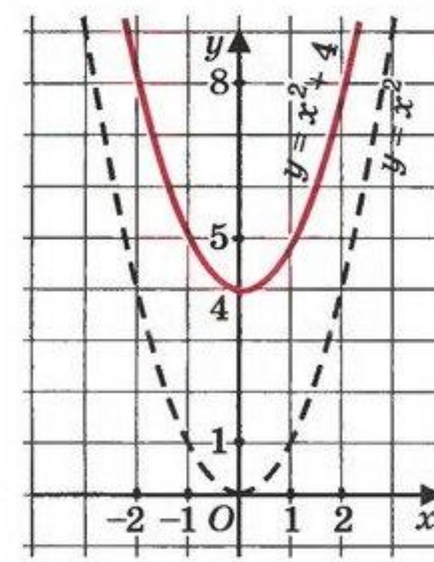
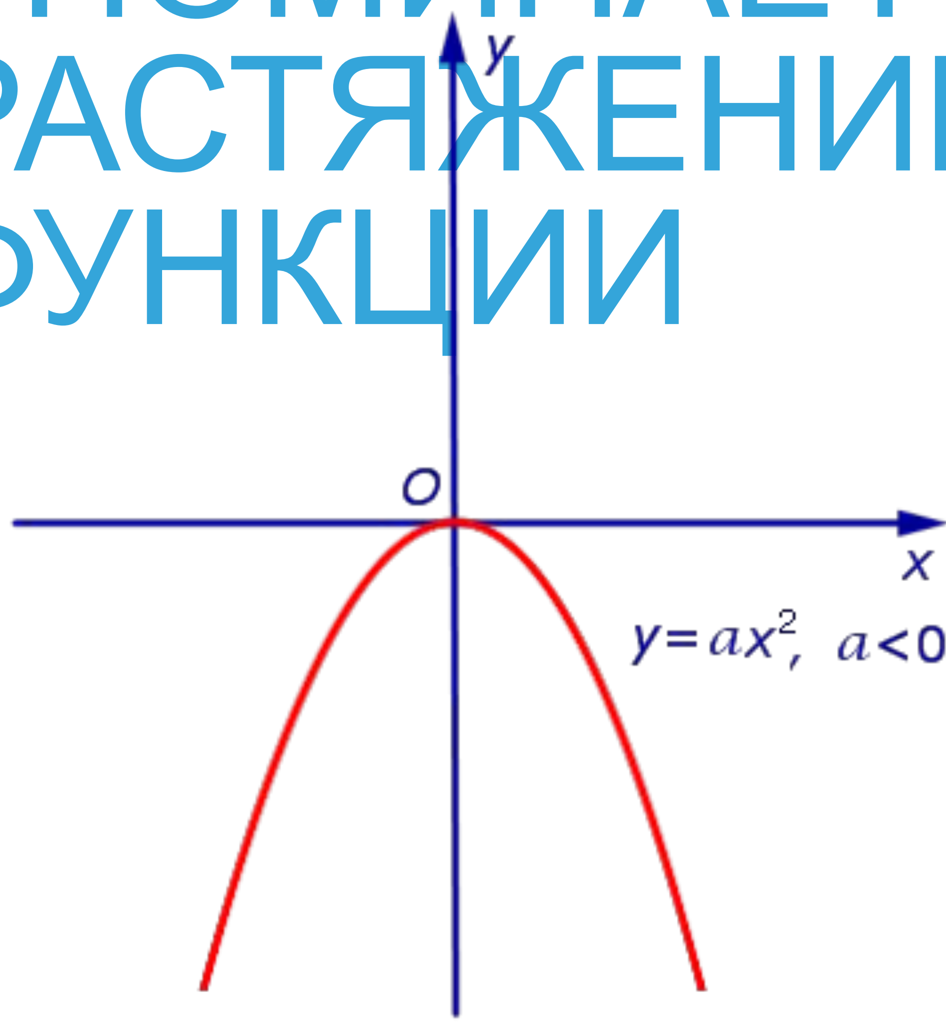


