Равенство двух многоугольников

Вернёмся к признакам равенства фигур. В общем случае сформулировать их довольно сложно. Однако для многоугольников существует простое правило. Вы знаете, что два многоугольника равны, если их можно совместить. Но тогда у них должны совпасть все стороны и все углы — потому их и называют соответственными. Оказывается, верно и обратное: если каждой стороне и каждому углу одного многоугольника соответствуют равные им сторона и угол другого, то такие многоугольники можно будет совместить. Мы сформулируем это правило как признак равенства многоугольников, но пока примем его без доказательства.

Признак равенства многоугольников

Если у двух многоугольников равны все их соответственные стороны и углы, то такие многоугольники равны.

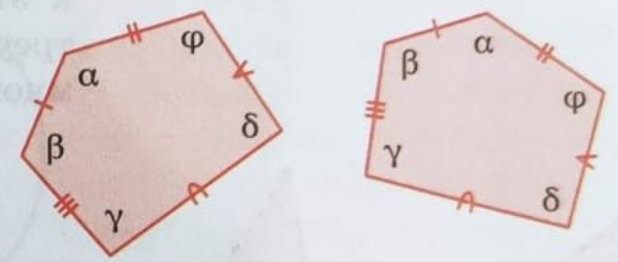


Рис. 10.6

С помощью данного признака легко проверить равенство оранжевых или равенство красных фигур на рисунке 10.7. В самом деле, на клетчатой бумаге без линейки и транспортира можно найти у каждой пары этих фигур все их равные соответствующие стороны, а также убедиться в равенстве углов между этими сторонами (сделайте это!). В то же время для проверки равенства фиолетовых треугольников по нашему признаку на этом рисунке не хватает данных. Без измерительных инструментов на нём мы не можем утверждать, что у фиолетовых треугольников равны их острые углы и стороны, соединяющие вершины этих углов. Если бы мы могли вырезать данные треуголь-

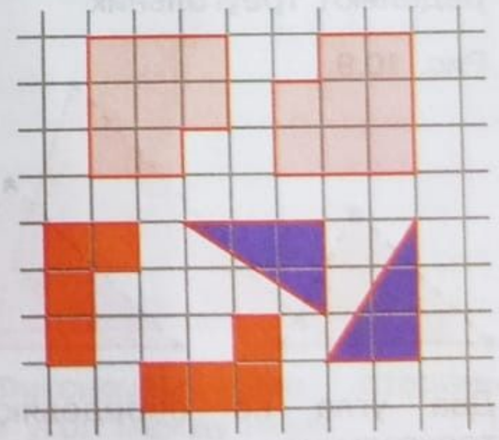
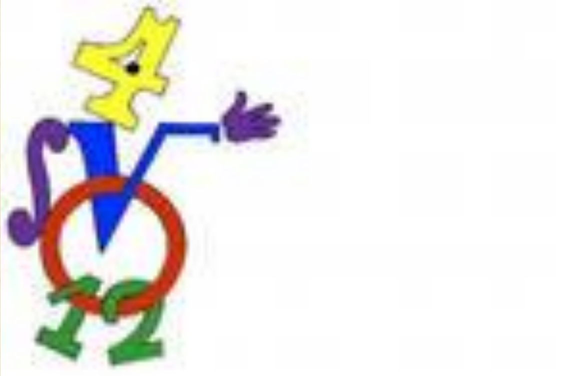
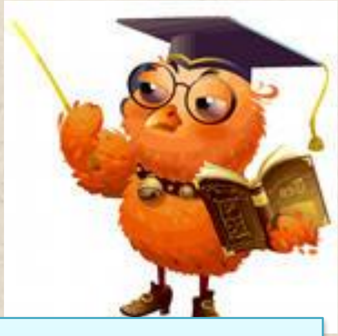


Рис. 10.7





Первый признак равенства треугольников

Геометрия – 7кл

Что такое признаки равенства?

