



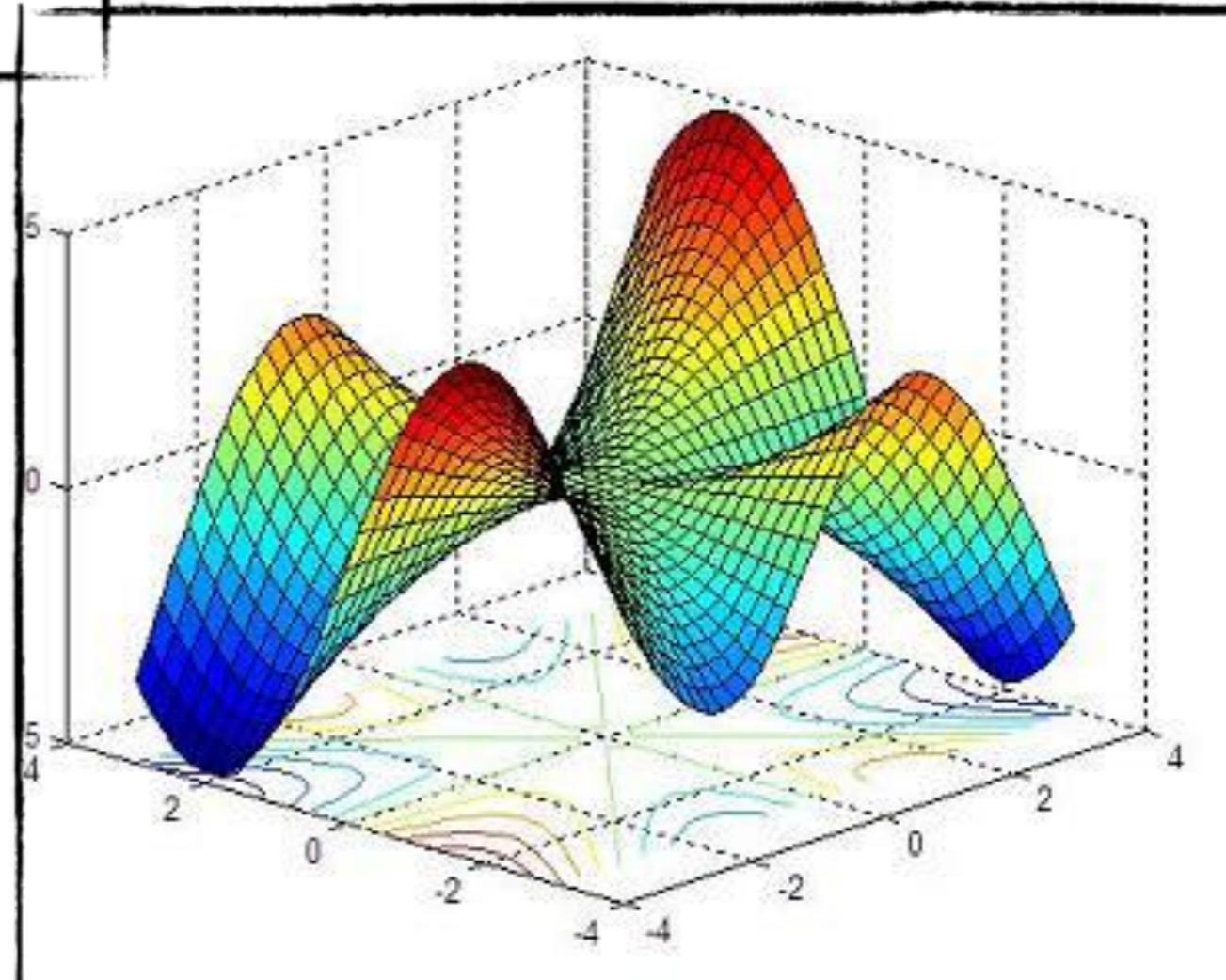
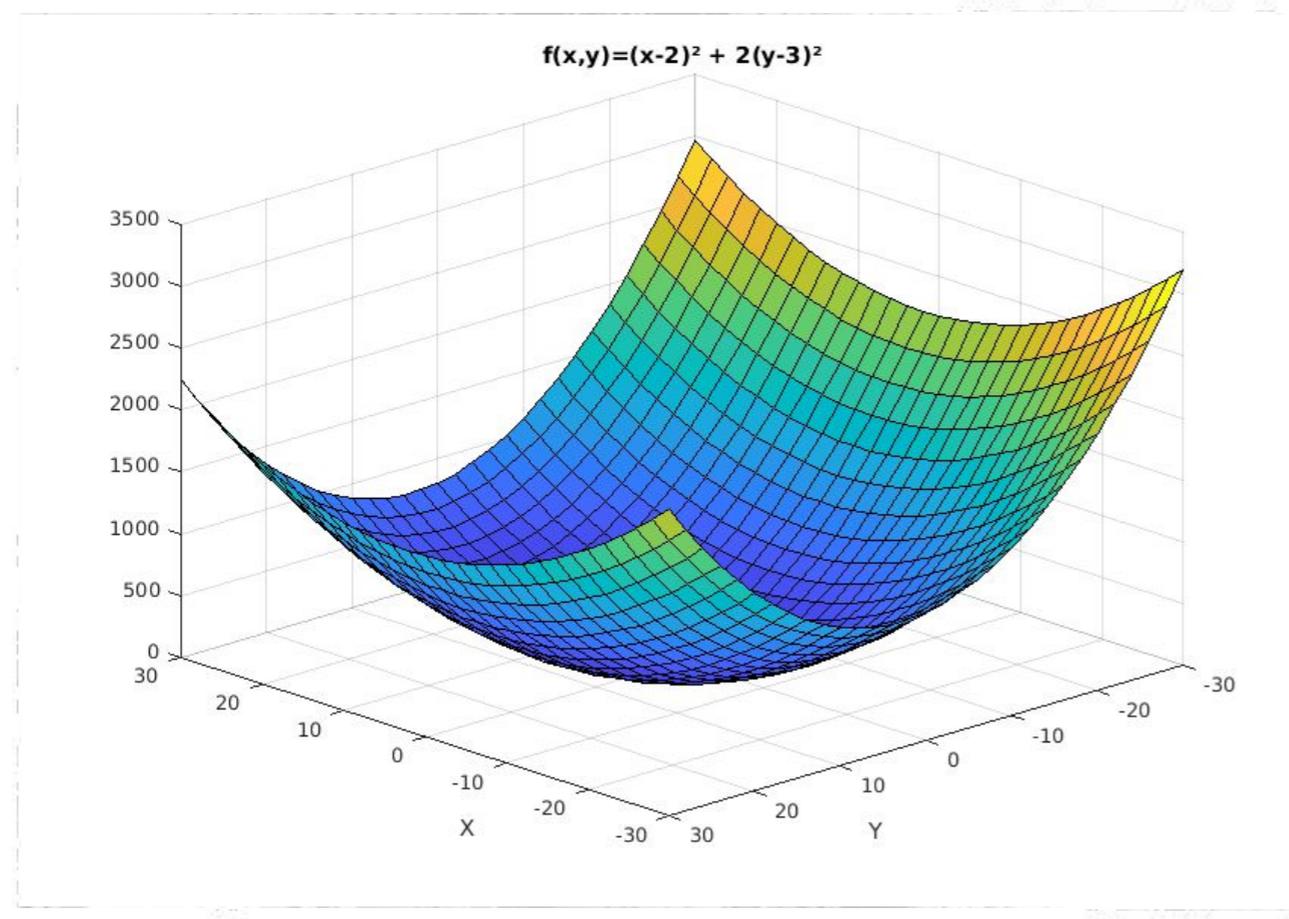
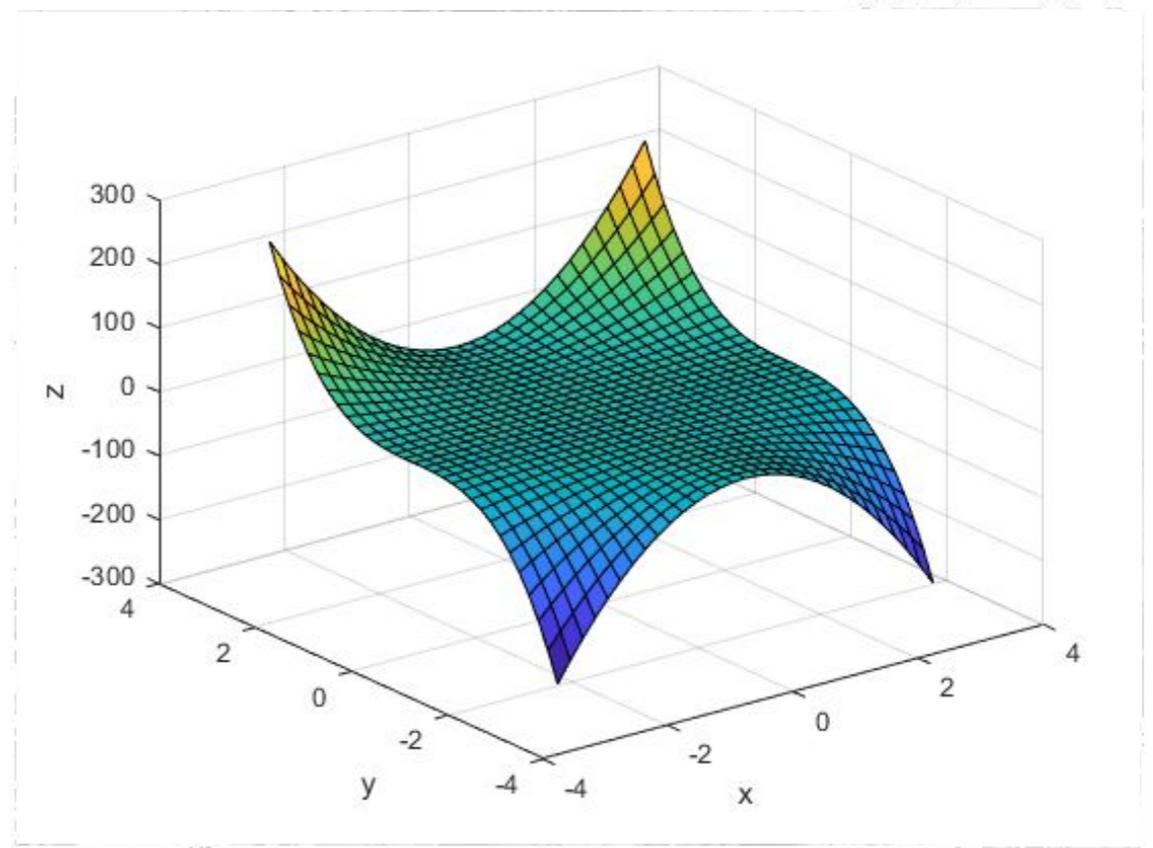
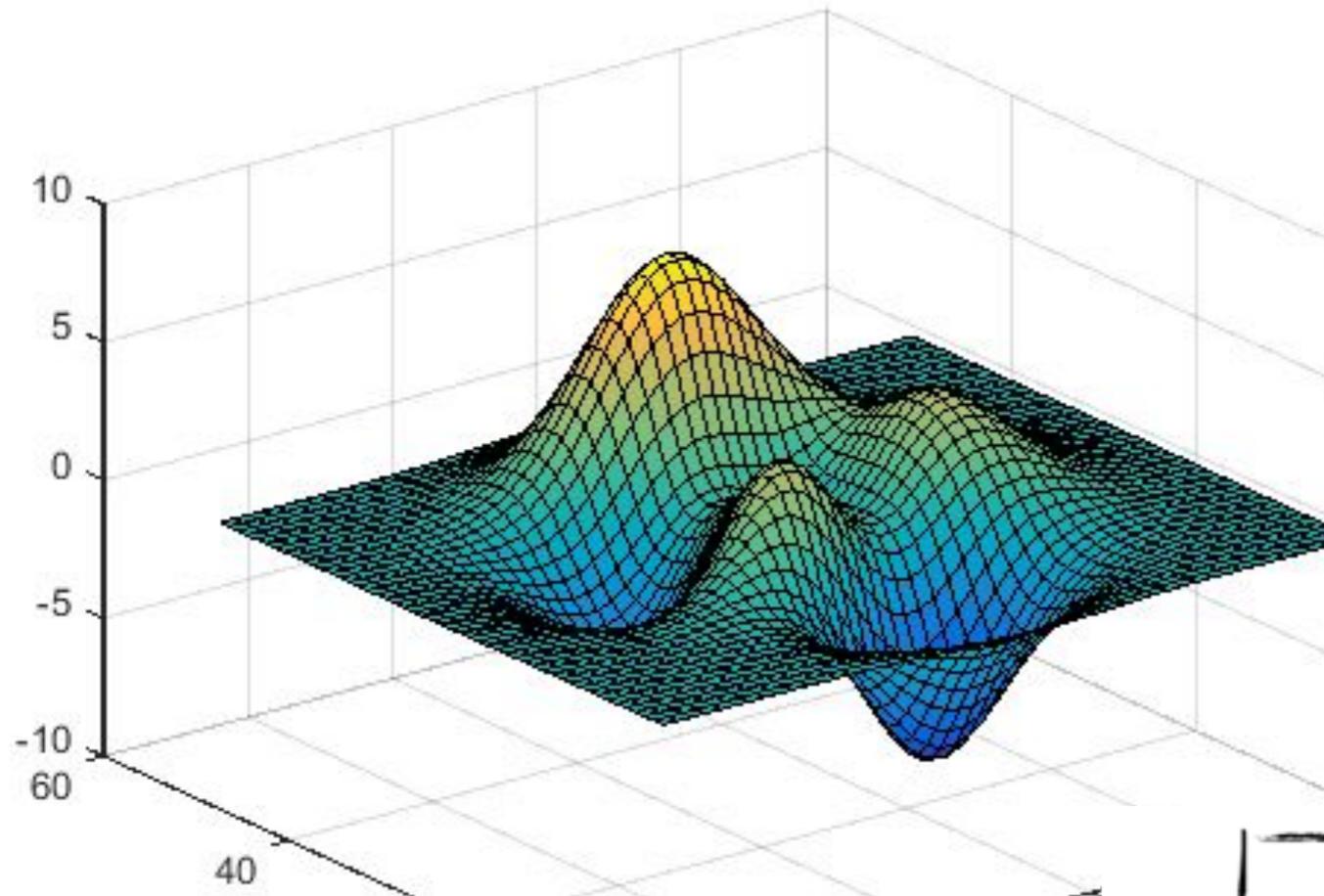
УРОК ПО АЛГЕБРЕ, 8 КЛАСС