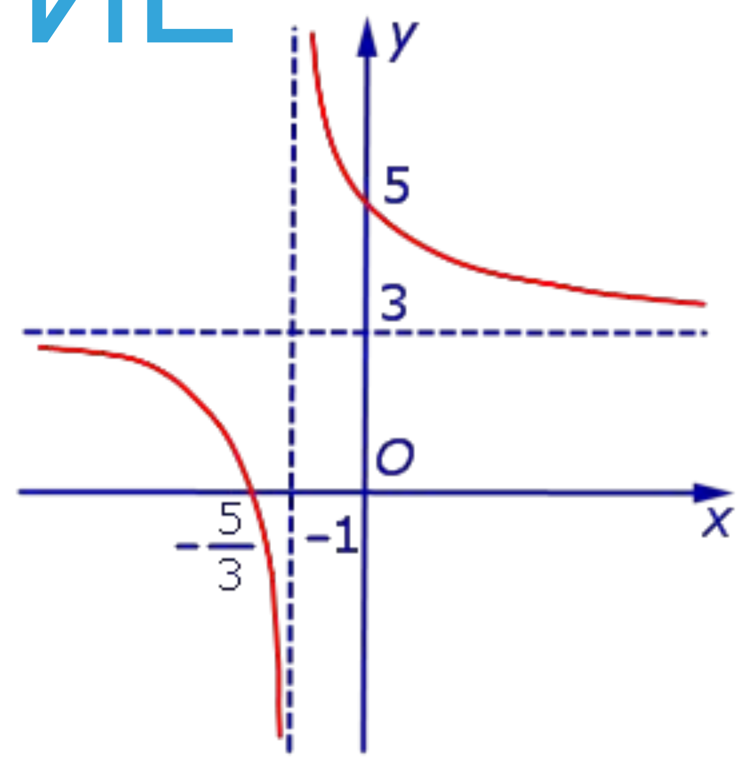
Рис. 69

УЧЕБНИК 2

НИКОЛЬСКИЙ 8 КЛ.

ДАННОЕ ПОНЯТИЕ ТАКЖЕ ВВОДИТСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ, НО УПОМИНАЕТСЯ И РАСТЯЖЕНИЕ/СЖАТИЕ ФУНКЦИИ





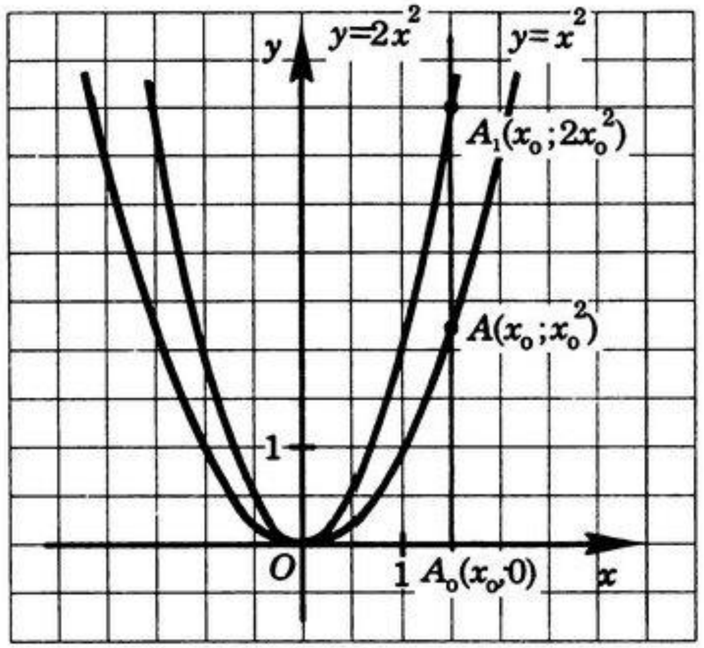


Рис. 57

6. *Функция* (1) *непрерывная, поэтому ее график — непрерывная линия, т. е. он может быть изображен одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги.*

Рассмотрим две функции

$$y=x^2 \text{ и } y=2x^2.$$

Обе они определены для любых действительных значений x.

