

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Лекция 15.

Тема: Циркуляция вектора напряженности. Расчеты потенциальных полей.

Учебник:

Трофимова Т.И. Курс физики : учеб. пособ. для вузов / Т. И. Трофимова. - М.: Академия, 2007.- с. **155-160**.

к.ф.-м.н.
Куручкин А.

Циркуляция вектора напряжённости

Описание ситуации. В электрическом поле, создаваемом зарядом q , находится заряд q_+ . Оба заряда положительные.

Какую работу нужно совершить, чтобы перенести заряд q_+ из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории?

По определению

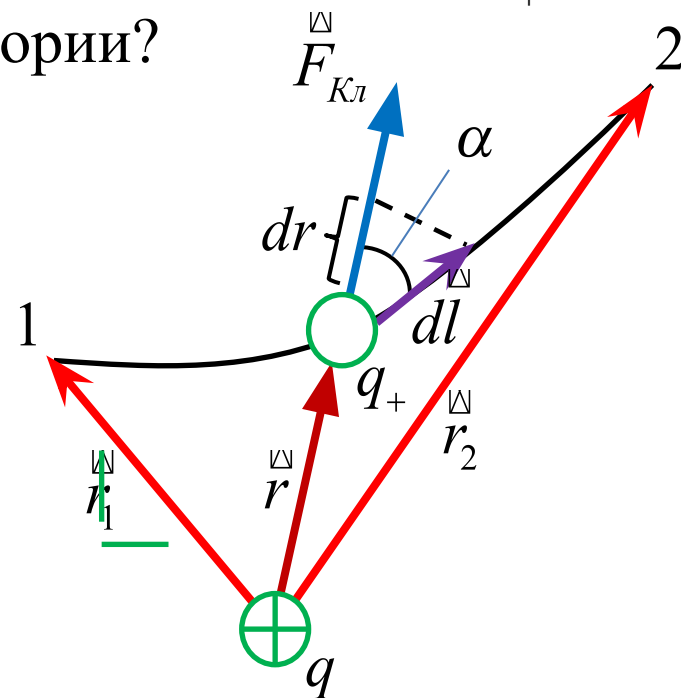
работа силы \vec{F} равна

$$dA = \vec{F}_{Кл} \cdot d\vec{l} = F_{Кл} dl \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{qq_+}{r^2} dl \cos \alpha,$$

где q – заряд, создающий поле;

q_+ – заряд, находящийся в поле действия заряда q .

α – угол между векторами $\vec{F}_{Кл}$ и $d\vec{l}$.

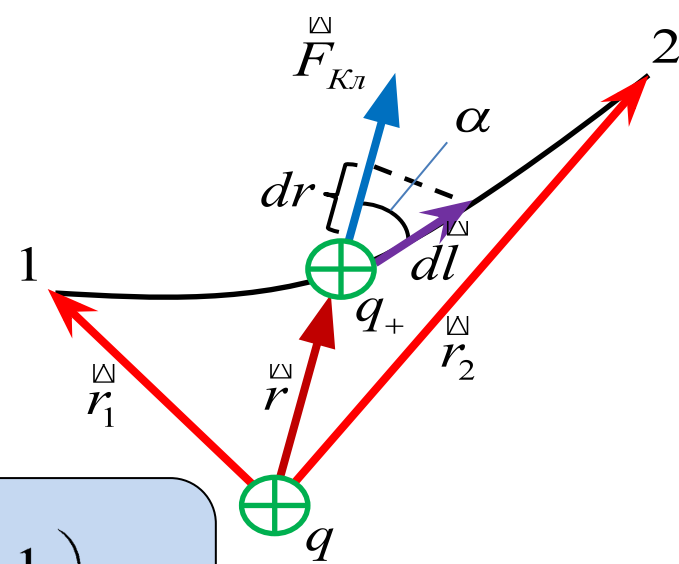


Так как $dl \cos \alpha = dr$, то

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{qq_+}{r^2} dr.$$

Отсюда

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$



Из формулы (1) мы видим, что работа электростатических сил A_{12} :

- 1) **не зависит** от формы пути;
- 2) **зависит** от положения начальной и конечной точек движения.