В предыдущем параграфе мы с вами говорили о равенстве геометрических фигур. Давайте вспомним, что геометрические фигуры равны, если можно движением одну из них полностью совместить с другой. Но как применять это правило на практике? Неужели каждый раз придётся их накладывать друг на друга и пытаться физически совмещать! Хорошо ещё, если фигуры можно вырезать из бумаги, а как быть, если они нарисованы на стене (рис. 10.1) или просто очень больших размеров? Посмотрите на футбольное поле: две его половины должны быть абсолютно одинаковыми, но как бы вы их совместили (рис. 10.2)? Сделать это можно только мысленно, проведя рассуждение или доказательство.

Возьмём другой пример. Перед тем как поставить в доме новую дверь, замерщик измеряет высоту и ширину дверного проёма (рис. 10.3), потом по ним изготавливают нужную дверь, и тогда уже её ставят на своё место. Так же и портной снимает нужные мерки с человека, чтобы изготовить одежду по его фигуре. То есть на практике всегда берут какие-то характеристики предмета, по которым однозначно определяют его размеры и форму. Набор таких параметров в геометрии называется **признаком фигуры**.

Рис. 10.2

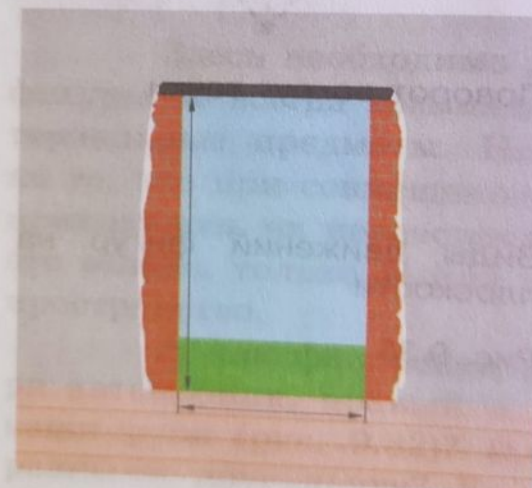


Рис. 10.3

Впрочем, признаки есть не только в геометрии. «Усы, лапы и хвост — вот мои документы!» — говорил персонаж известного мультфильма кот Матроскин. В биологии тоже существуют признаки растений и животных, а в медицине — признаки заболеваний.

Под признаком в биологии понимают набор каких-то качеств или особых свойств, по которым однозначно можно определить конкретный вид живых организмов. Подумайте, как бы вы сформулировали, например, признаки слона (рис. 10.4)? А знаете ли вы самый известный признак класса насекомых (рис. 10.5)? Как бы вы его сформулировали, глядя на приведённый рисунок? Какие вы знаете признаки простуды? Обычно их называют симптомами.

Какие элементы определяют треугольник?

Если у двух треугольников равны все их соответствующие стороны и углы, то по нашему признаку (пока не доказанному!) такие треугольники должны быть равны. Три стороны и три угла — это шесть элементов треугольника (рис. 10.8). Можно ли обойтись меньшим числом соответственно равных элементов, чтобы проверить равенство треугольников? Сколько вообще элементов могут однозначно определить треугольник?

Вначале попробуем проверить, не будет ли достаточно двух равных элементов. Это могут быть две стороны, два угла или один угол и одна сторона треугольника.

Зафиксируем длины двух его сторон и будем менять угол между ними. Как можно видеть на рисунке 10.9, мы легко можем получить сколько угодно различных треугольников с этими элементами. Значит, только две стороны ещё не определяют треугольник. Теперь зафиксируем одну сторону треугольника и один его угол, прилежащий к этой стороне. Если мы будем изменять вторую сторону треугольника (рис. 10.10), то опять получим бесконечно много треугольников с данными элементами.

