Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Функция n переменных

Переменная u называется функцией n переменных (аргументов) *x,y,z,…,t*, если каждой системе значений *x,y,z,…,t,* из области их изменений (области определения), соответствует определенное значение *u.*

Областью определения функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных ***z=f(x,y)*** область определения представляет некоторую совокупность **точек плоскости**, а для функции трех переменных ***u=f(x,y,z)*** – некоторую совокупность **точек пространства**.

Функция двух переменных

Функцией двух переменных называется *закон*, по которому каждой паре значений *независимых переменных* **x,y** (<u>аргументов</u>) из ***области определения*** соответствует значение зависимой переменной **z** (<u>функции</u>). Данную функцию обозначают следующим образом: $z = z(x,y)$ **либо** $z = f(x,y)$, или же другой стандартной буквой: $u=f(x,y)$, $u = u(x,y)$

Линию, ограничивающую область, называют **границей области.**

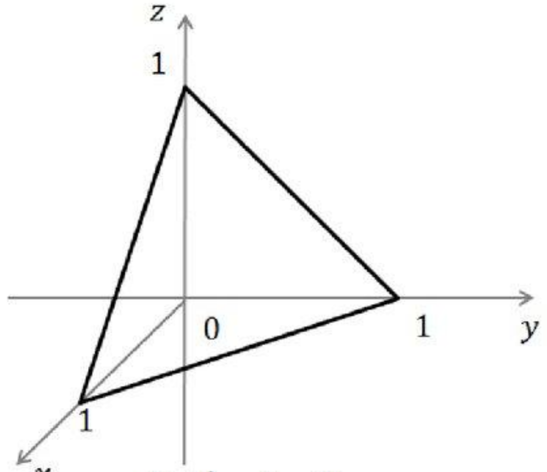
Точки области, не лежащие на границе, называются **внутренними.** Область, состоящая из одних внутренних точек, называется **открытой.**

Область с присоединенной к ней границей называется **замкнутой,** обозначается $\bar{D}$.

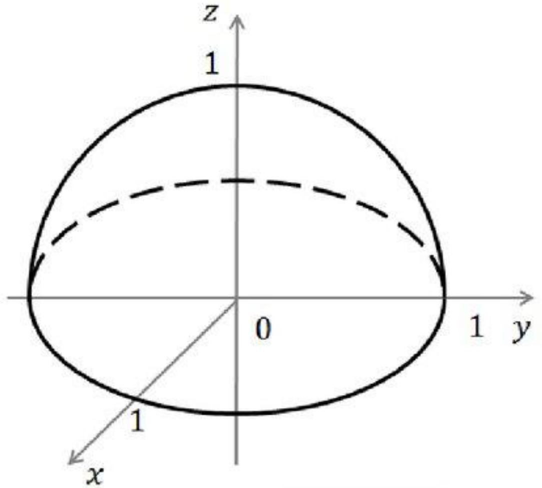
Примером замкнутой области является круг с окружностью.

Графиком функции $z = f(x;y)$ называется поверхность, образованная множеством точек пространства с координатами $(x;y;f(x;y))$ для всех $(x;y)\in D$.