Зададим декартову систему координат xOy и число x_0. Точка $A(x_0;\ x_0^2)$ принадлежит графику функции $y=x^2$, а точка $A_1(x_0;\ 2x_0^2)$, имеющая ту же абсциссу, принадлежит графику функции $y=2x^2$ (рис. 57). Ординаты точек A_1 и A находятся в отношении $2:1$, т. е. отрезок A_0A_1 получается *растяжением* отрезка A_0A в 2 раза. Это рассуждение можно провести для любых точек графиков функций $y=x^2$ и $y=2x^2$, имеющих одну и ту же абсциссу x. Поэтому говорят, что график функции $y=2x^2$ получается из графика функции $y=x^2$ *растяжением* последнего в 2 раза вдоль оси Oy.

Рассуждая аналогично, можно показать, что график функции $y=ax^2$, если $a>1$, получается из графика функции $y=x^2$ *растяжением* последнего в a раз вдоль оси y; если же $0<a<1$, то *сжатием* последнего в $\frac{1}{a}$ раз.

Мы видим, что график функции $y=ax^2$ $(a>0)$ похож на график функции $y=x^2$, его также называют **параболой**.

На рисунке 58, *а* изображены в одной и той же декартовой системе координат xOy параболы $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=3x^2$, а на рисунке 57, *б* — параболы $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{3}x^2$.

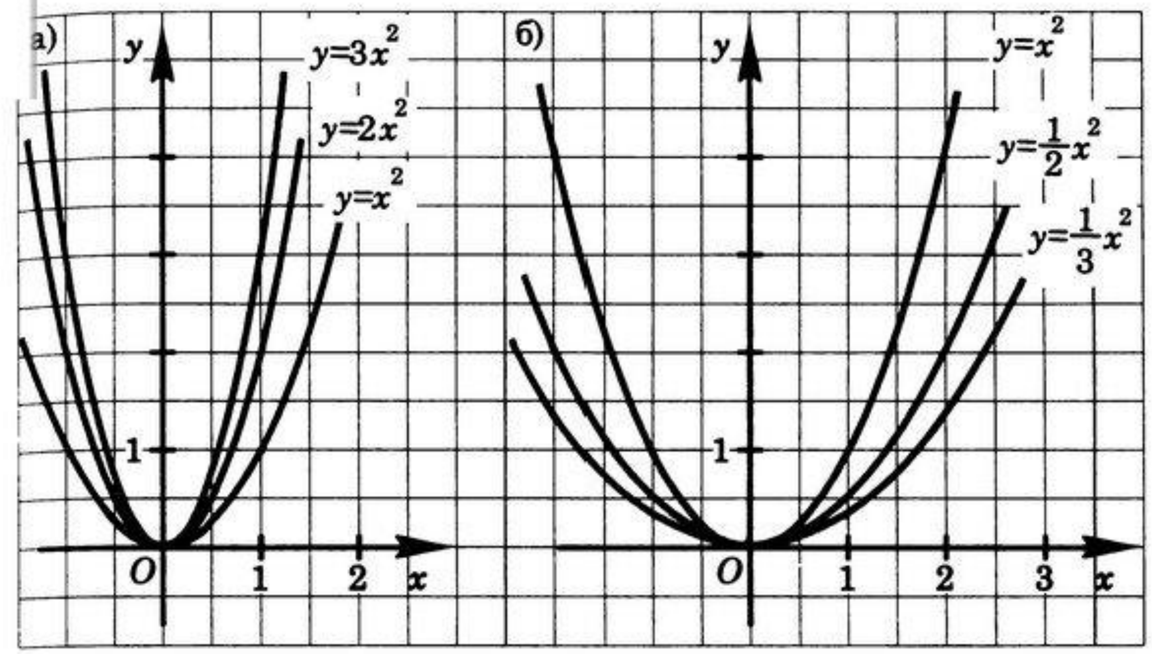


Рис. 58

553⁰. Как называют график функции $y=ax^2$ $(a>0)$?

554⁰. Как получить график функции $y=ax^2$ $(a>0)$ из графика функции $y=x^2$?

555⁰. Какими свойствами обладает функция $y=ax^2$ $(a>0)$?

556. а) Функция задана формулой $y=5x^2$. Назовите зависимую и независимую переменные. Вычислите $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$, $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$. Решение оформите в виде таблицы.

Например:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	5					

б) Функция задана формулой $y=0{,}25x^2$. Вычислите $y(-2)$, $y(-4)$, $y(10)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y(-10)$, $y\left(-\frac{1}{3}\right)$. Решение оформите в виде таблицы.