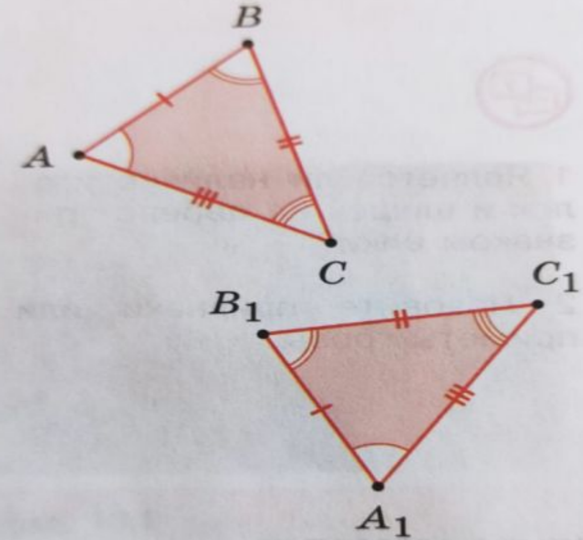


Рис. 10.8

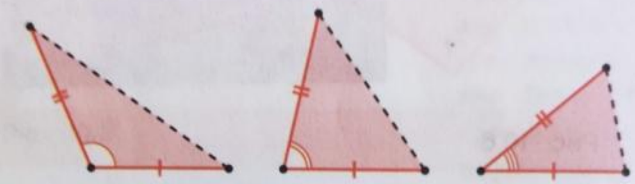
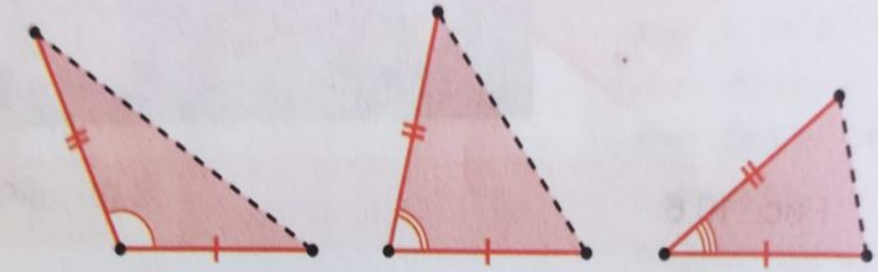

Две стороны и угол не определяют треугольник

Рис. 10.9


Два угла не определяют треугольник

Рис. 10.11

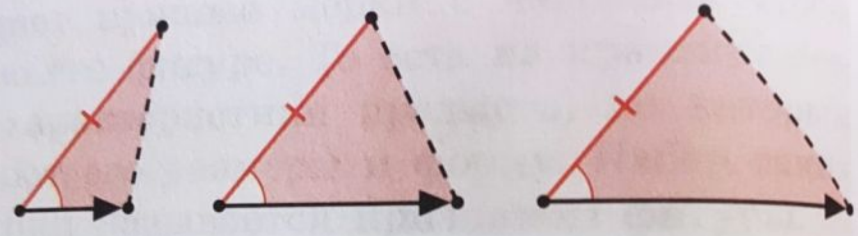


Две стороны и угол не определяют треугольник

Рис. 10.9

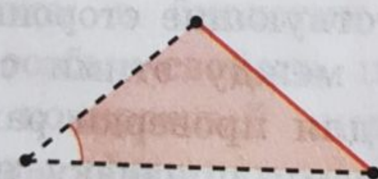
Два угла не определяют треугольник

Рис. 10.11



Одна сторона и угол не определяют треугольник

Рис. 10.10

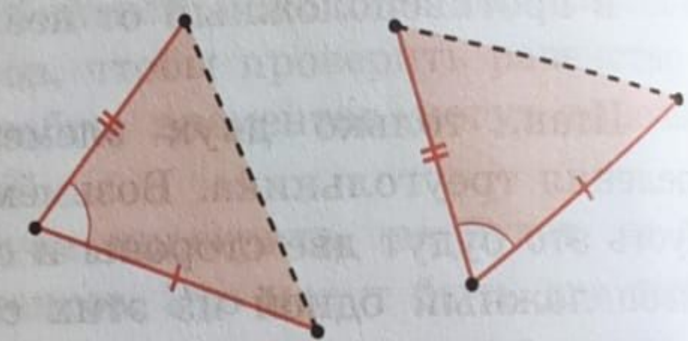


Один угол и противолежащая от него сторона не определяют треугольник

Рис. 10.12

Первый признак равенства треугольников

Если две стороны и угол между ними в одном треугольнике соответственно равны двум сторонам и углу между ними в другом треугольнике, то такие треугольники равны.