Поэтому, электростатическое поле является **потенциальным**, а электростатические силы – **консервативными**.

3) будет равна **нулю** при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути L (является следствием потенциальности электростатического поля).

$$\oint_L dA = 0 \quad (2)$$

Т.к.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left[\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+} \Rightarrow \vec{F} = q_+ \vec{E} \right] = q_+ \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

то в соответствии с утверждением (2)

$$\oint_L q_+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_+ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Поэтому

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Таким образом,

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (3)$$

Интеграл (3) называется циркуляцией вектора напряжённости.

Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля

Циркуляция вектора напряжённости электростатического поля
вдоль любого замкнутого контура равна **нулю**.

Важно!

Любое силовое поле, обладающее свойством $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$,
называется **потенциальным**.

Освежим воспоминания из раздела «Механика».

Вопрос №1. Что называется потенциальной энергией?

Ответ. Потенциальная энергия E_p – СФВ, являющаяся **мерой взаимодействия** тел или частей тела и **зависящая от расстояния между ними**.

Если в системе действуют потенциальные силы, то может быть определена некоторая функция координат взаимодействующих тел $E_p(x, y, z)$, которая называется **потенциальной энергией системы**.

Вопрос №2. Как формулируется теорема о потенциальной энергии?

Ответ. Убыль **потенциальной энергии** взаимодействия тел равна работе всех **консервативных сил**, действующих на тела системы в процессе перехода из начального состояния в конечное.

$$E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E = \sum_{i=1}^n A_i \quad (4)$$

Вопрос №3. В чем особенность **потенциальной энергии**, что отличает её от **кинетической энергии**?

Ответ.

1) **Потенциальная энергия** определяется с точностью до произвольной постоянной C , значение которой зависит от выбора **нулевого уровня потенциальной энергии**.

2) **Потенциальная энергия** может иметь как положительное, так и отрицательное числовое значение.

Согласно уравнению (1)

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Отсюда, с учётом уравнения (4)

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (5)$$

Следовательно, **потенциальная энергия** взаимодействия двух точечных зарядов определяется выражением:

$$E_p = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C. \quad (6)$$

Важно!

1) Значение постоянной C зависит от выбора **нулевого уровня** потенциальной энергии.

2) Заряды, находящиеся на бесконечно большом расстоянии, не взаимодействуют, поэтому при $r \rightarrow \infty$ $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$, откуда $C = 0$. В этом случае

$$E_p = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}. \quad (7)$$

3) **Потенциальная энергия** взаимодействия **одноименных** зарядов (энергия отталкивания) **положительна**, а **разноименных** (энергия притяжения) – **отрицательна**. По мере уменьшения взаимного расстояния энергия взаимодействия (7) растет по модулю.

Новый вопрос. Как определить **потенциальную энергию** заряда q_0 , находящегося в поле n зарядов?

Ответ. Если поле создаётся системой n точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n , то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом q_0 , равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия E_p заряда q_0 , находящегося в этом поле, равна сумме потенциальных энергий E_{pi} каждого из зарядов:

$$E_p = \sum_{i=1}^n E_{pi} = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_i}. \quad (8)$$

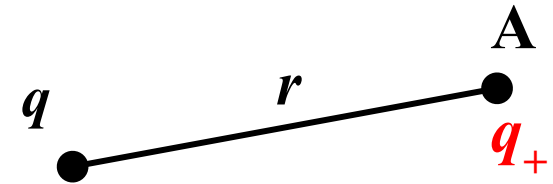
Потенциал φ электрического поля

Для характеристики полей удобно ввести в рассмотрение **энергетическую характеристику** – потенциал.