---

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫ Й ПЕРЕНОС

«В МАТЕМАТИКЕ ЕСТЬ СВОЯ  
КРАСОТА, КАК В ПОЭЗИИ И В  
ЖИВОПИСИ»

Н.Е.ЖУКОВСКИЙ



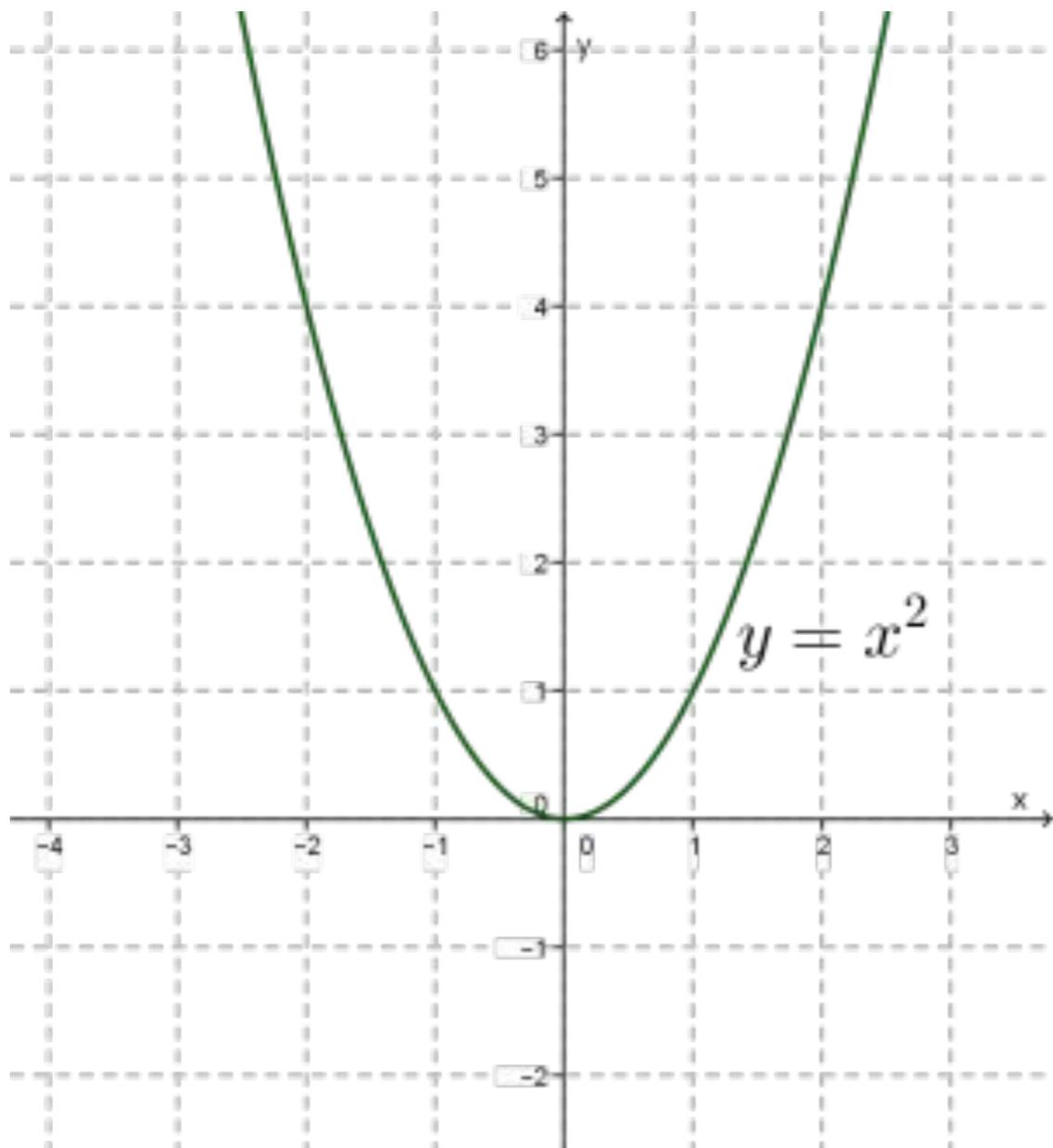


Рис.1

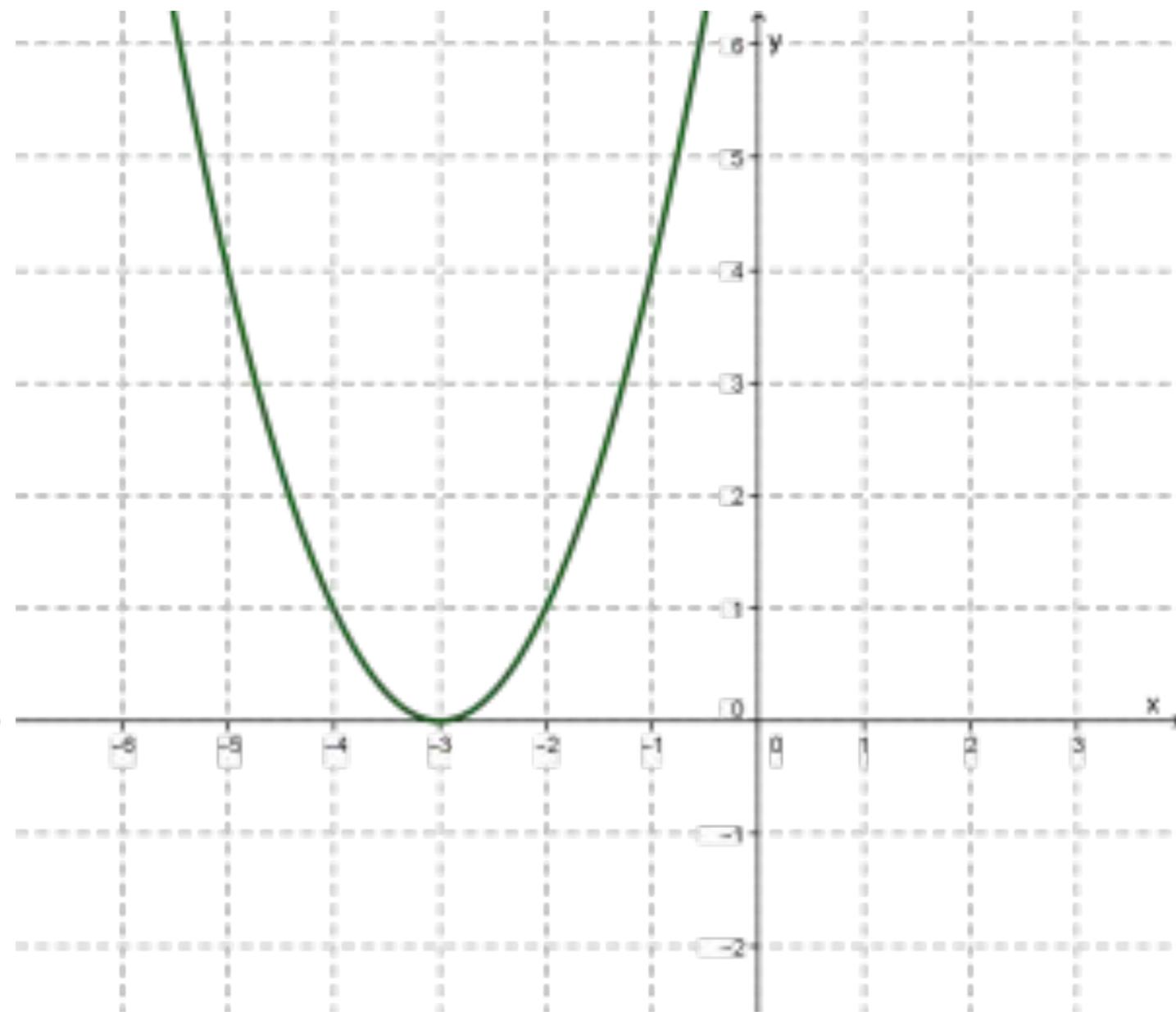
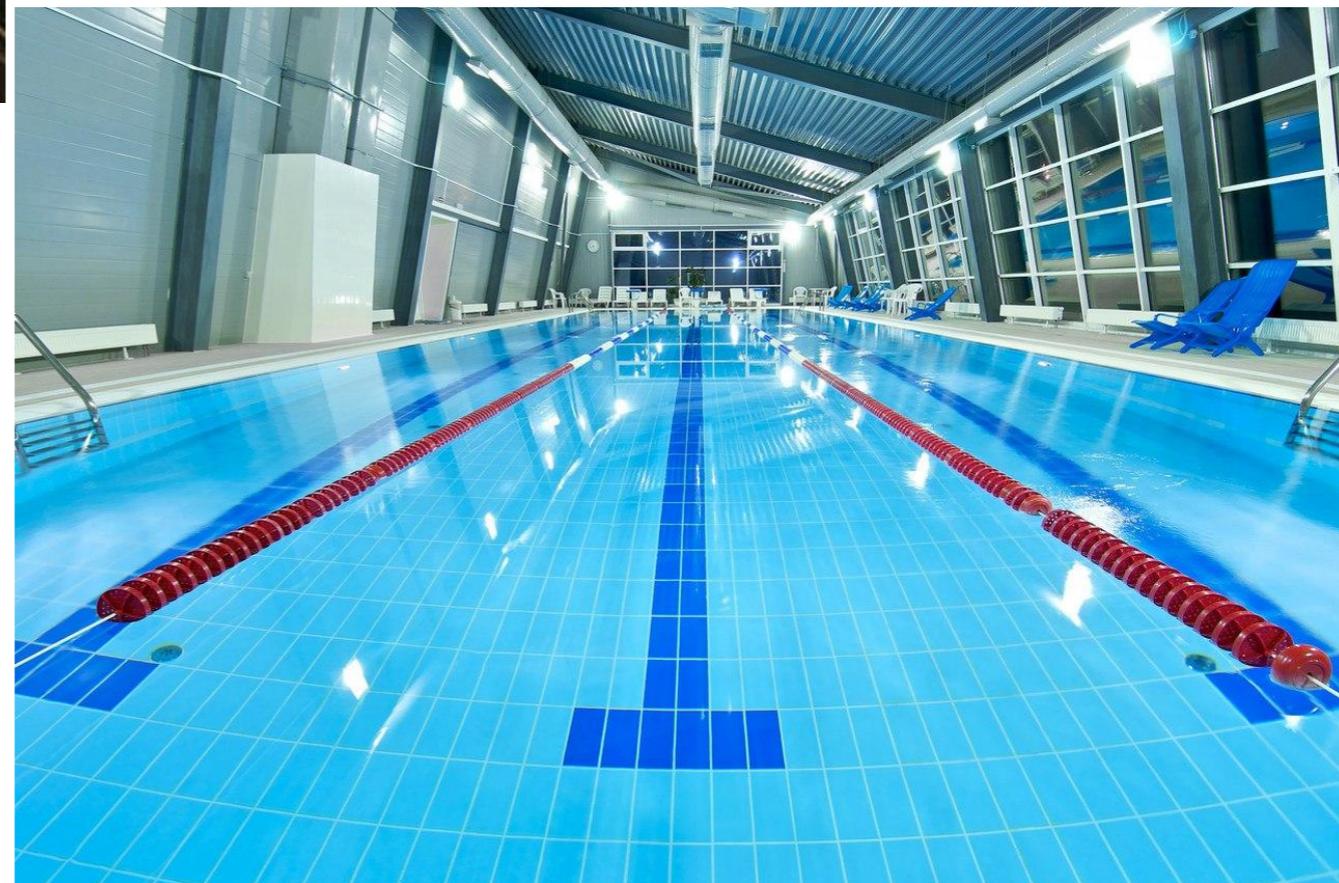