Треугольники равны по первому признаку

Рис. 10.16

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Пусть у нас есть два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы A и A_1 равны, $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$. Попробуем мысленно совместить эти треугольники. Вначале приложим треугольник $A_1B_1C_1$ к лучу AB так, чтобы вершина A_1 совпадала с началом луча — точкой A, вершина B_1 лежала на луче, а вершина C_1 оказалась по ту же сторону от прямой AB, что и вершина C (рис. 10.19). Сделать так можно по аксиоме движения плоскости. Так как по условию $AB = A_1B_1$, то вершины B и B_1 обязательно совпадут (рис. 10.20), иначе от точки A на луче AB можно было бы отложить отрезок данной длины двумя способами. Это запрещено аксиомой откладывания отрезков.

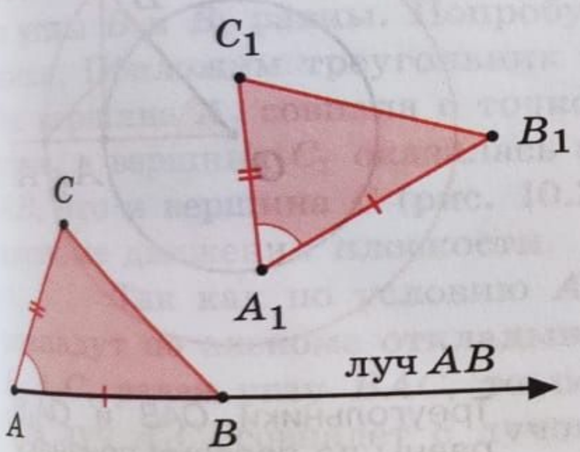


Рис. 10.18

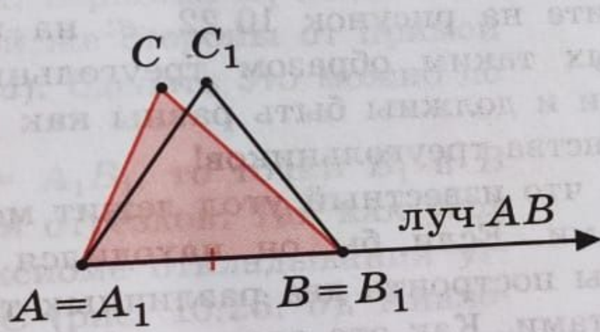


Рис. 10.19

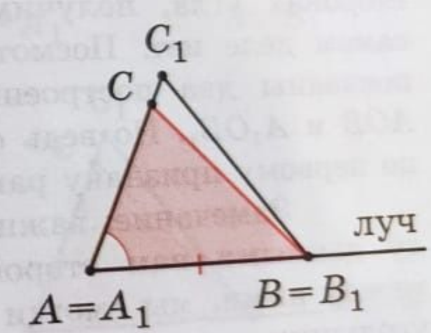


Рис. 10.20

По условию углы BAC и $B_1A_1C_1$ равны и отложены от луча AB в одну полуплоскость, поэтому луч A_1C_1 совпадёт с лучом AC. Иначе нарушалась бы аксиома откладывания углов (рис. 10.20).

Значит, точка C_1 лежит на луче AC. Поскольку $AC = A_1C_1$, то точки C_1 и C должны совпасть по аксиоме откладывания отрезков на луче (рис. 10.21). Таким образом, мы смогли совместить все три вершины данных нам треугольников, а при этом, очевидно, совместятся все их стороны и углы. Значит, эти треугольники равны.

Что и требовалось доказать.

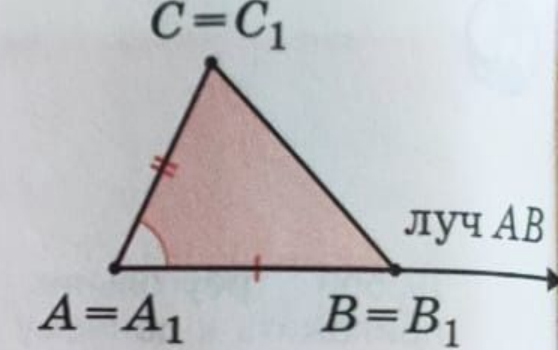


Рис. 10.21

Доказывать признаки нужно с помощью* теоремы *(утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений).