557. Функция задана формулой $y=\frac{3}{5}x^2$. Верно ли равенство:

а) $y(5)=15$; б) $y(-10)=80$;
в) $y(3)=5{,}6$; г) $y(-2)=2{,}4$?

558. а) Вычислите значения функции $y=2x^2$ для значений x от -3 до 3 через 0,5. Решение оформите в виде таблицы.

б) Вычислите значения функции $y=\frac{1}{2}x^2$ для значений x от -1 до 1 через 0,2. Решение оформите в виде таблицы.

583. а) Дана функция $y=-3x^2$. Точка $(t;\ -3)$ принадлежит графику этой функции. Определите t.

б) Дана функция $y=-0{,}2x^2$. Точка $(-0{,}2;\ t)$ принадлежит графику этой функции. Определите t.

7.3. Функция $y=a(x-x_0)^2+y_0$

Область определения функции $y=a(x-x_0)^2+y_0$ есть множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Покажем, как можно построить ее график, например, для $a=2$.

Пусть дана парабола $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ (рис. 64, *а*). Чтобы построить график функции $y=ax^2-2$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на 2 единицы вниз. График функции $y=ax^2-2$ — парабола, имеющая вершину $(0;\ -2)$ и ось $x=0$ (рис. 64, *б*).

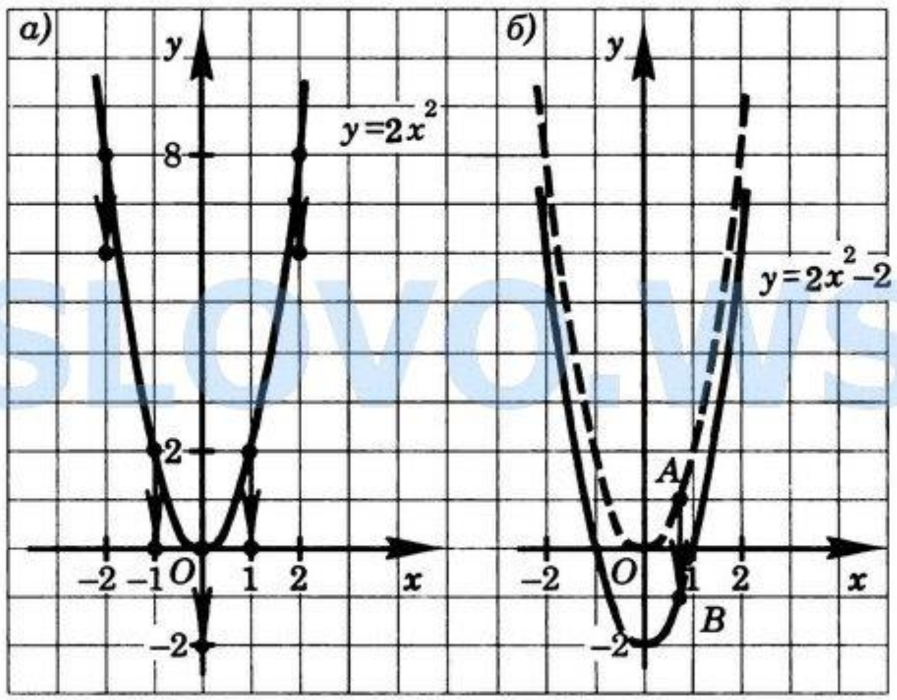


Рис. 64

В самом деле, если A — произвольная точка графика функции $y=ax^2$, а B — точка графика функции $y=ax^2-2$, имеющая ту же абсциссу, то ордината точки B на 2 единицы меньше ординаты точки A.

Например, при $x=0$ функция $y=2x^2$ принимает значение 0, а функция $y=2x^2-2$ принимает значение -2. При $x=1$ и при $x=-1$ функция $y=2x^2$ принимает значение 2, а функция $y=2x^2-2$ принимает значение 0 и т. д.