Рис.2

# АЛГЕБРА, 8 КЛАСС



# ЧТО НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФИКОМ ФУНКЦИИ?

Графиком функции  $f$  называется множество всех точек  $(x, y)$  координатной плоскости, где  $y=f(x)$ , а  $x$  «пробегает» всю область определения функции.

7

1  
Г  
И  
П  
Е  
Р  
Б  
О  
Л  
А

2  
П  
А  
Р  
Б  
О  
Л  
А

4  
О  
Р  
Д  
И  
Н  
А  
Т  
А

5  
Ф  
О  
Р  
М  
У  
Л  
А

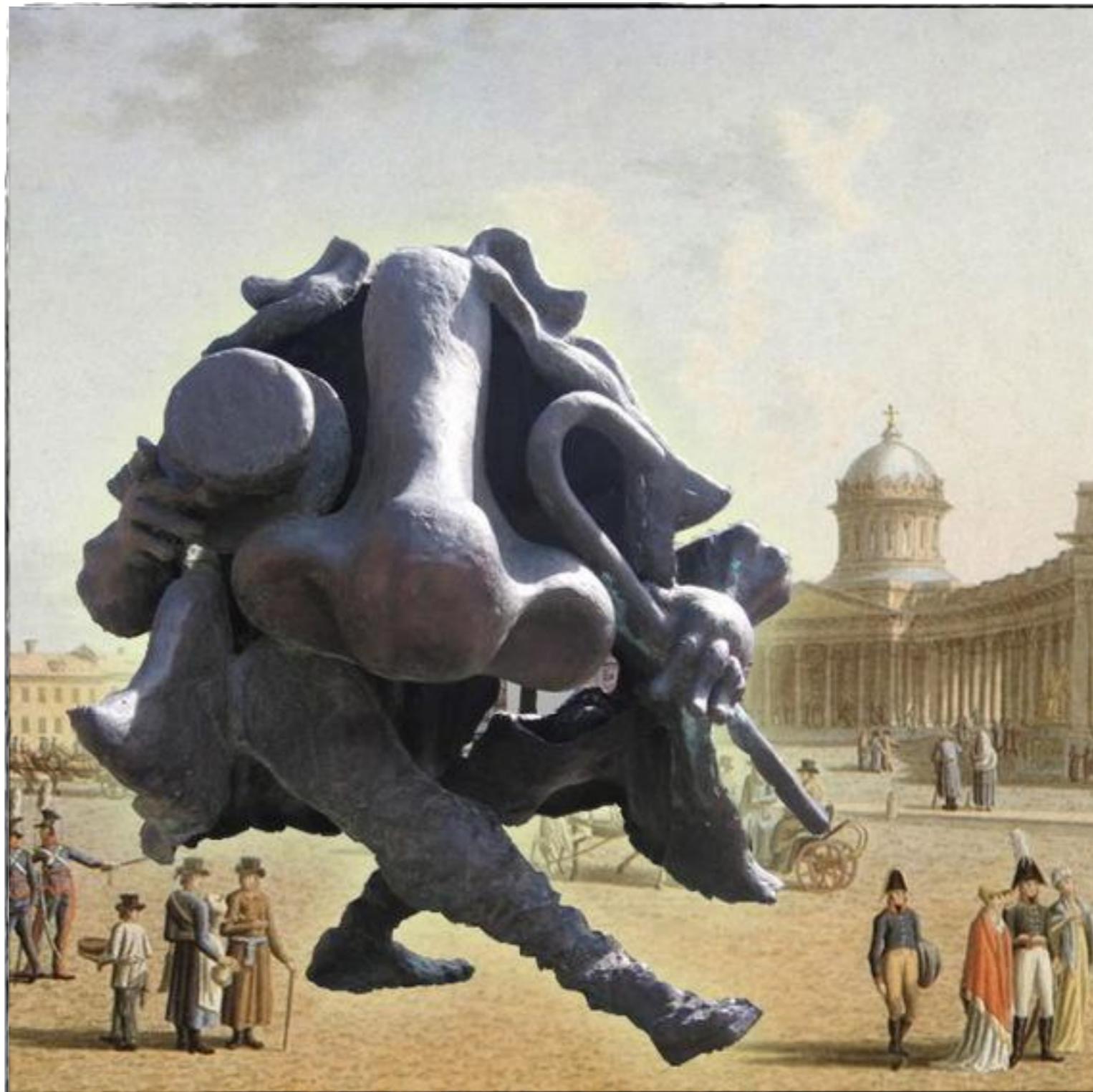
3  
А  
Б  
Ц  
И  
С  
С  
А

6  
Ф  
У  
Н  
К  
Ц  
И  
Я

# ВАШ ГРАФИК

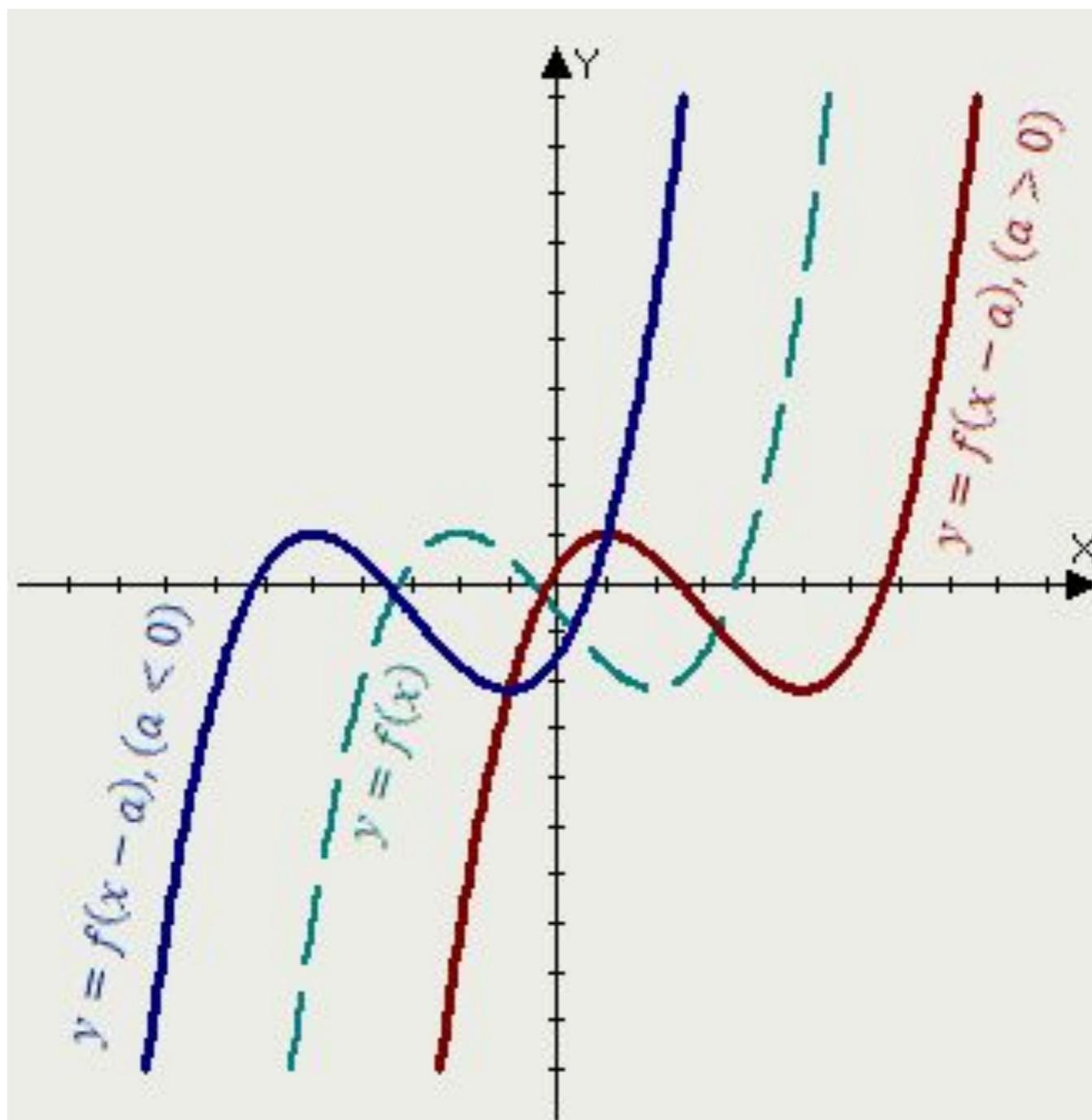
Я предлагаю Вам начертить график изменения вашего интереса, уровня познания и личной активности в течение этого урока!

