ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Лекция 15.

Тема: Циркуляция вектора напряженности. Расчеты потенциальных полей.

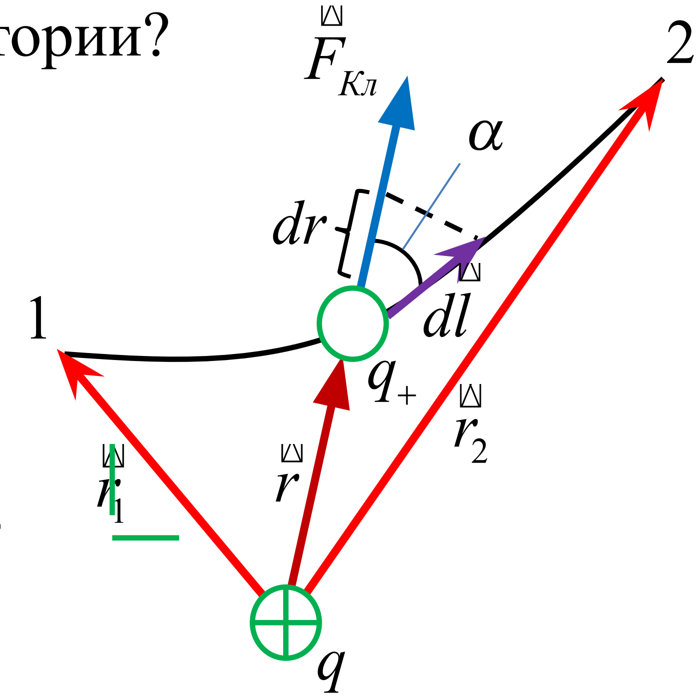
Учебник:

Трофимова Т.И. Курс физики : учеб. пособ. для вузов / Т. И. Трофимова. - М.: Академия, 2007.- с. 155-160.

к.ф.-м.н.
Курочкин А.

Циркуляция вектора напряжённости

Описание ситуации. В электрическом поле, создаваемом зарядом q, находится заряд q_+. Оба заряда положительные. **Какую работу нужно совершить**, чтобы перенести заряд q_+ из точки ***1*** в точку ***2*** по произвольной траектории?



По определению

работа силы $\vec{F}$ равна

$$dA = \vec{F}_{Кл} d\vec{l} = F_{Кл} dl \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{qq_+}{r^2} dl \cos\alpha,$$

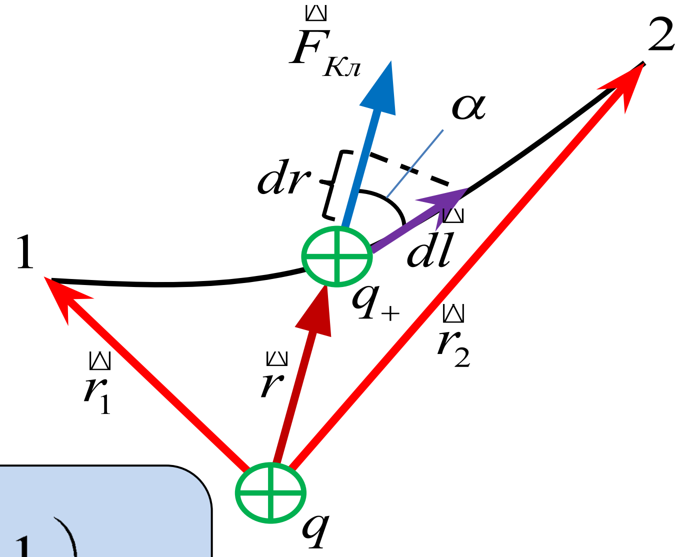
где q – заряд, создающий поле;

q_+ – заряд, находящийся в поле действия заряда q.

α – угол между векторами $\vec{F}_{Кл}$ и $d\vec{l}$.

Так как $dl\cos\alpha = dr$, то

$$dA = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{qq_+}{r^2}dr.$$



Отсюда

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad (1)$$

Из формулы (*1*) мы видим, что работа электростатических сил *A_{12}*:

1) не зависит от **формы пути**;

2) зависит от **положения начальной и конечной точек движения.**

Поэтому, **электростатическое поле** является **потенциальным**, а **электростатические силы** – **консервативными**.