Вообще, **чтобы построить параболу $y=ax^2+y_0$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на $|y_0|$ единиц вверх, если $y_0>0$, и вниз, если $y_0<0$.**

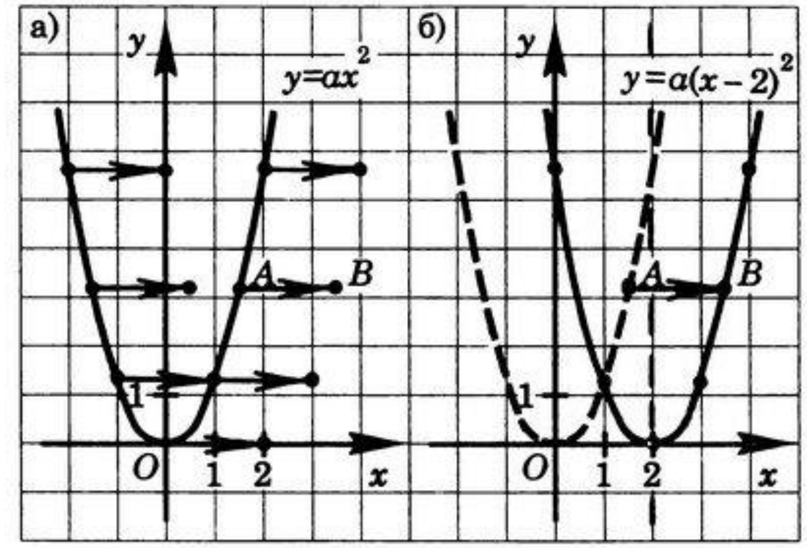


Рис. 65

Пусть дана парабола $y=ax^2$ $(a\neq 0)$ (рис. 65, *а*). Чтобы построить график функции $y=a(x-2)^2$, надо параболу $y=ax^2$ сдвинуть на 2 единицы вправо. График функции $y=a(x-2)^2$ — парабола, имеющая вершину $(2;\ 0)$ и ось $x=2$ (рис. 65, *б*).

В самом деле, если A — произвольная точка графика функции $y=ax^2$, а B — точка графика функции $y=a(x-2)^2$, имеющая ту же ординату, то абсцисса точки B на 2 единицы больше абсциссы точки A.

Например, функция $y=2x^2$ принимает значение 0 при $x=0$, а функция $y=2(x-2)^2$ при $x=2$, функция $y=2x^2$ принимает значение 2 при $x=1$ и при $x=-1$, а функция $y=2(x-2)^2$ при $x=3$ и при $x=1$ и т. д.

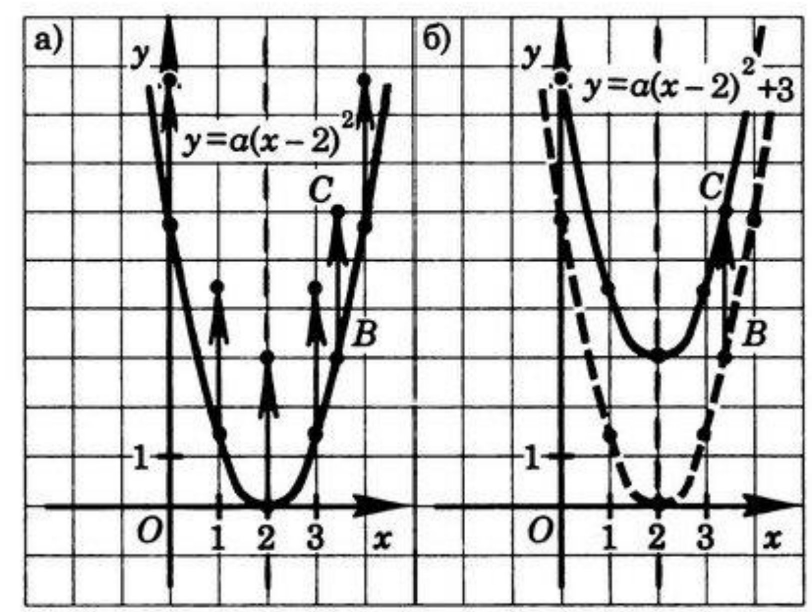


Рис. 66

ВОПРОСЫ

НА КАКИХ ЕЩЁ ПРИМЕРАХ МОЖНО ВВЕСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ?

КАК БЫ ВЫ ВВЕЛИ ПОНЯТИЕ || ПЕРЕНОСА В АЛГЕБРЕ?