# ТЕМА УРОКА



# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОХ

$f(x) \longrightarrow$   
 $f(x-a)$



# ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Построить графики функций:

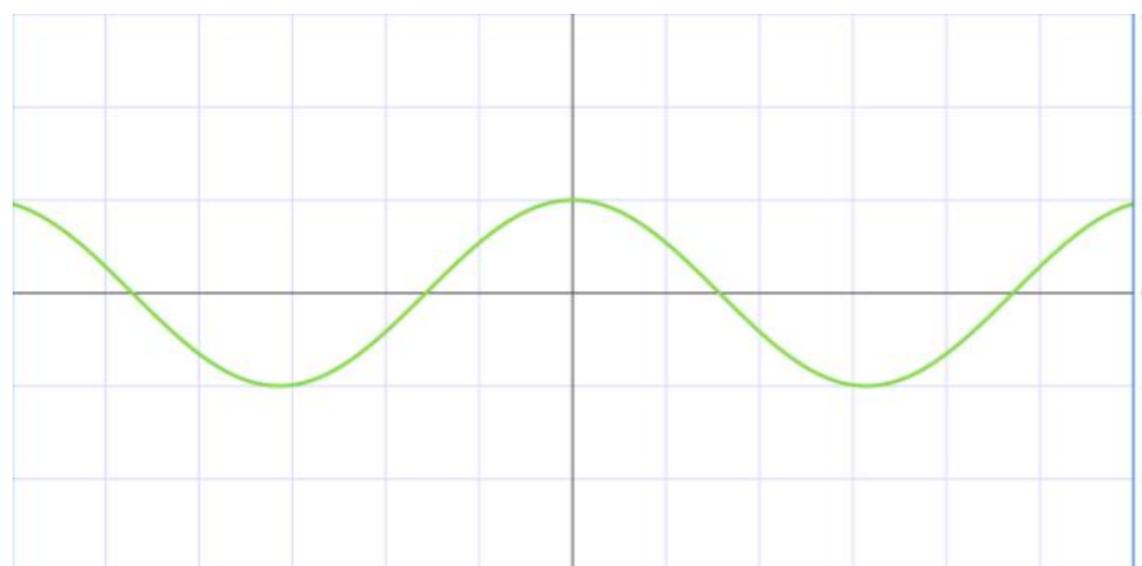
$$y = \cos(x + \pi/3)$$

$$y = \cos(x - \pi/3)$$

Для начала построим график  $y = \cos(x)$ .

Далее воспользуемся параллельным переносом и сдвинем график на  $\pi/3$  влево/вправо.