3) будет равна **нулю** при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле **по <u>любому</u> <u>замкнутому</u> пути *L*** *(является следствием потенциальности электростатического поля).*

$$\oint_L dA = 0 \quad (2)$$

т.к.

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left[\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+} \Rightarrow \vec{F} = q_+ \vec{E} \right] = q_+ \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

то в соответствии с утверждением (2)

$$\oint_L q_+ \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_+ \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Поэтому

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Таким образом,

$$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0. \quad (3)$$

Интеграл (3) называется **циркуляцией вектора напряжённости**.

Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля

Циркуляция вектора напряжённости электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна **нулю**.

Важно!

Любое силовое поле, обладающее свойством $\oint_L \vec{E}\,d\vec{l} = 0$, называется **потенциальным.**

Освежим воспоминания из раздела «Механика».

Вопрос №1. Что называется потенциальной энергией?

Ответ. **Потенциальная энергия E_p – СФВ**, являющаяся **мерой взаимодействия** тел или частей тела и **зависящая от расстояния между ними.**

Если в системе действуют потенциальные силы, то может быть определена некоторая функция координат взаимодействующих тел $E_p(x,y,z)$, которая называется **потенциальной энергией системы**.

Вопрос №2. Как формулируется теорема о потенциальной энергии?

Ответ. Убыль **потенциальной энергии** взаимодействия тел равна работе всех **консервативных сил**, действующих на тела системы в процессе перехода из начального состояния в конечное.

$$E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (4)$$

Вопрос №3. В чем особенность **потенциальной энергии**, что отличает её от **кинетической энергии**?

Ответ.

1) **Потенциальная энергия** определяется с точностью до произвольной постоянной *C*, значение которой зависит от выбора **нулевого уровня потенциальной энергии**.

2) **Потенциальная энергия** может иметь как положительное, так и отрицательное числовое значение.

Согласно уравнению (1)

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Отсюда, с учётом уравнения (4)

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (5)$$

Следовательно, **потенциальная энергия** взаимодействия двух точечных зарядов определяется выражением:

$$E_p = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + C. \quad (6)$$

Важно!

1) Значение постоянной C зависит от выбора **нулевого уровня потенциальной энергии**.

2) Заряды, находящиеся на бесконечно большом расстоянии, не взаимодействуют, поэтому при $r \to \infty$ $E_p(r \to \infty) = 0$, откуда $C = 0$. В этом случае

$$E_p = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \quad (7)$$

3) **Потенциальная энергия** взаимодействия **одноименных** зарядов (энергия отталкивания) **положительна**, а **разноименных** (энергия притяжения) – **отрицательна**. По мере уменьшения взаимного расстояния энергия взаимодействия (7) растет по модулю.

Новый вопрос. Как определить **потенциальную энергию** заряда q_0, находящегося в поле n зарядов?

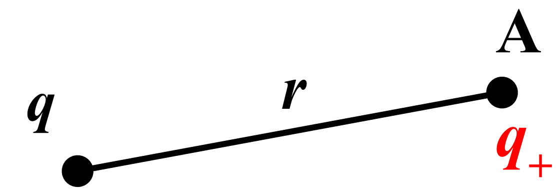
Ответ. Если поле создаётся системой n точечных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом q_0, равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия E_p заряда q_0, находящегося в этом поле, равна сумме потенциальных энергий E_{pi}, каждого из зарядов:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} E_{pi} = q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_i}. \quad (8)$$

Потенциал φ электрического поля

Для характеристики полей удобно ввести в рассмотрение **энергетическую характеристику** – **потенциал**.

Обсудим уравнение*:



q – заряд, создающий поле;
r – расстояние от этого заряда до той точки поля A, в которой помещён пробный заряд q_+.

$$^*E_p = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + C.$$

Различные пробные заряды q_1, q_2, … будут обладать в т. A различной потенциальной энергией.