Сами рассуждения называются* доказательством *теоремы.

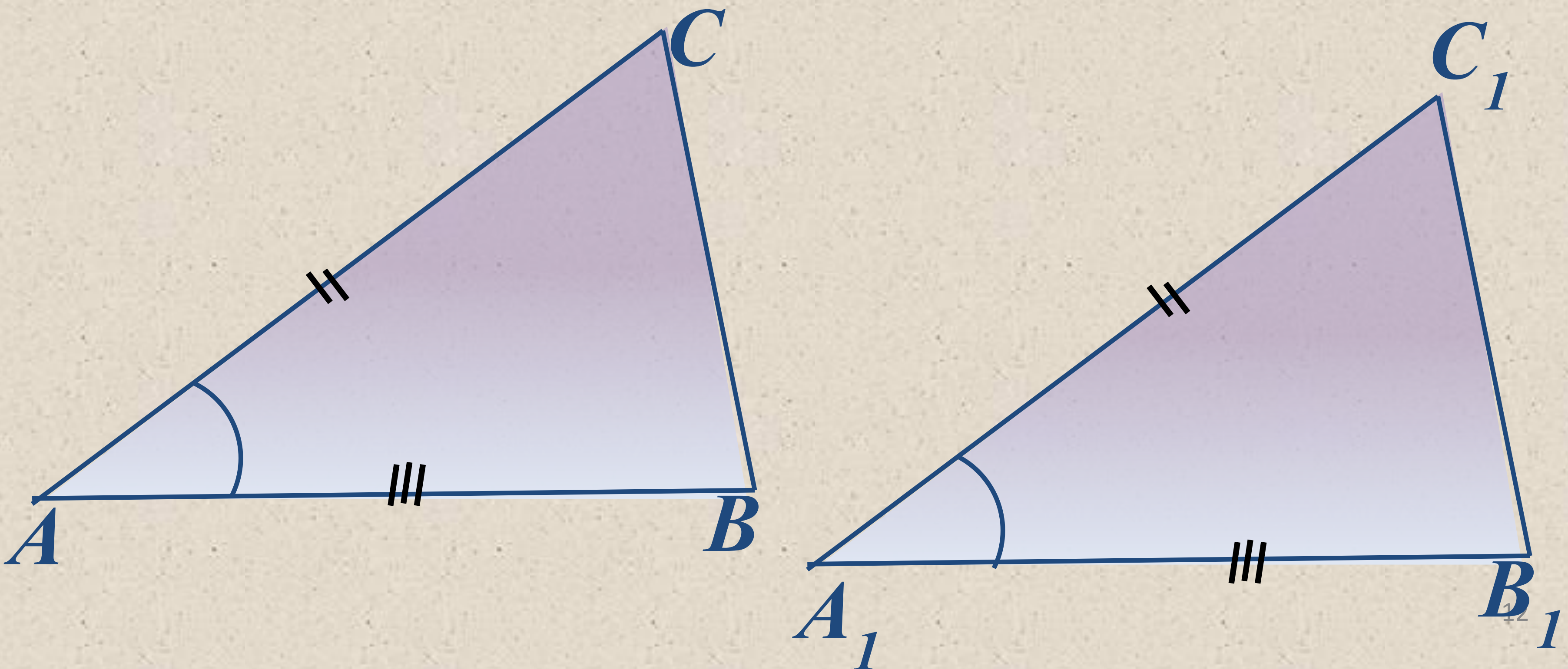
***Любая теорема состоит из* условия и заключения.**

Условие – это уже известные факты, о которых говорится в теореме (ДАНО), а заключение – это то, что нужно получить, доказать (ДОКАЗАТЬ).