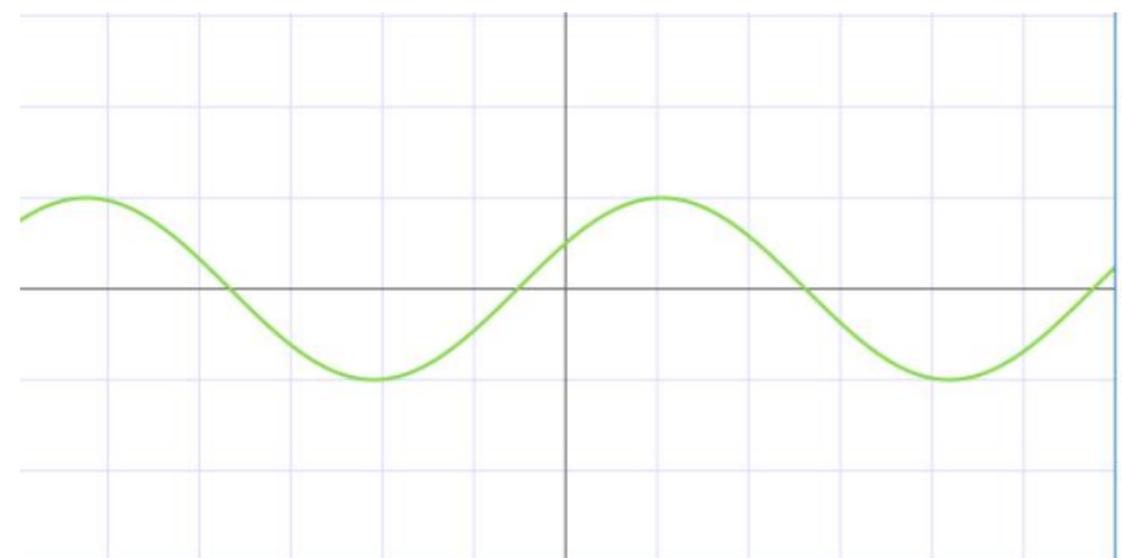
$$y = \cos(x)$$



$$y = \cos(x + \pi/3)$$

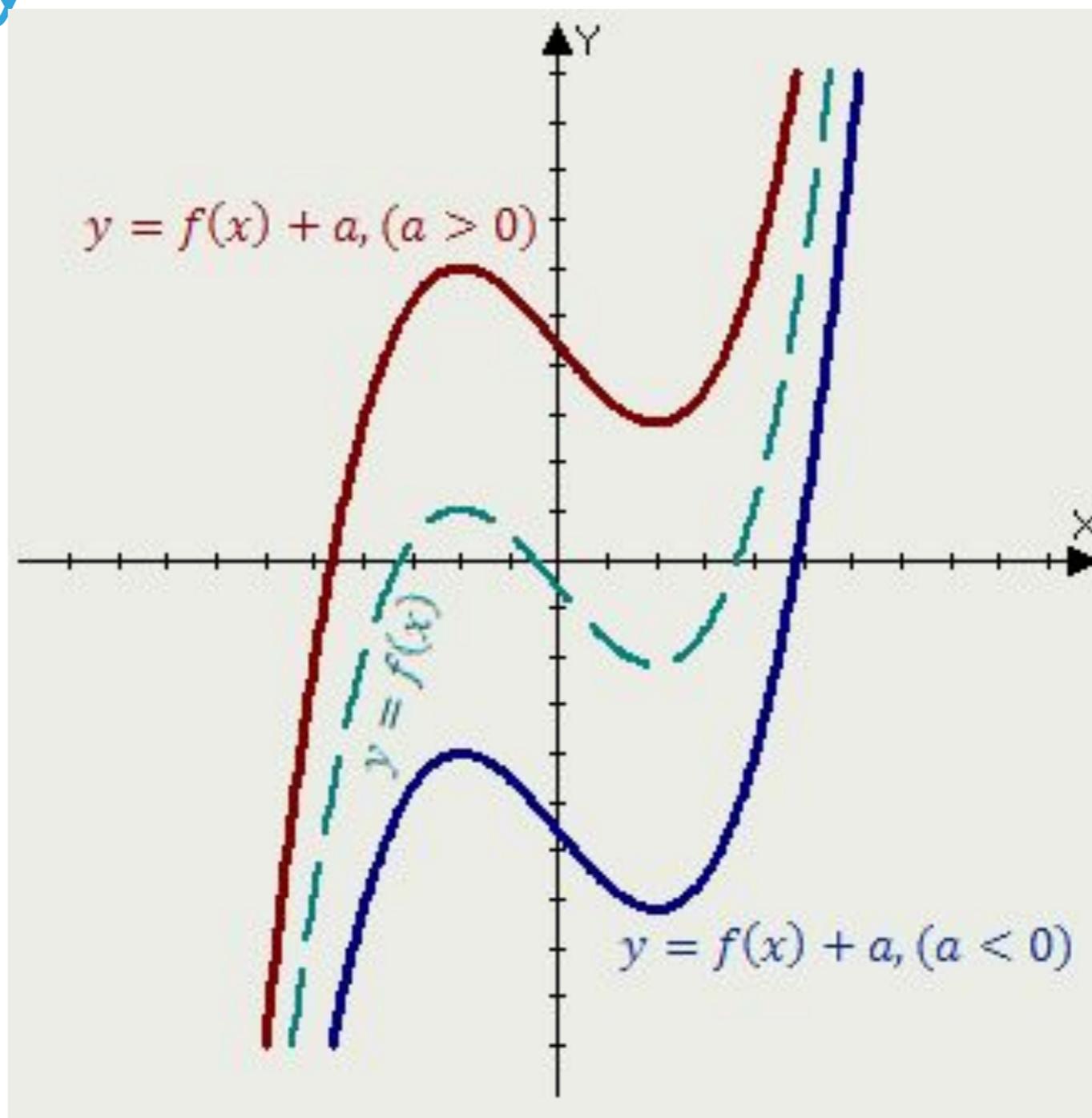


$$y = \cos(x - \pi/3)$$



# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОУ

$f(x) \longrightarrow$   
 $f(x)+a$



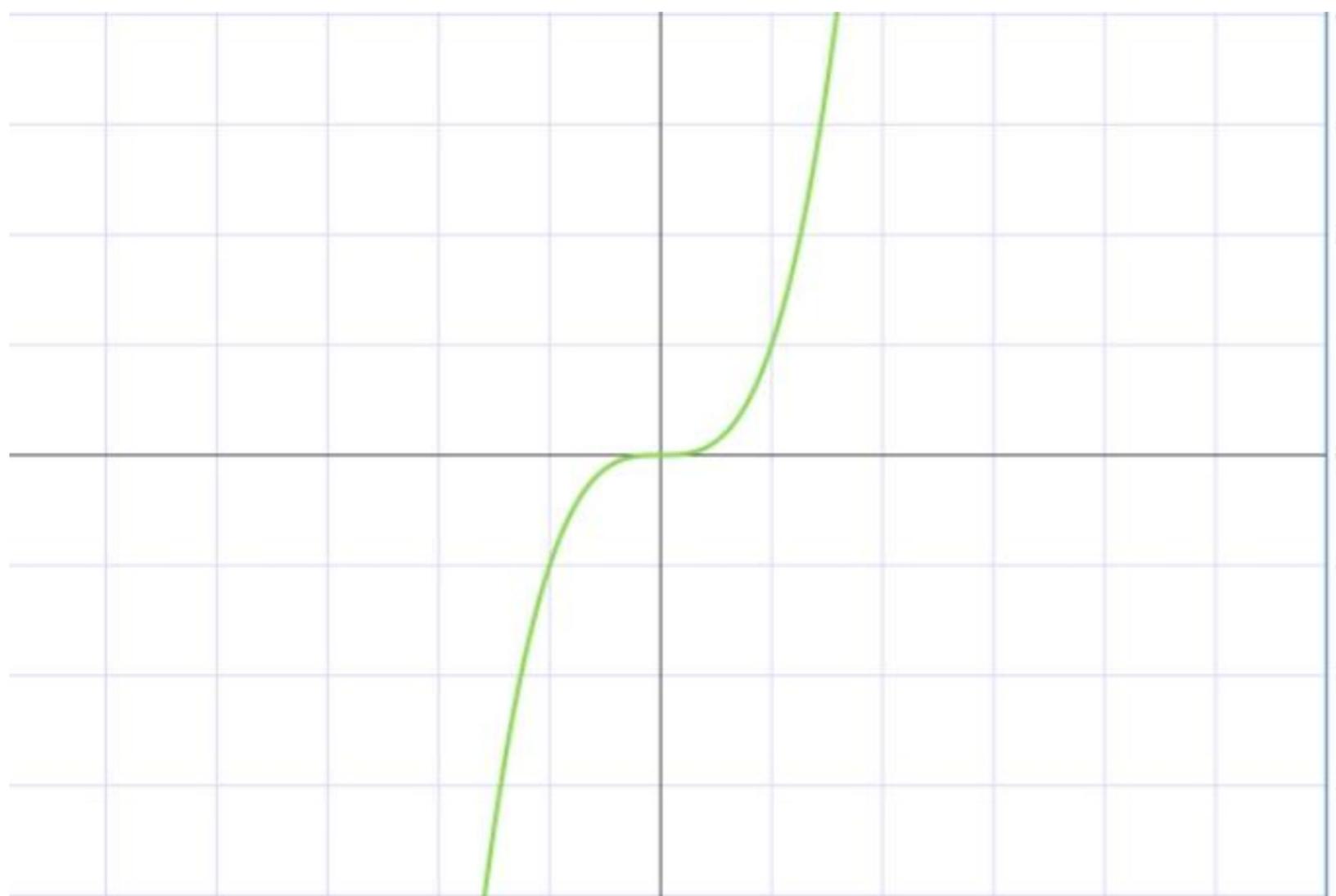
# ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Определите, какой формулой задана функция:

$$y=(x-2)^3$$

$$y=x^3+1$$

$$y=x^3$$



# ЗАДАНИЯ В ПАРАХ ПО УЧЕБНИКУ

Выполнить номера 19.1, 19.3, 19.5, 19.11.

**§ 19. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК  
ФУНКЦИИ  $y = f(x + l)$ ,  
ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК  
ФУНКЦИИ  $y = f(x)$**

Постройте в одной системе координат графики функций:

- 19.1. а)  $y = x^2$  и  $y = (x + 1)^2$ ;      в)  $y = x^2$  и  $y = (x - 2)^2$ ;  
б)  $y = x^2$  и  $y = (x - 3)^2$ ;      г)  $y = x^2$  и  $y = (x + 4)^2$ .
- 19.2. а)  $y = \frac{1}{x}$  и  $y = \frac{1}{x - 2}$ ;      в)  $y = \frac{1}{x}$  и  $y = \frac{1}{x + 3}$ ;  
б)  $y = \frac{1}{x}$  и  $y = \frac{1}{x + 2}$ ;      г)  $y = \frac{1}{x}$  и  $y = \frac{1}{x - 5}$ .
- 19.3. а)  $y = \sqrt{x}$  и  $y = \sqrt{x + 2}$ ;      в)  $y = \sqrt{x}$  и  $y = \sqrt{x + 4}$ ;  
б)  $y = \sqrt{x}$  и  $y = \sqrt{x - 1}$ ;      г)  $y = \sqrt{x}$  и  $y = \sqrt{x - 2}$ .
- 19.4. а)  $y = |x|$  и  $y = |x - 3|$ ;      в)  $y = |x|$  и  $y = |x + 1|$ ;  
б)  $y = |x|$  и  $y = |x + 5|$ ;      г)  $y = |x|$  и  $y = |x - 4|$ .
- 19.5. График какой функции получится, если:  
а) параболу  $y = 3x^2$  перенести на 4 единицы влево вдоль оси  $Ox$ ;  
б) гиперболу  $y = -\frac{7}{x}$  перенести на 3 единицы вправо вдоль оси  $Ox$ ;  
в) график функции  $y = \sqrt{x}$  перенести на 2 единицы вправо вдоль оси  $Ox$ ;  
г) график функции  $y = |x|$  перенести на 1 единицу влево вдоль оси  $Ox$ ?
- 19.6. График какой функции получится, если:  
а) параболу  $y = -\frac{1}{3}x^2$  перенести на 0,5 единицы вправо вдоль оси  $Ox$ ;  
б) гиперболу  $y = \frac{2}{x}$  перенести на 2 единицы влево вдоль оси  $Ox$ ;  
в) график функции  $y = -|x|$  перенести на 4 единицы вправо вдоль оси  $Ox$ ;  
г) график функции  $y = -\sqrt{x}$  перенести на 1,5 единицы влево вдоль оси  $Ox$ ?

Постройте график функции и укажите, где она убывает, где возрастает:

- 19.7. а)  $y = 2(x + 1)^2$ ;      в)  $y = 3(x - 5)^2$ ;  
б)  $y = -(x - 3)^2$ ;      г)  $y = -4(x + 2)^2$ .
- 19.8. а)  $y = \frac{2}{x + 5}$ ;      б)  $y = -\frac{1}{x - 2}$ ;      в)  $y = \frac{3}{x - 1}$ ;      г)  $y = -\frac{4}{x + 4}$ .
- 19.9. а)  $y = \sqrt{x - 3}$ ;      б)  $y = -\sqrt{x + 4}$ ;      в)  $y = \sqrt{x - 1}$ ;      г)  $y = -\sqrt{x - 2}$ .
- 19.10. а)  $y = |x + 3|$ ;      в)  $y = |x - 2|$ ;  
б)  $y = -|x - 4|$ ;      г)  $y = -|x + 1|$ .
- 19.11. Напишите уравнение параболы  $y = a(x + l)^2$ , изображенной:  
а) на рис. 24;      в) на рис. 26;  
б) на рис. 25;      г) на рис. 27.

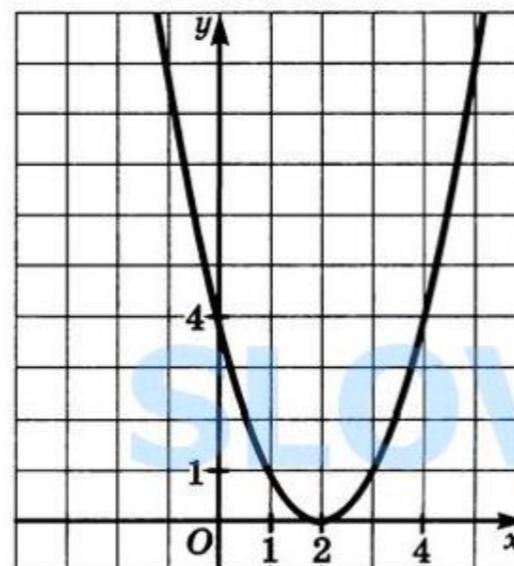


Рис. 24

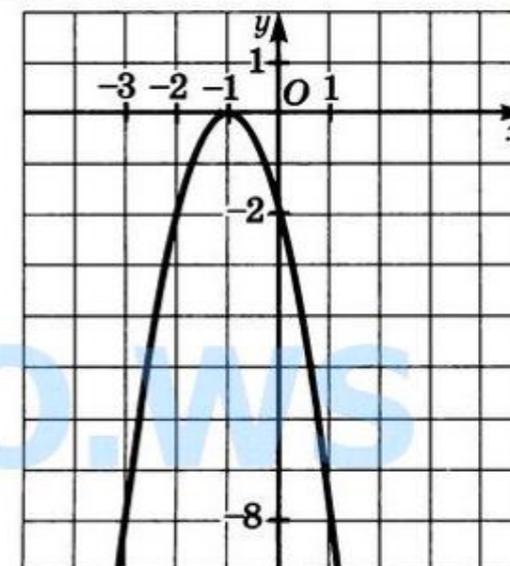


Рис. 25

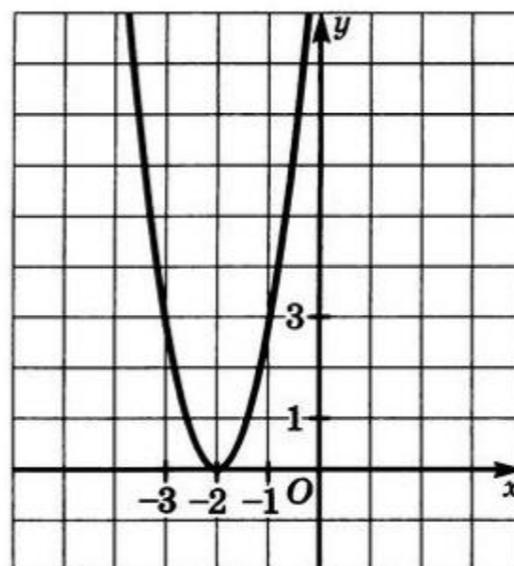


Рис. 26

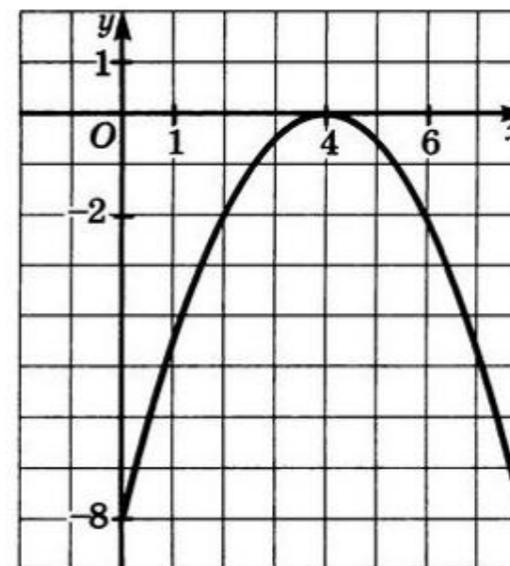


Рис. 27

# ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ В ГРУППАХ

Придумайте графики функций,  
с помощью которых можно  
нарисовать рисунок!

# РЕФЛЕКСИЯ

А теперь посмотрите на свои графики, как изменились их показатели?

- интерес к уроку;
- уровень познания,
- личная активность.

Назовите 3 момента, которые у вас получились хорошо и 1 действие, которое улучшит вашу работу на следующем уроке!,

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Выполнить номера 19.2, 19.4,  
19.6, 19.12; прочитать и  
изучить параграфы 19,20.