Обсудим уравнение*:

q – заряд, создающий поле;

r – расстояние от этого заряда до той точки поля A , в которой помещён пробный заряд q_+ .



$$*E_p = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C.$$

Различные пробные заряды q_1, q_2, \dots будут обладать в т. A различной потенциальной энергией.

Отношение $\frac{E_p}{q_+}$ не зависит от величины пробного заряда q_+ и может служить **энергетической характеристикой** электрического поля в данной точке. Эта характеристика называется **потенциалом φ электрического поля**.

Потенциал электрического поля φ – СФВ, энергетическая характеристика поля, равная потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд.

$$\varphi = \frac{E_p}{q_+} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В} \right]. \quad (9)$$

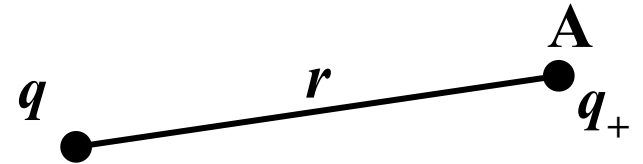
Свойства потенциала.

- 1) Потенциал – величина **алгебраическая** (как и заряд q). Может быть **положительной** и **отрицательной**.
- 2) Числовое значение потенциала *зависит* от выбора нулевого уровня φ . **Нулевой уровень потенциала** – геометрическое место точек поля, потенциал которых принимается равным нулю. Выбирается произвольно.

Потенциал φ поля точечного заряда

Если поле создаётся точечным зарядом q , то пробный заряд q_+ обладает в точке A потенциальной энергией (6).

$$E_p = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C.$$



Следовательно, потенциал электрического поля φ , созданного точечным зарядом q , в точке A равен:

$$\varphi = \frac{E_p}{q_+} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C.$$

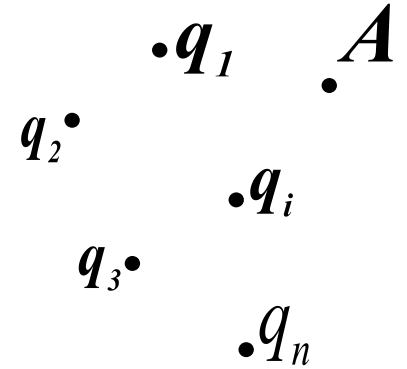
Примем, что $\varphi=0$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда $C=0$ и

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (10)$$

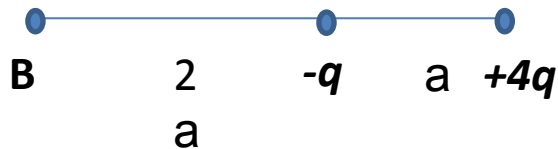
Принцип суперпозиции для потенциала

Если поле создано совокупностью точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$, то его потенциал φ_Σ в т. A равен алгебраической сумме потенциалов φ_i создаваемых в т. A каждым из зарядов q_i в отдельности:

$$\varphi_\Sigma = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (11)$$



Пример. Найти результирующий потенциал в точке В.



$$\varphi_\Sigma = \varphi_{1B} + \varphi_{2B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{2a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q}{3a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-3q + 8q}{6a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{5q}{6a} \right)$$

Энергия взаимодействия системы зарядов

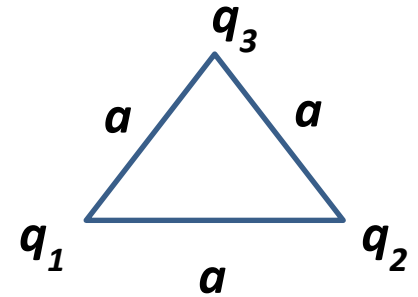
$$E_{p\Sigma} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(q_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \varphi_k \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i. \quad (12)$$

$\varphi_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \varphi_k$ - суммарный потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i , в точке, где помещается заряд q_i

Множитель $\frac{1}{2}$ в (12) появился потому, что в результате суммирования энергий зарядов все парные взаимодействия оказались учтены дважды.