Первый признак равенства треугольников

(по двум сторонам и углу между ними)

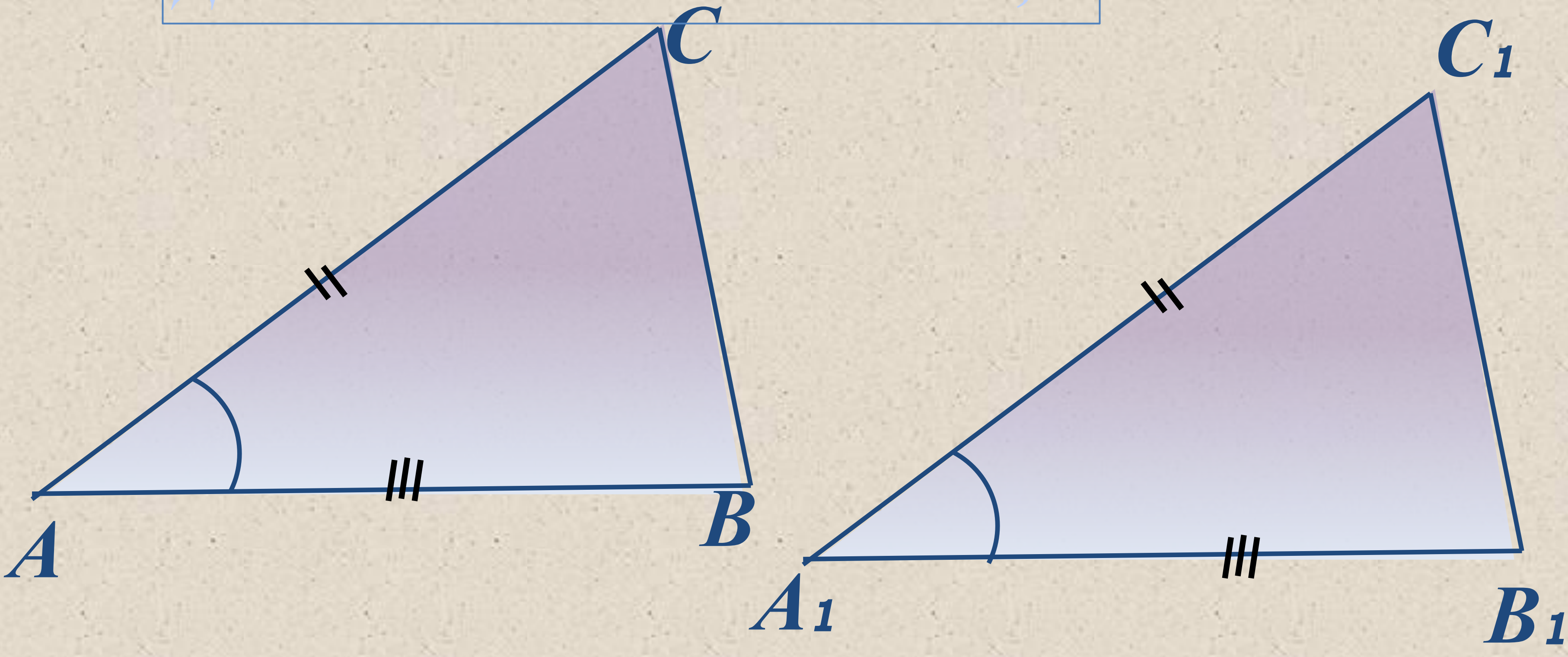
Теорема: Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,