Отношение $\boxed{\dfrac{E_p}{q_+}}$ не зависит от величины пробного заряда q_+ и может служить **энергетической характеристикой электрического поля** в данной точке. Эта характеристика называется **потенциалом φ электрического поля**.

Потенциал электрического поля φ – СФВ, энергетическая характеристика поля, равная потенциальной энергии, которой обладал бы в данной точке поля единичный положительный заряд.

$$\varphi = \frac{E_p}{q_+} \quad \left[\frac{Дж}{Кл} = В \right]. \qquad (9)$$

Свойства потенциала.

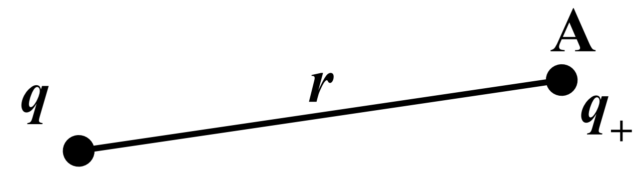
1) Потенциал – величина **алгебраическая** (как и заряд q). Может быть **положительной** и **отрицательной**.

2) Числовое значение потенциала *зависит* от выбора нулевого уровня φ. ***Нулевой уровень потенциала*** – геометрическое место точек поля, потенциал которых принимается равным нулю. Выбирается произвольно.

Потенциал φ поля точечного заряда

Если поле создаётся точечным зарядом q, то пробный заряд q_+ обладает в точке A **потенциальной энергией** (6).

$$E_p = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + C.$$



Следовательно, **потенциал электрического поля** φ, созданного точечным зарядом q, в точке A равен:

$$\varphi = \frac{E_p}{q_+} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + C.$$

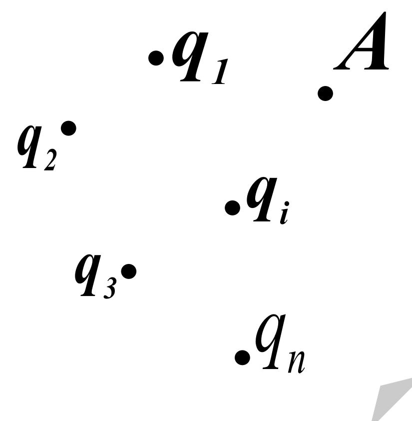
Примем, что φ=0 при $r\rightarrow\infty$. Тогда C=0 и

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \quad (10)}$$

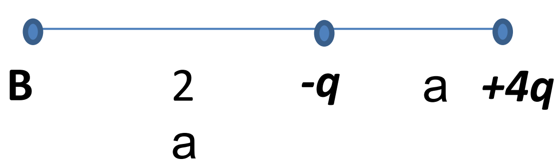
Принцип суперпозиции для потенциала

Если поле создано совокупностью точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots q_n$, то его потенциал φ_Σ в т. A равен алгебраической сумме потенциалов φ_i создаваемых в т. A каждым из зарядов q_i в отдельности:

$$\varphi_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}. \quad (11)$$



Пример. Найти результирующий потенциал в точке B.



$$\varphi_\Sigma = \varphi_{1B} + \varphi_{2B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{2a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{3a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-3q+8q}{6a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{5q}{6a}\right)$$

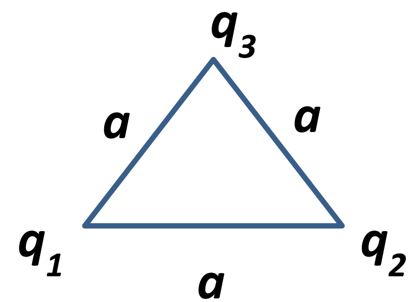
Энергия взаимодействия системы зарядов

$$E_{p\Sigma} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(q_i \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \varphi_k \right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i . \quad (12)$$

$\varphi_i = \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \varphi_k$ - суммарный потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i, в точке, где помещается заряд q_i

Множитель $\frac{1}{2}$ в (12) появился потому, что в результате суммирования энергий зарядов все парные взаимодействия оказались учтены дважды.