---

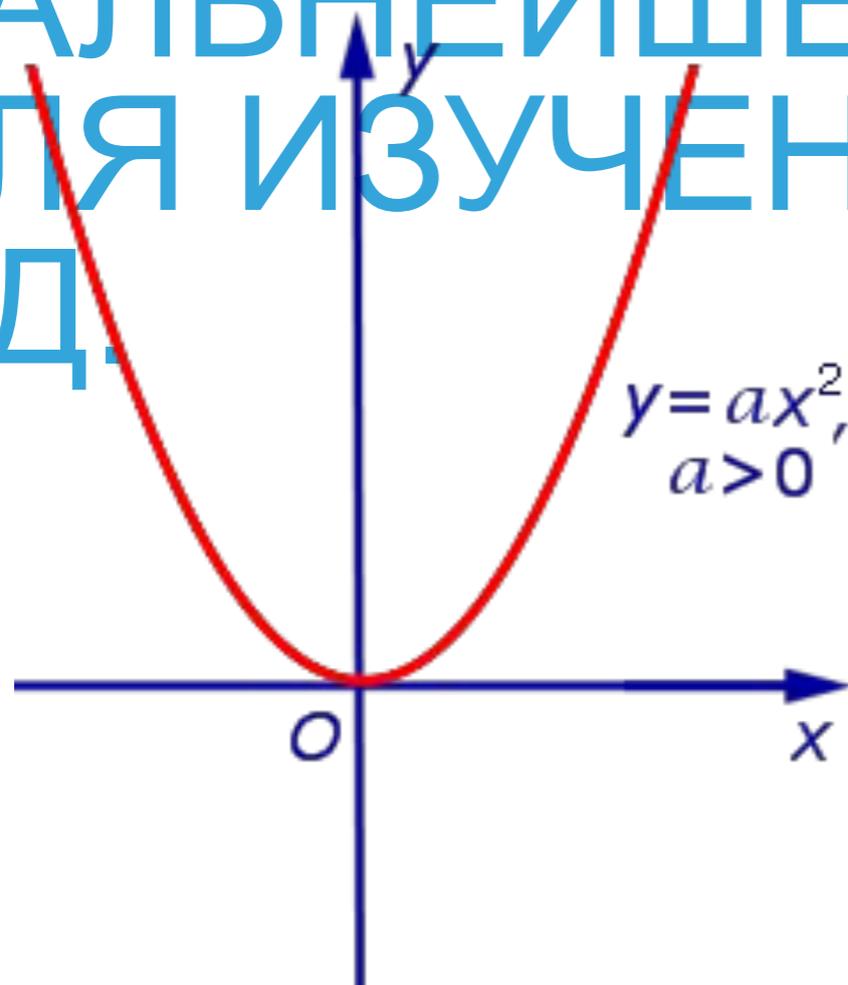
ИЛЛЮСТРАЦИЯ  
КОНКРЕТНЫХ  
ПРИМЕРОВ ВВЕДЕНИЯ  
ПОНЯТИЯ И ПЕРЕНОСА

УЧЕБНИК 1

---

МОРОДКОВИ  
Ч 8 КП

ПОНЯТИЕ ВВОДИТСЯ ВО  
ВРЕМЯ ИЗУЧЕНИЯ  
КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ. В  
ДАЛЬНЕЙШЕМ ПРИМЕНЯЕТСЯ  
ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ГИПЕРБОЛЫ И  
Т.Д.



Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x-3) - f(x+2) &= \frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+2} = \\ &= \frac{2(x+2) - 2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$2,5f(x-3) \cdot f(x+2) = 2,5 \cdot \frac{2}{x-3} \cdot \frac{2}{x+2} = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Итак,

$$f(x-3) - f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}$$

и

$$2,5f(x-3) \cdot f(x+2) = \frac{10}{(x-3)(x+2)}.$$

Значит,  $f(x-3) - f(x+2) = 2,5f(x-3) \cdot f(x+2)$ , что и требовалось доказать.  $\blacksquare$

### § 19. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x + l)$ , ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Построим в одной системе координат графики функций  $y = x^2$  и  $y = (x + 3)^2$ . Графиком первой функции является парабола (пунктирная линия на рис. 64). Для функции  $y = (x + 3)^2$  составим таблицу значений:

$x$	-3	-2	-4	-5	-1	-6	0
$y$	0	1	1	4	4	9	9



Построив точки  $(-3; 0)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(-4; 1)$ ,  $(-5; 4)$ ,  $(-1; 4)$ ,  $(-6; 9)$ ,  $(0; 9)$  на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (цветная линия на рис. 64). Обратите внимание — это точно такая же парабола,

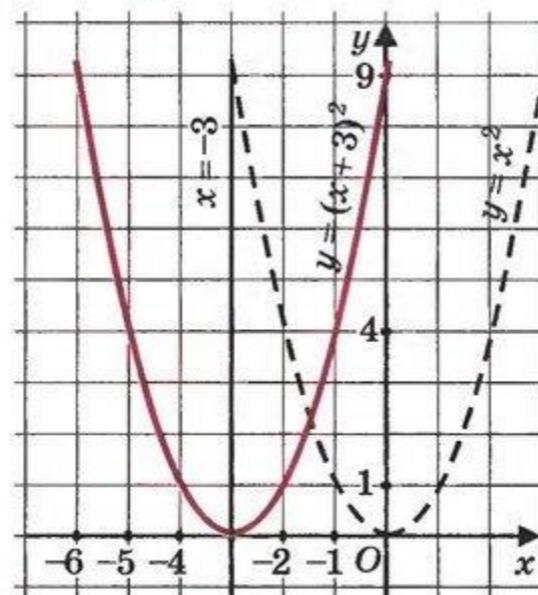


Рис. 64

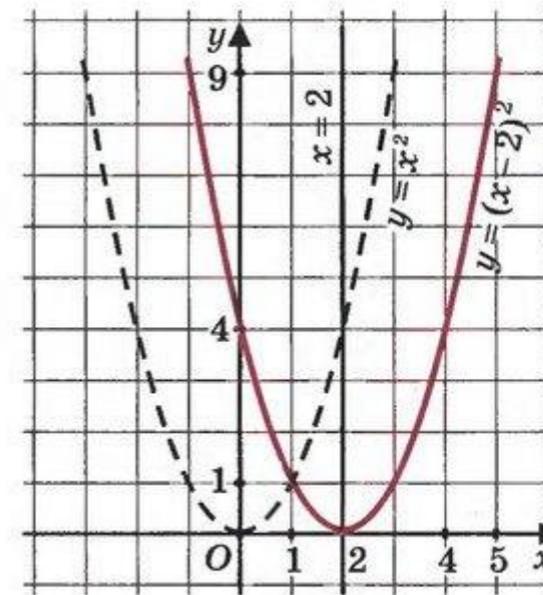


Рис. 65

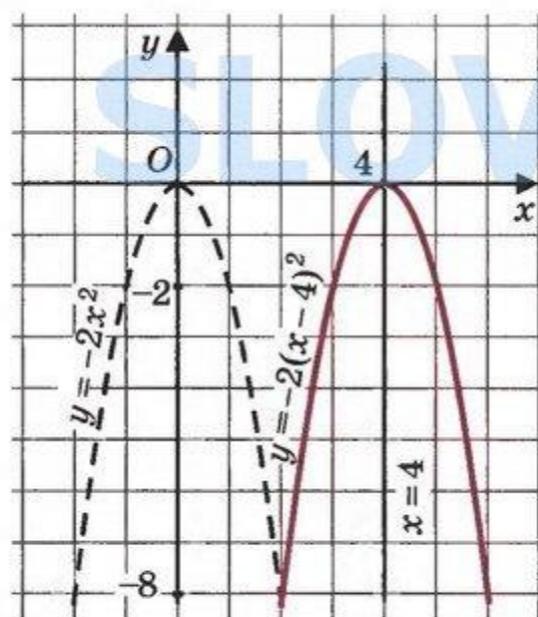


Рис. 66

как и  $y = x^2$ , но только сдвинутая вдоль оси  $x$  на 3 единицы масштаба влево. Вершина параболы теперь находится в точке  $(-3; 0)$ , а не в точке  $(0; 0)$ , как для параболы  $y = x^2$ . Осью симметрии служит прямая  $x = -3$ , а не  $x = 0$ , как это было в случае параболы  $y = x^2$ .

Если же построить в одной системе координат графики функций  $y = x^2$  и  $y = (x - 2)^2$ , то заметим (рис. 65), что второй график получается из первого сдвигом (или, как еще говорят, параллельным переносом) вдоль

оси  $x$  на 2 единицы масштаба вправо.

Точно так же обстоит дело и с графиками других функций. Например, график функции  $y = -2(x - 4)^2$  — парабола, которая получается из параболы  $y = -2x^2$  сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси  $x$  на 4 единицы масштаба вправо (рис. 66).



Вообще, справедливо следующее утверждение: чтобы построить график функции  $y = f(x + l)$ , где  $l$  — заданное положительное число, нужно сдвинуть график функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $x$  на  $l$  единиц масштаба влево;

чтобы построить график функции  $y = f(x - l)$ , где  $l$  — заданное положительное число, нужно сдвинуть график функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $x$  на  $l$  единиц масштаба вправо.

**Пример 1.** Построить график функции  $y = -\frac{3}{x+5}$ .

**Решение.** Построив гиперболу  $y = -\frac{3}{x}$  и сдвинув ее вдоль оси  $x$  влево на 5 единиц, получим требуемый график (рис. 67). Это — гипербола с асимптотами  $x = -5$  и  $y = 0$ .

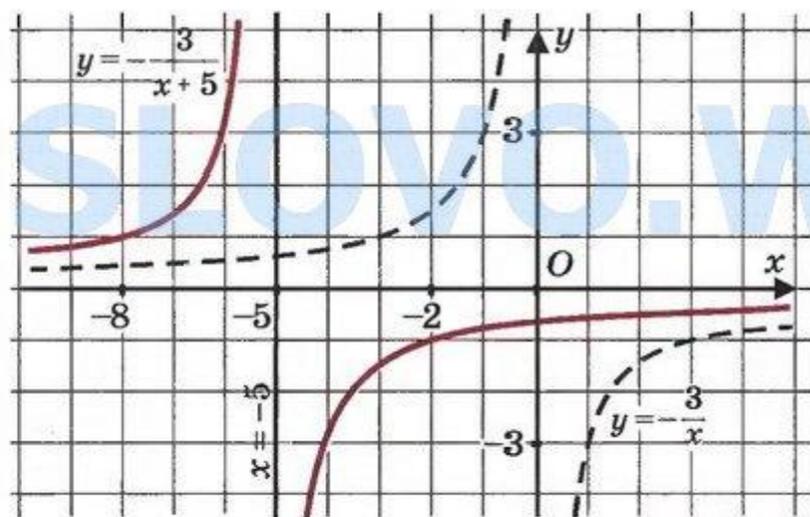


Рис. 67

**Пример 2.** Построить график функции  $y = |x + 2|$ .

**Решение.** График этой функции получается из графика функции  $y = |x|$  (см. рис. 28 на с. 80) сдвигом последнего на две единицы масштаба влево (рис. 68).

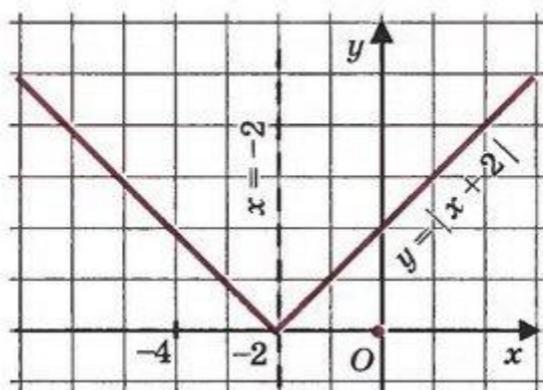


Рис. 68

**Замечание.** По сути дела, в этом параграфе речь шла о построении графика функции  $y = f(x + l)$ , где  $l$  — любое число, как положительное, так и отрицательное. Вы, наверное, заметили, что, думая, на сколько единиц масштаба надо сдвинуть вдоль оси  $x$  график функции  $y = f(x)$ , мы не обращали внимания на знак числа  $l$ ; график сдвигался в действительности вправо или влево на  $|l|$  единиц. А направление сдвига определялось знаком числа  $l$ : при  $l > 0$  график сдвигался влево, при  $l < 0$  — вправо.