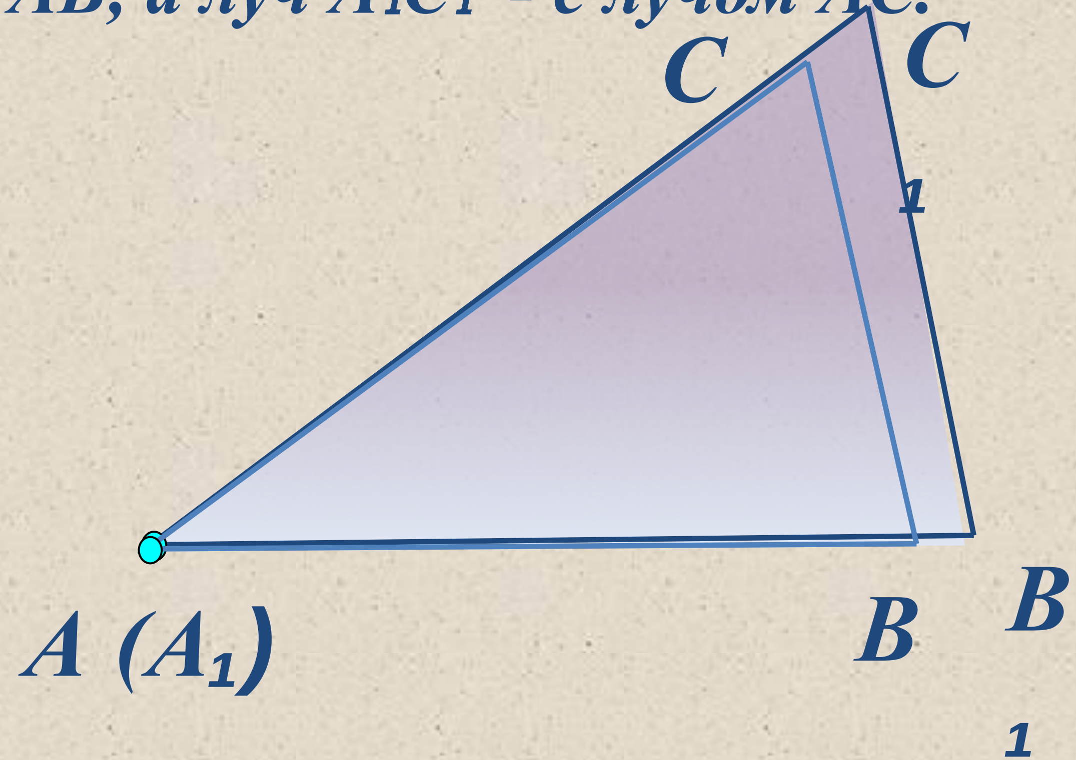
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказать: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$,