Пример. Найти энергию взаимодействия системы зарядов.

$$\begin{aligned}
 E_{p\Sigma} &= \frac{1}{2} \left(q_1 \left(\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{r_{12} + r_{13}} \right) + q_2 \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{r_{21} + r_{23}} \right) + q_3 \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{r_{31} + r_{32}} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(q_1 \left(k \frac{q_2}{a} + k \frac{q_3}{a} \right) + q_2 \left(k \frac{q_1}{a} + k \frac{q_3}{a} \right) + q_3 \left(k \frac{q_1}{a} + k \frac{q_2}{a} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} k \left(\left(\frac{q_1 q_2}{a} + \frac{q_1 q_3}{a} \right) + \left(\frac{q_2 q_1}{a} + \frac{q_2 q_3}{a} \right) + \left(\frac{q_3 q_1}{a} + \frac{q_3 q_2}{a} \right) \right) = \\
 &= \frac{k}{a} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3)
 \end{aligned}$$



Работа, совершаемая силами электростатического поля

С учётом формулы (5)

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{qq_+}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} = q_+ \left(\frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r_2} \right) \Rightarrow$$

\downarrow \downarrow
 φ_1 φ_2

$$A_{12} = q_+ (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (13)$$

т.е. **работа**, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда q_+ из точки 1 в точку 2 равна произведению перемещаемого заряда на **разность потенциалов** в начальной и конечной точках.

Представим (13) в виде

$$\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_+}, \quad (14)$$

т.е. **разность потенциалов между точками 1 и 2** - это скалярная физическая величина, равная работе сил электростатического поля по перемещению **единичного** ($q_+ = 1 \text{ Кл}$) пробного заряда из точки 1 в точку 2.

Разность потенциалов между двумя точками равняется 1В, если при перемещении пробного заряда в 1Кл из одной точки в другую силы электрического поля совершают работу 1Дж.

Важный нюанс! При решении конкретных задач **физический смысл имеет разность потенциалов между двумя точками электростатического поля.**

Напряжённость как градиент потенциала

Необходимо: найти взаимосвязь между напряжённостью электростатического поля – **силовой характеристикой поля** и потенциалом – **энергетической характеристикой поля**.

Мы знаем, что сила электрического взаимодействия является **консервативной**. Эта сила взаимосвязана с потенциальной энергией:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = -dE_p$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

где

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz,$$

откуда

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

dE_p - полный дифференциал (потенциальная энергия зависит только от начального и конечного положения тела, и не зависит от пути, по которому происходит переход)

Таким образом, **убыль** потенциальной энергии взаимодействия зарядов, приходящаяся на единицу длины данного направления, численно равна проекции силы на это направление.

Для полного вектора получим

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right),$$

$$\vec{F} = -\text{grad}E_p = -\nabla E_p.$$

Вспомним, что

Градиентом называется **векторная** характеристика **скалярного поля**; вектор градиента направлен в сторону **наиболее быстрого возрастания** скалярной величины в пространстве.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

Фундаментальная связь между потенциалом и напряженностью электрического поля: вектор напряженности поля равен взятому с **обратным знаком** градиенту потенциала:

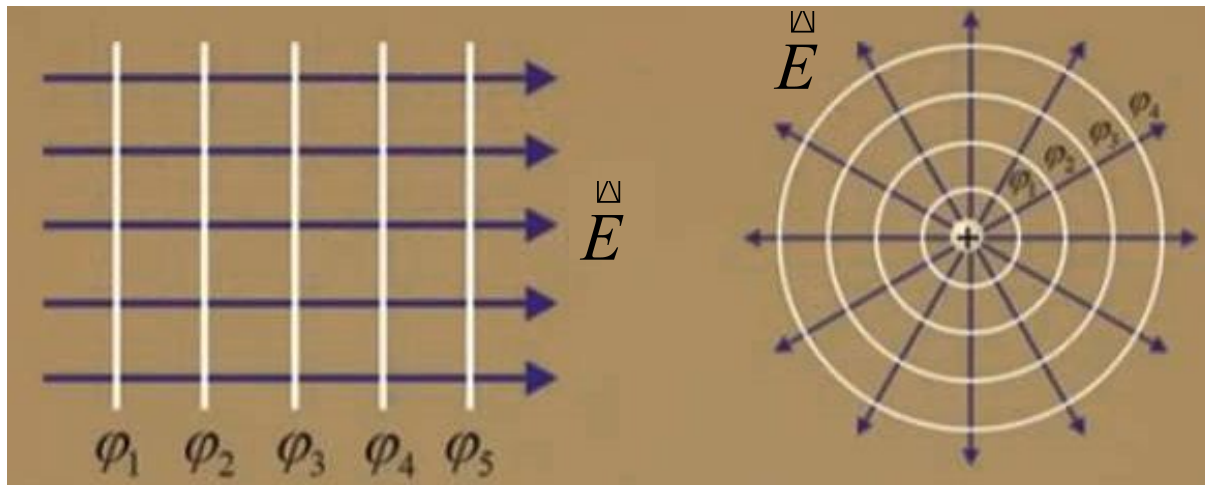
$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k\right) = -\nabla\varphi. \quad (15)$$

Важно!

1. Однозначная связь между **напряженностью** и **потенциалом** говорит об **эквивалентности** описания полей как путем задания **напряженностей**, так и путем задания **потенциалов**.
2. **Напряженность** поля равна **градиенту потенциала** со знаком «-». Знак «-» определяется тем, что **вектор напряженности** поля всегда направлен в сторону **быстрейшего убывания** потенциала электрического поля.

Эквипотенциальные поверхности

Для графического изображения потенциала электростатического поля пользуются **эквипотенциальными поверхностями** – поверхностями, во всех точках которых потенциал φ имеет одно и то же значение ($\varphi = const$).



Эквипотенциальные
поверхности однородного
поля

Эквипотенциальные
поверхности точечного
заряда

Выводы

1. **Работа** сил эл. ст. поля при перемещении заряда по ней равна нулю $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$.

Все точки эквипотенциальной поверхности имеют **одинаковый потенциал**, поэтому **работа** по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т.е. электростатические силы, действующие на заряд, всегда направлены **по нормалям** к эквипотенциальным поверхностям.

2. Следовательно, вектор всегда **нормален** к эквипотенциальным поверхностям, поэтому линии вектора \vec{E} ортогональны к этим поверхностям.

3) Эквипотенциальные поверхности **не пересекаются**.

4) «Густота» эквипотенциальных поверхностей пропорциональна модулю $|\varphi|$, т.е. она характеризует пространственное распределение **потенциала**.

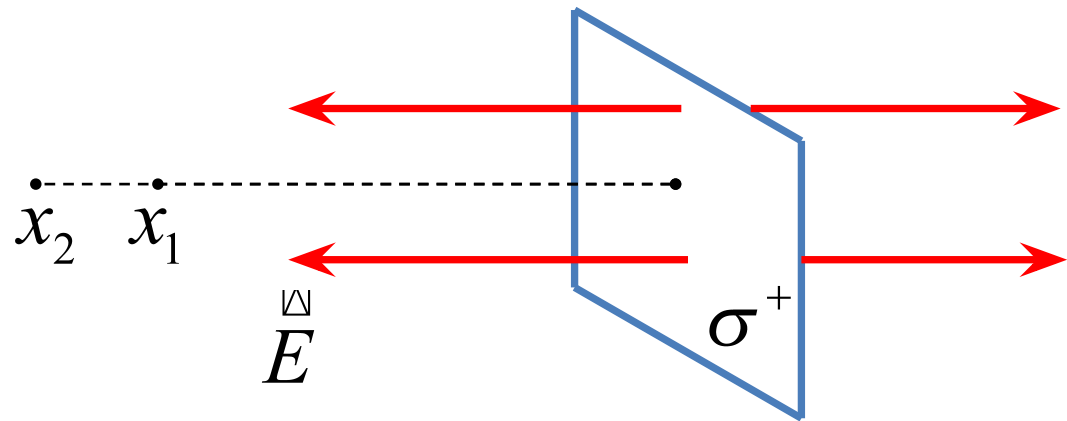
Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были **одинаковы**. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует **напряженность** поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены **гуще**, напряженность поля **больше**.