Пример. Найти энергию взаимодействия системы зарядов.



$$E_{p\Sigma} = \frac{1}{2}\left(q_1\left(\underbrace{\varphi_2 + \varphi_3}_{\varphi_1} \right) + q_2\left(\underbrace{\varphi_1 + \varphi_3}_{\varphi_2} \right) + q_3\left(\underbrace{\varphi_1 + \varphi_2}_{\varphi_3} \right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(q_1\left(k\frac{q_2}{a} + k\frac{q_3}{a} \right) + q_2\left(k\frac{q_1}{a} + k\frac{q_3}{a} \right) + q_3\left(k\frac{q_1}{a} + k\frac{q_2}{a} \right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}k\left(\left(\frac{q_1 q_2}{a} + \frac{q_1 q_3}{a} \right) + \left(\frac{q_2 q_1}{a} + \frac{q_2 q_3}{a} \right) + \left(\frac{q_3 q_1}{a} + \frac{q_3 q_2}{a} \right)\right) =$$

$$= \frac{k}{a}\left(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 \right)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля

С учётом формулы (5)

$$A_{12} = \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq_+}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} = q_+\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \varphi_1}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_1}} - \underset{\substack{\downarrow \\ \varphi_2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r_2}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{A_{12} = q_+\left(\varphi_1 - \varphi_2\right), \quad (13)}$$

т.е. **работа**, совершаемая силами **электростатического поля** при перемещении заряда q_+ из точки 1 в точку 2 равна произведению перемещаемого заряда на **разность потенциалов** в начальной и конечной точках.

Представим (13) в виде

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_+}, \quad (14)$$

т.е. **разность потенциалов между точками *1* и *2*** - это скалярная физическая величина, равная работе сил электростатического поля по перемещению **единичного** (q_+=1Кл) пробного заряда из точки *1* в точку *2*.

Разность потенциалов между двумя точками равняется 1В, если при перемещении пробного заряда в 1Кл из одной точки в другую силы электрического поля совершают работу 1Дж.

Важный нюанс! При решении конкретных задач **физический смысл** имеет **разность потенциалов между двумя точками электростатического поля**.

Напряжённость как градиент потенциала

Необходимо: найти взаимосвязь между **напряжённостью электростатического поля** – **силовой характеристикой поля** и **потенциалом** – **энергетической характеристикой поля**.

Мы знаем, что сила электрического взаимодействия является **консервативной**. Эта сила взаимосвязана с **потенциальной энергией**:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = -dE_p$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

где

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

dE_p - полный дифференциал (потенциальная энергия зависит только от начального и конечного положения тела, и не зависит от пути, по которому происходи переход)

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz,$$

откуда

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

Таким образом, **убыль потенциальной энергии** взаимодействия зарядов, приходящаяся на единицу длины данного направления, численно равная проекции силы на это направление.

Для полного вектора получим

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right),$$

$$\vec{F} = -gradE_p = -\nabla E_p.$$

Вспомним, что

Градиентом называется **векторная** характеристика **скалярного поля**; вектор градиента направлен в сторону **наиболее быстрого возрастания** скалярной величины в пространстве.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Фундаментальная связь между потенциалом и напряженностью электрического поля: **вектор напряженности поля** равен взятому с **обратным знаком градиенту потенциала**:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla\varphi. \quad (15)$$