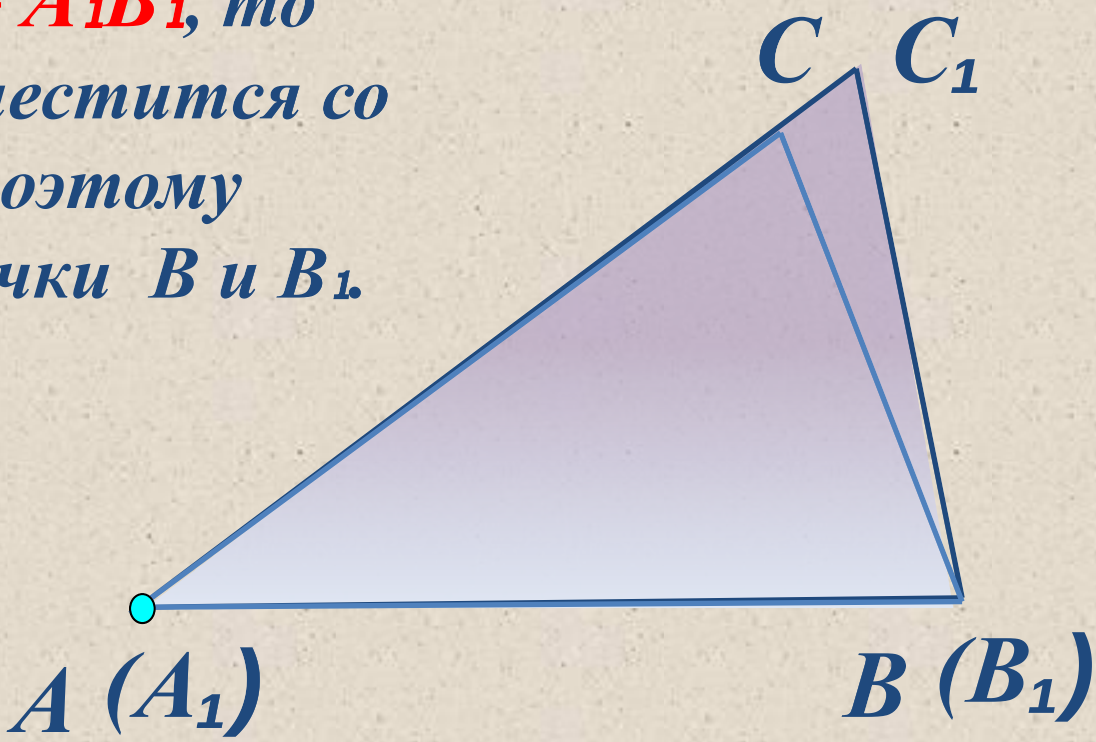


Доказательство.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то ΔABC можно наложить на $\Delta A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1. Луч A_1B_1 совместится с лучом AB, а луч A_1C_1 - с лучом AC.

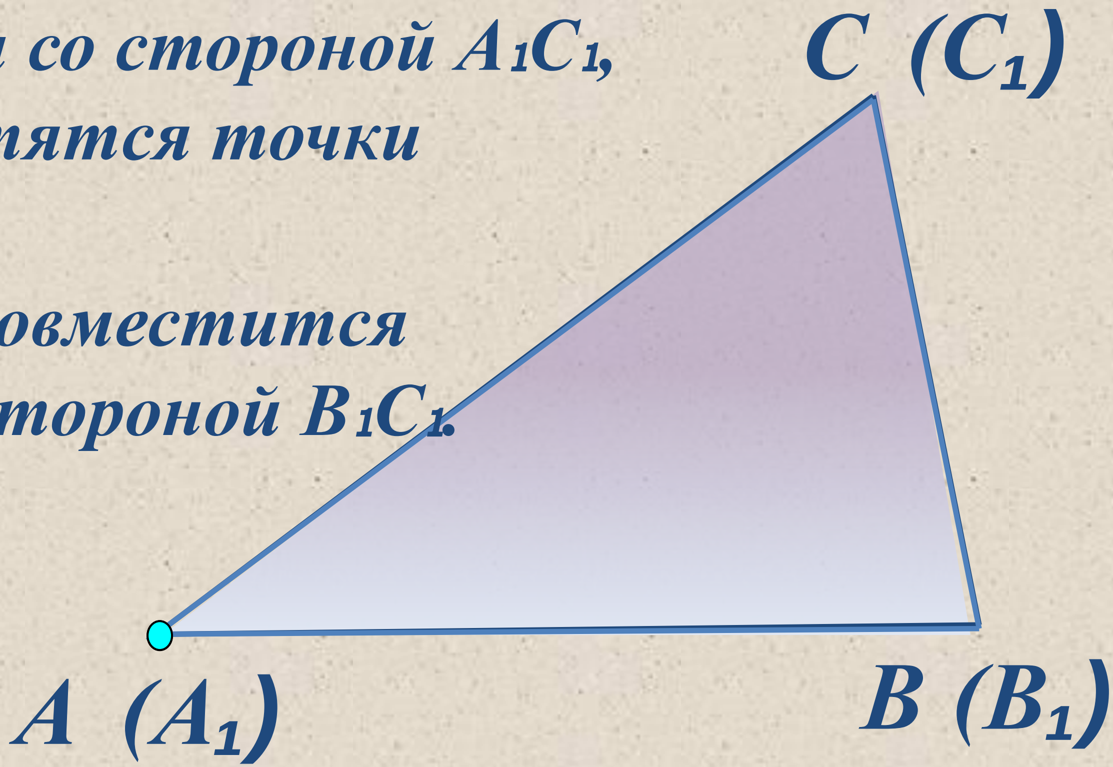


Поскольку ***$AB = A_1B_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, поэтому совместятся точки B и B_1.***



Поскольку $AC = A_1C_1$, то сторона AC совместится со стороной A_1C_1, поэтому совместятся точки C и C_1.

Следовательно совместится сторона BC со стороной B_1C_1.



Значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по определению равных треугольников), что и требовалось доказать (ЧТД).