## § 20. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x) + m$ , ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Построим в одной системе координат графики функций  $y = x^2$  (пунктирная линия на рис. 69) и  $y = x^2 + 4$ . Составим таблицу значений функции  $y = x^2 + 4$ :

$x$	0	1	-1	2	-2
$y$	4	5	5	8	8



Построив точки  $(0; 4)$ ,  $(1; 5)$ ,  $(-1; 5)$ ,  $(2; 8)$ ,  $(-2; 8)$  на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (цветная линия на рис. 69). Обратите внимание — это точно такая же парабола, как и  $y = x^2$ , но только сдвинутая вдоль оси  $y$  на 4 единицы масштаба *вверх*. Вершина параболы теперь находится в точке  $(0; 4)$ , а не в точке  $(0; 0)$ , как для параболы  $y = x^2$ . Осью симметрии по-прежнему служит прямая  $x = 0$ , как это было и в случае параболы  $y = x^2$ .

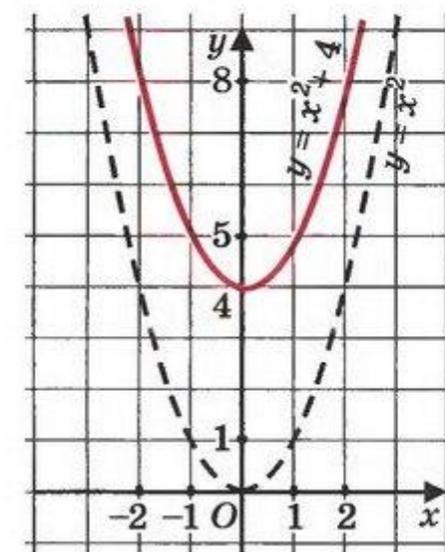


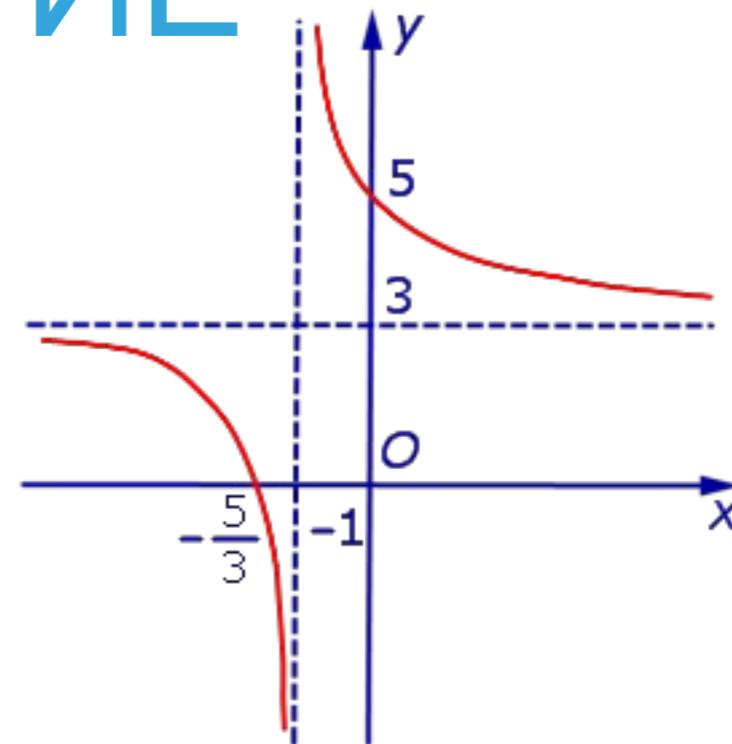
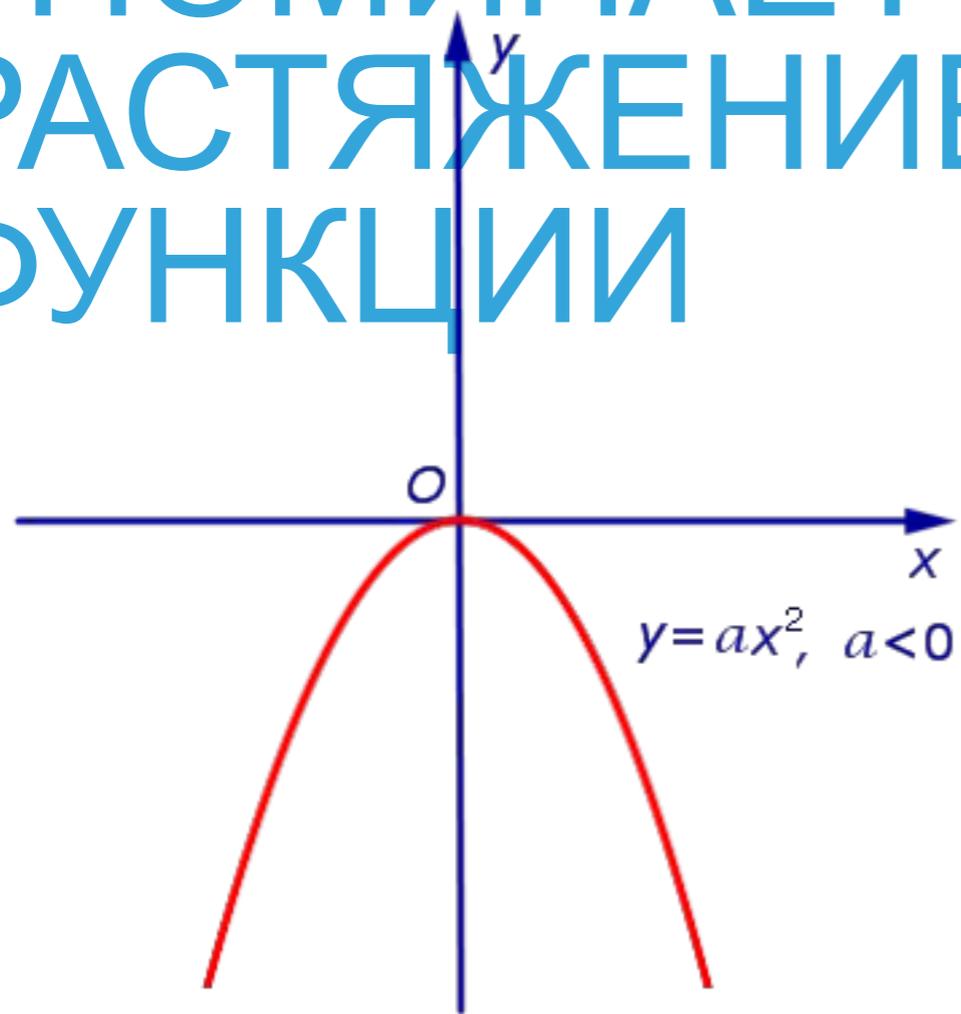
Рис. 69

УЧЕБНИК 2

---

НИКОЛЬСКО  
ИЙ 8 КЛ.

ДАННОЕ ПОНЯТИЕ ТАКЖЕ  
ВВОДИТСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ  
КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ, НО  
УПОМИНАЕТСЯ И  
РАСТЯЖЕНИЕ/СЖАТИЕ  
ФУНКЦИИ



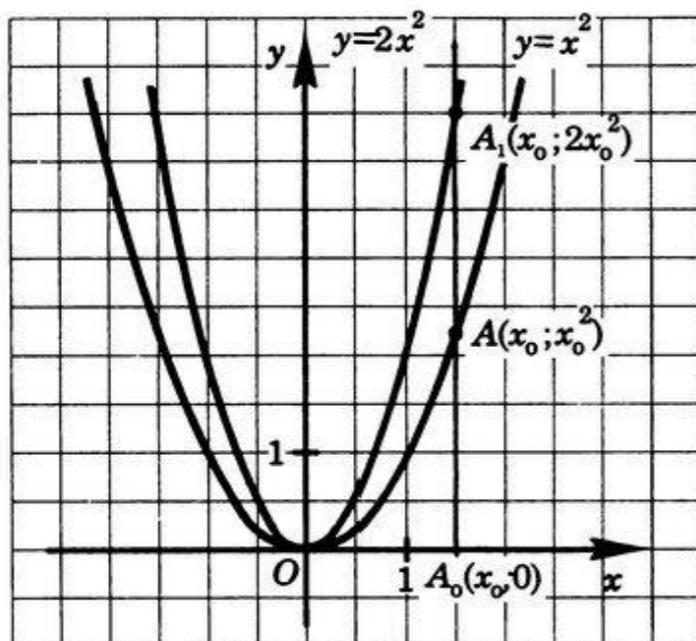


Рис. 57

б. Функция (1) непрерывная, поэтому ее график — непрерывная линия, т. е. он может быть изображен одним непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги.

Рассмотрим две функции

$$y = x^2 \text{ и } y = 2x^2.$$

Обе они определены для любых действительных значений  $x$ .

Зададим декартову систему координат  $xOy$  и число  $x_0$ . Точка  $A(x_0; x_0^2)$  принадлежит графику функции  $y = x^2$ , а точка  $A_1(x_0; 2x_0^2)$ , имеющая ту же абсциссу, принадлежит графику функции  $y = 2x^2$  (рис. 57). Ординаты точек  $A_1$  и  $A$  находятся в отношении 2:1, т. е. отрезок  $A_0A_1$  получается *растяжением* отрезка  $A_0A$  в 2 раза. Это рассуждение можно провести для любых точек графиков функций  $y = x^2$  и  $y = 2x^2$ , имеющих одну и ту же абсциссу  $x$ . Поэтому говорят, что график функции  $y = 2x^2$  получается из графика функции  $y = x^2$  *растяжением* последнего в 2 раза вдоль оси  $Oy$ .

Рассуждая аналогично, можно показать, что график функции  $y = ax^2$ , если  $a > 1$ , получается из графика функции  $y = x^2$  *растяжением* последнего в  $a$  раз вдоль оси  $y$ ; если же  $0 < a < 1$ , то *сжатием* последнего в  $\frac{1}{a}$  раз.

Мы видим, что график функции  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) похож на график функции  $y = x^2$ , его также называют **параболой**.

На рисунке 58, а изображены в одной и той же декартовой системе координат  $xOy$  параболы  $y = x^2$ ,  $y = 2x^2$ ,  $y = 3x^2$ , а на рисунке 57, б — параболы  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{2}x^2$ ,  $y = \frac{1}{3}x^2$ .