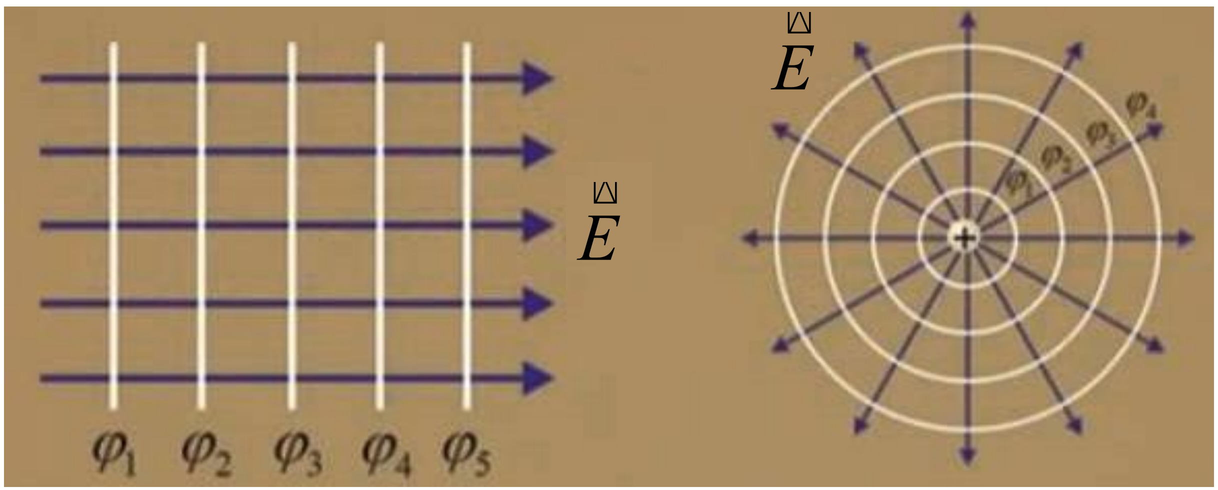
Важно!

1. Однозначная связь между **напряженностью** и **потенциалом** говорит об **эквивалентности** описания полей как путем задания **напряженностей**, так и путем задания **потенциалов**.

2. **Напряженность поля** равна **градиенту потенциала** со знаком «–». Знак «–» определяется тем, что **вектор напряженности поля** всегда направлен в сторону **быстрейшего убывания потенциала электрического поля**.

Эквипотенциальные поверхности

Для графического изображения потенциала электростатического поля пользуются **эквипотенциальными поверхностями** – поверхностями, во всех точках которых потенциал *φ* имеет одно и то же значение (*φ=const)*.



Эквипотенциальные поверхности однородного поля

Эквипотенциальные поверхности точечного заряда

Выводы

1. Работа сил эл. ст. поля при перемещении заряда по ней равна **нулю** $A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$.

Все точки **эквипотенциальной поверхности** имеют **одинаковый потенциал**, поэтому **работа** по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна **нулю**, т.е. электростатические силы, действующие на заряд, всегда направлены **по нормалям** к **эквипотенциальным поверхностям**.

2. Следовательно, вектор всегда **нормален** к эквипотенциальным поверхностям, поэтому линии вектора $\vec{E}$ ортогональны к этим поверхностям.

3) **Эквипотенциальные поверхности не пересекаются**.

4) «Густота» **эквипотенциальных поверхностей** пропорциональна модулю $|\varphi|$, т.е. она характеризует пространственное распределение **потенциала**.

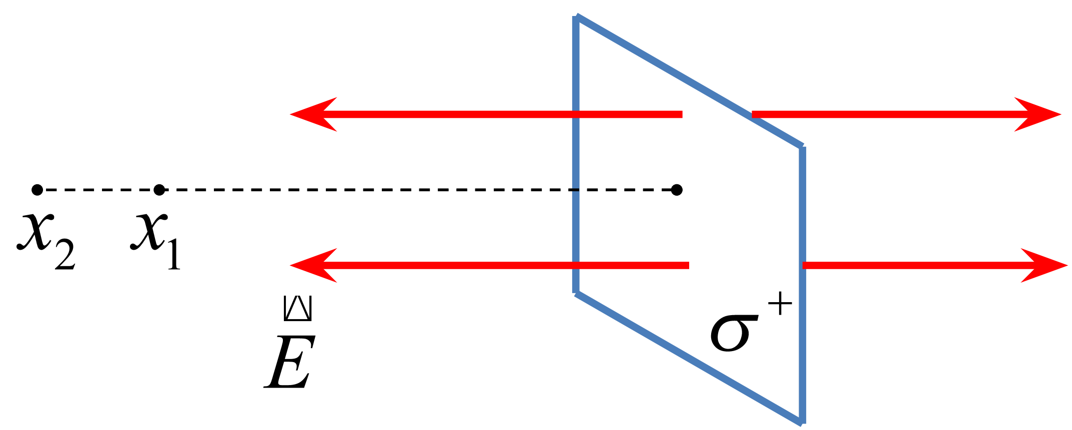
Эквипотенциальные поверхности обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между двумя соседними **эквипотенциальными поверхностями** были **одинаковы**. Тогда густота **эквипотенциальных поверхностей** наглядно характеризует **напряженность** поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены **гуще**, напряженность поля **больше**.