Формулы для вычисления разности потенциалов по напряжённости поля

1. *Равномерно заряженная бесконечная плоскость*

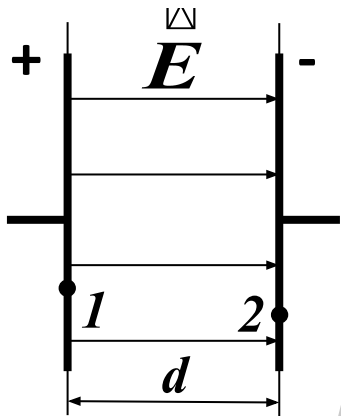
Разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстоянии x_1 и x_2 от плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \left[E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1).$$



2. Две бесконечные параллельные заряженные плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \left[E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right] = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$$



Если электрическое поле E однородно, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d,$$

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

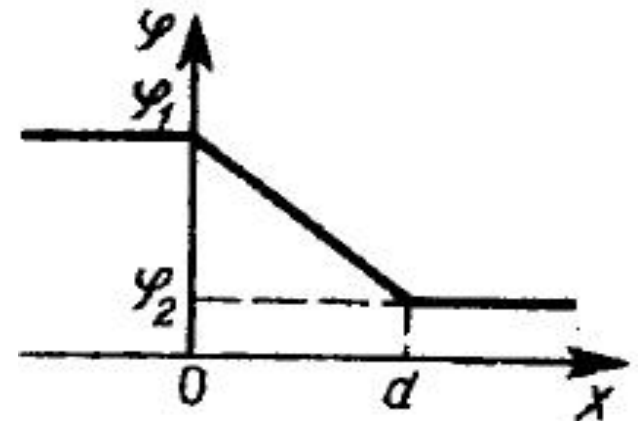


График зависимости потенциала от координаты.

3. Равномерно заряженная сферическая плоскость

$$\text{при } r > R, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \left[E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right] = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$\text{при } r_1 = r \text{ и } r_2 = \infty, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

Внутри сферической
поверхности потенциал
всюду одинаков и равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

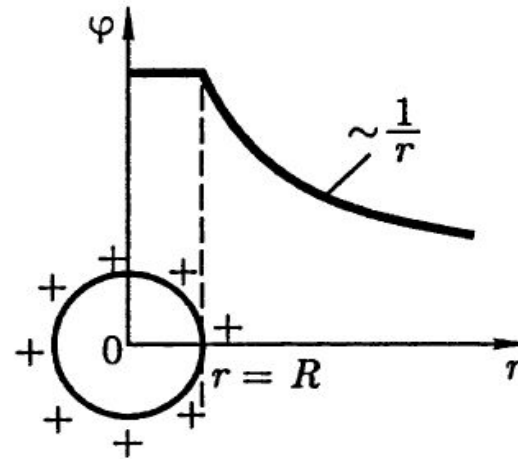


График зависимости φ от r

4. Объёмно заряженный шар

при $r_1' < R, r_2' < R, r_2' > r_1'$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1'}^{r_2'} E dr = \left[E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r' \right] = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \left[(r_2')^2 - (r_1')^2 \right],$$

где r_1 и r_2 – расстояния от центра шара.

5. Равномерно заряженный бесконечный цилиндр радиусом R

при $r_1' < R, r_2' < R, r_2' > r_1'$,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1'}^{r_2'} E dr = \left[E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^3} r' \right] = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \left[(r_2')^2 - (r_1')^2 \right],$$

где r_1 и r_2 – расстояния от оси заряженного цилиндра.