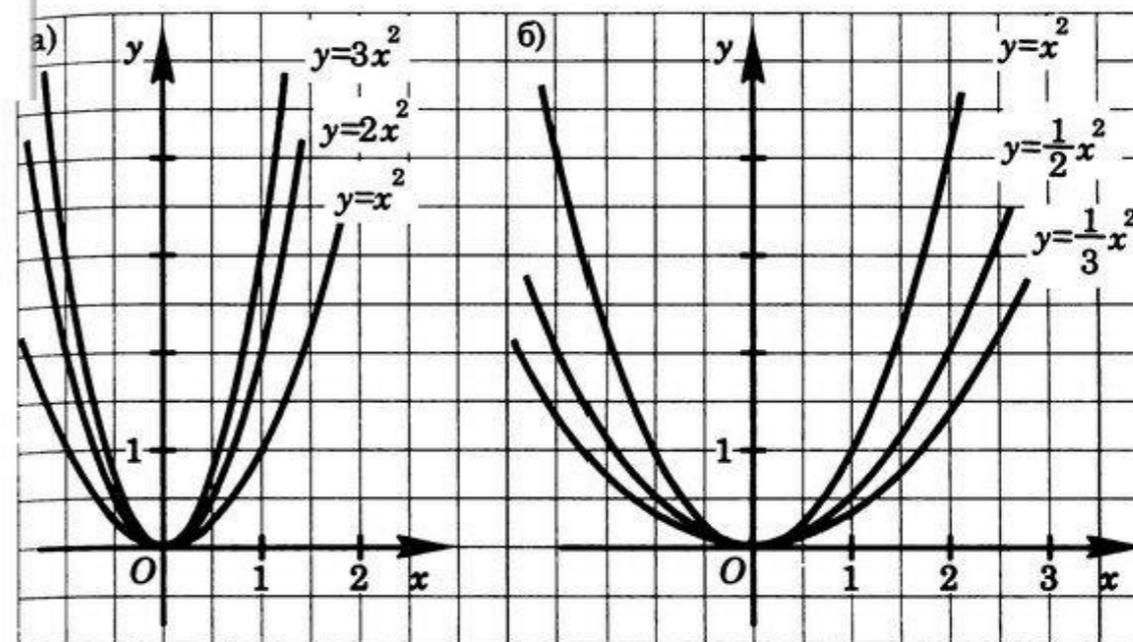


Рис. 58

553°. Как называют график функции  $y = ax^2$  ( $a > 0$ )?

554°. Как получить график функции  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) из графика функции  $y = x^2$ ?

555°. Какими свойствами обладает функция  $y = ax^2$  ( $a > 0$ )?

556. а) Функция задана формулой  $y = 5x^2$ . Назовите зависимую и независимую переменные. Вычислите  $y(0)$ ,  $y(1)$ ,  $y(2)$ ,  $y(3)$ ,  $y(-1)$ ,  $y(-2)$ ,  $y(-3)$ . Решение оформите в виде таблицы.

Например:

$x$	0	1	2	3	-1	-2	-3
$y$	0	5					

б) Функция задана формулой  $y = 0,25x^2$ . Вычислите  $y(-2)$ ,  $y(-4)$ ,  $y(10)$ ,  $y(\frac{1}{3})$ ,  $y(-10)$ ,  $y(-\frac{1}{3})$ . Решение оформите в виде таблицы.

557. Функция задана формулой  $y = \frac{3}{5}x^2$ . Верно ли равенство:

- а)  $y(5) = 15$ ;                      б)  $y(-10) = 80$ ;  
в)  $y(3) = 5,6$ ;                      г)  $y(-2) = 2,4$ ?

558. а) Вычислите значения функции  $y = 2x^2$  для значений  $x$  от  $-3$  до  $3$  через  $0,5$ . Решение оформите в виде таблицы.

б) Вычислите значения функции  $y = \frac{1}{2}x^2$  для значений  $x$  от  $-1$  до  $1$  через  $0,2$ . Решение оформите в виде таблицы.

583. а) Дана функция  $y = -3x^2$ . Точка  $(t; -3)$  принадлежит графику этой функции. Определите  $t$ .  
 б) Дана функция  $y = -0,2x^2$ . Точка  $(-0,2; t)$  принадлежит графику этой функции. Определите  $t$ .

### 7.3. Функция $y = a(x - x_0)^2 + y_0$

Область определения функции  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  есть множество всех действительных чисел  $\mathbb{R}$ . Покажем, как можно построить ее график, например, для  $a = 2$ .

Пусть дана парабола  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) (рис. 64, а). Чтобы построить график функции  $y = ax^2 - 2$ , надо параболу  $y = ax^2$  сдвинуть на 2 единицы вниз. График функции  $y = ax^2 - 2$  — парабола, имеющая вершину  $(0; -2)$  и ось  $x = 0$  (рис. 64, б).

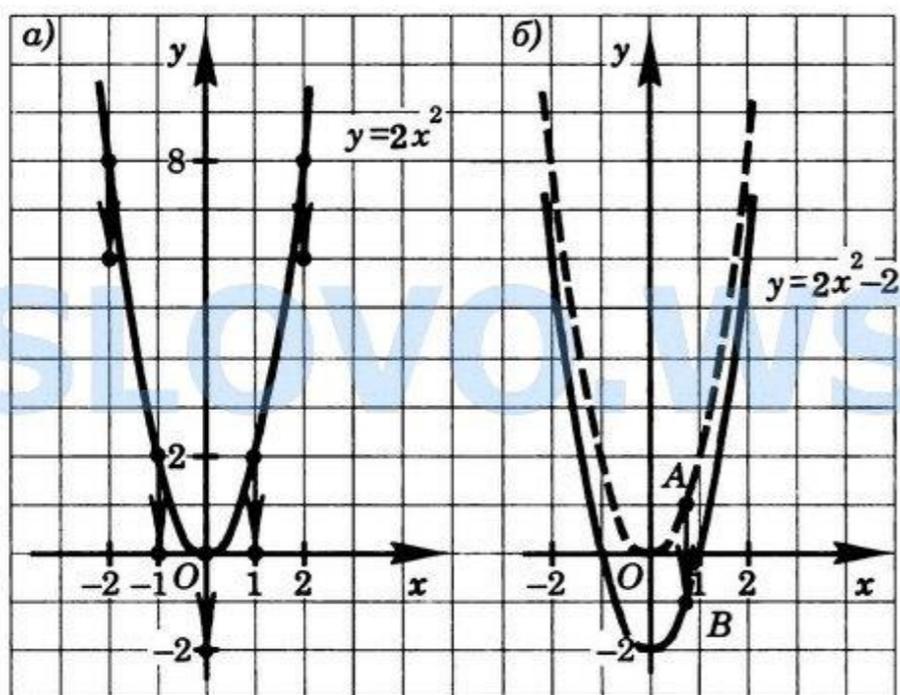


Рис. 64

В самом деле, если  $A$  — произвольная точка графика функции  $y = ax^2$ , а  $B$  — точка графика функции  $y = ax^2 - 2$ , имеющая ту же абсциссу, то ордината точки  $B$  на 2 единицы меньше ординаты точки  $A$ .

Например, при  $x = 0$  функция  $y = 2x^2$  принимает значение 0, а функция  $y = 2x^2 - 2$  принимает значение  $-2$ . При  $x = 1$  и при  $x = -1$  функция  $y = 2x^2$  принимает значение 2, а функция  $y = 2x^2 - 2$  принимает значение 0 и т. д.

Вообще, чтобы построить параболу  $y = ax^2 + y_0$ , надо параболу  $y = ax^2$  сдвинуть на  $|y_0|$  единиц вверх, если  $y_0 > 0$ , и вниз, если  $y_0 < 0$ .

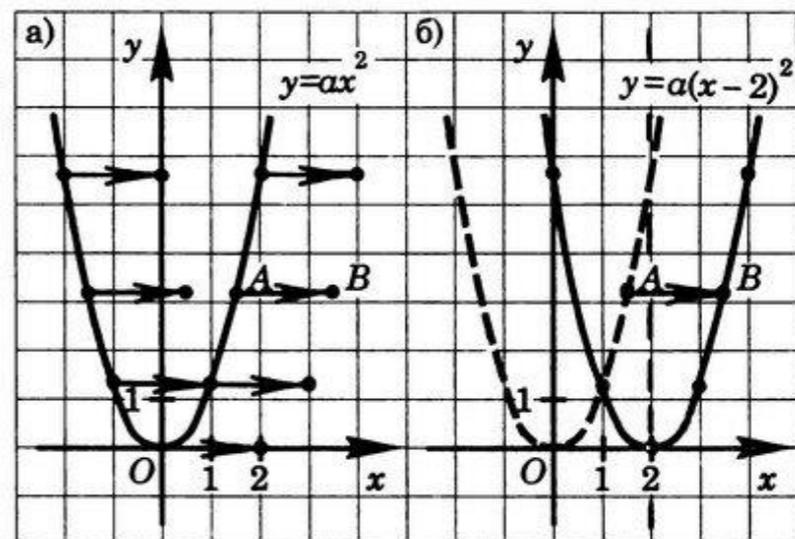


Рис. 65

Пусть дана парабола  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) (рис. 65, а). Чтобы построить график функции  $y = a(x - 2)^2$ , надо параболу  $y = ax^2$  сдвинуть на 2 единицы вправо. График функции  $y = a(x - 2)^2$  — парабола, имеющая вершину  $(2; 0)$  и ось  $x = 2$  (рис. 65, б).

В самом деле, если  $A$  — произвольная точка графика функции  $y = ax^2$ , а  $B$  — точка графика функции  $y = a(x - 2)^2$ , имеющая ту же ординату, то абсцисса точки  $B$  на 2 единицы больше абсциссы точки  $A$ .

Например, функция  $y = 2x^2$  принимает значение 0 при  $x = 0$ , а функция  $y = 2(x - 2)^2$  при  $x = 2$ , функция  $y = 2x^2$  принимает значение 2 при  $x = 1$  и при  $x = -1$ , а функция  $y = 2(x - 2)^2$  при  $x = 3$  и при  $x = 1$  и т. д.

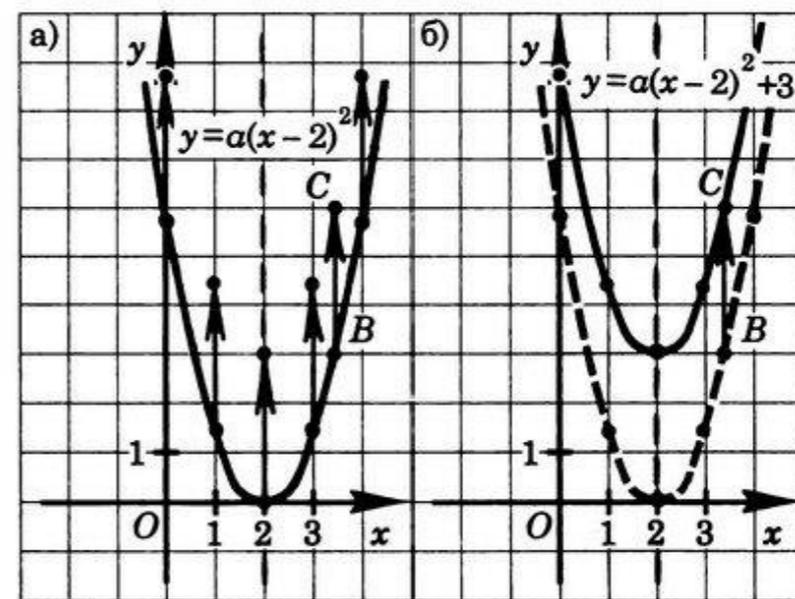


Рис. 66

---

ВОПРОСЫ

---

НА КАКИХ ЕЩЁ  
ПРИМЕРАХ МОЖНО  
ВВЕСТИ  
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ  
ПЕРЕНОС ?

---

КАК БЫ ВЫ ВВЕЛИ  
ПОНЯТИЕ  $\parallel$   
ПЕРЕНОСА В  
АЛГЕБРЕ?