Формулы для вычисления разности потенциалов по напряжённости поля

1. Равномерно заряженная бесконечная плоскость

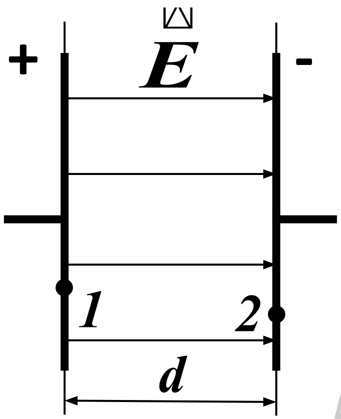
Разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстоянии x_1 и x_2 от плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \left[E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1).$$



2. Две бесконечные параллельные заряженные плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \left[E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right] = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$$



Если электрическое поле E **однородно**, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot d,$$

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

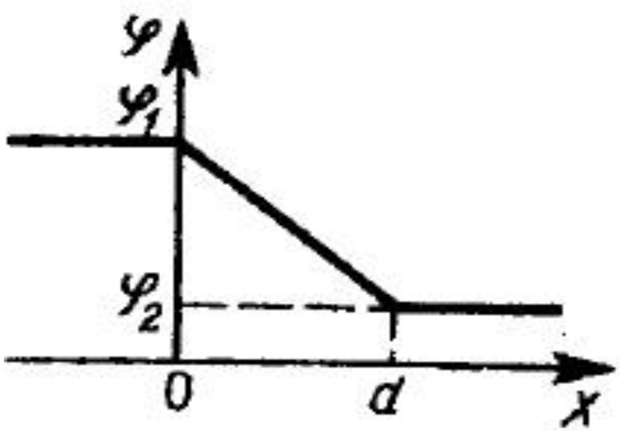


График зависимости потенциала от координаты.

3. Равномерно заряженная сферическая плоскость

$$при\ r > R,\quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \left[E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \right] = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

$$при\ r_1 = r\ и\ r_2 = \infty,\quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}.$$

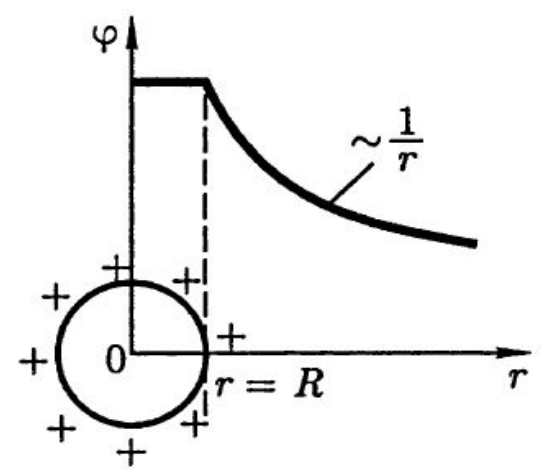


График зависимости φ от r

4. Объёмно заряженный шар

$$при\ r_1^{'} < R, r_2^{'} < R, r_2^{'} > r_1^{'},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1^{'}}^{r_2^{'}} E dr = \left[E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^3} r\,' \right] = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \left[\left(r_2^{'}\right)^2 - \left(r_1^{'}\right)^2 \right],$$

где r_1 и r_2 – расстояния от центра шара.

5. Равномерно заряженный бесконечный цилиндр радиусом R

$$npu\ r_1^{'} < R, r_2^{'} < R, r_2^{'} > r_1^{'},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1^{'}}^{r_2^{'}} Edr = \left[E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}r' \right] = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\left(r_2^{'}\right)^2 - \left(r_1^{'}\right)^2 \right],$$

где r_1 и r_2 – расстояния от оси заряженного цилиндра.