Примеры графиков функций 2-х переменных



$z = 1 - x - y$



$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Пример

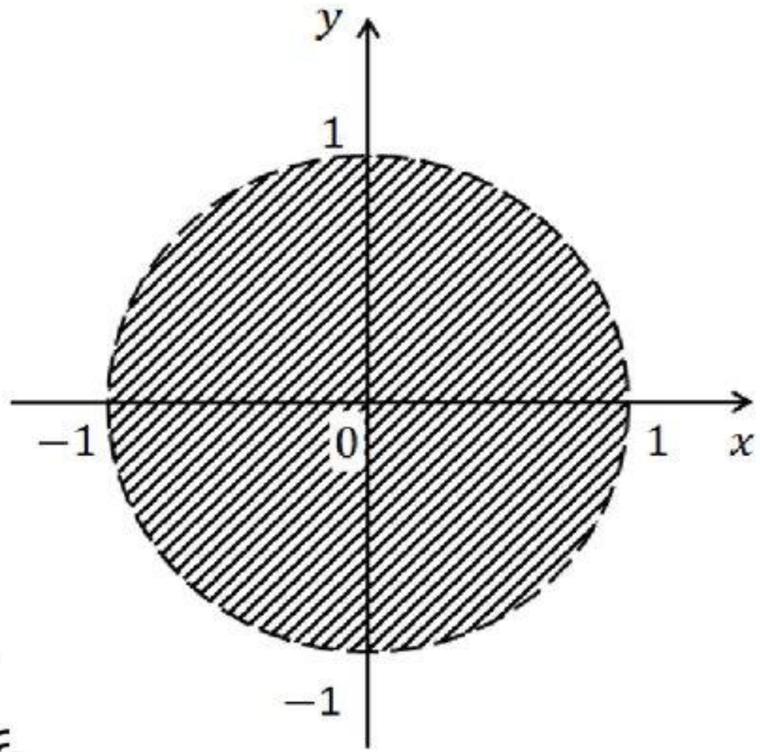
Найти область определения *D(f)* функции

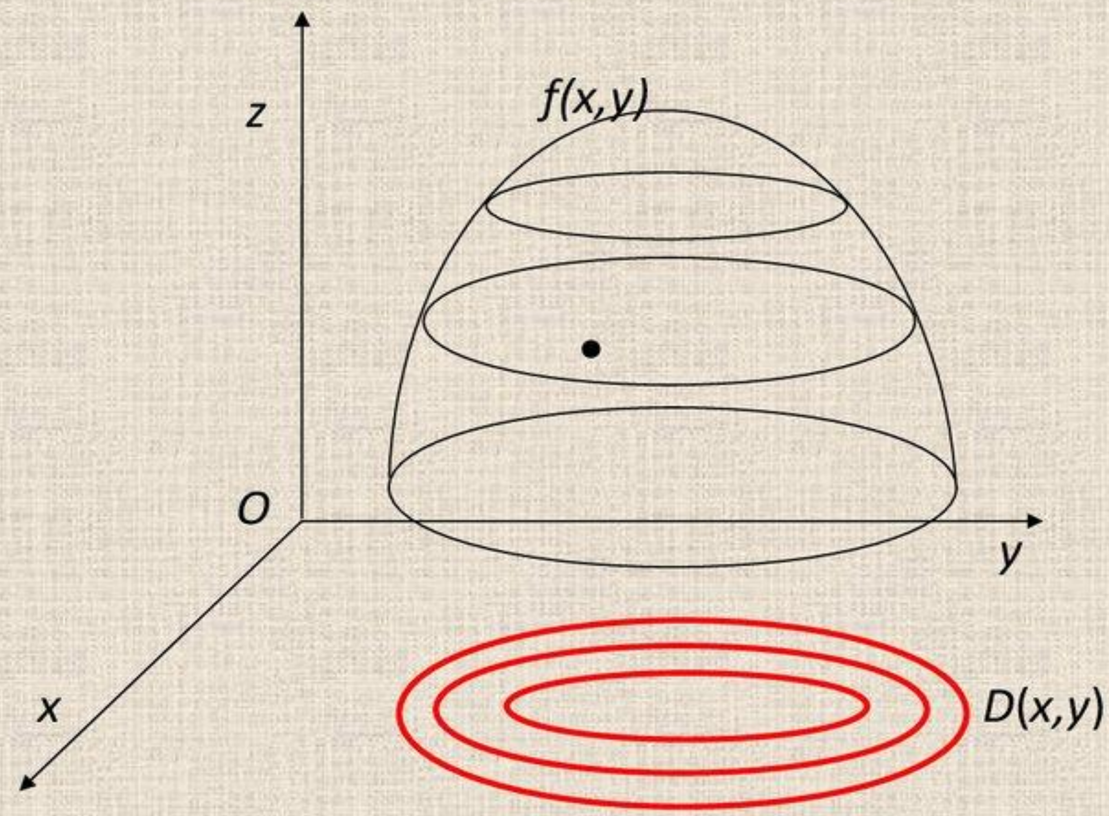
$$z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Решение. Областью определения функции является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$1 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1.$

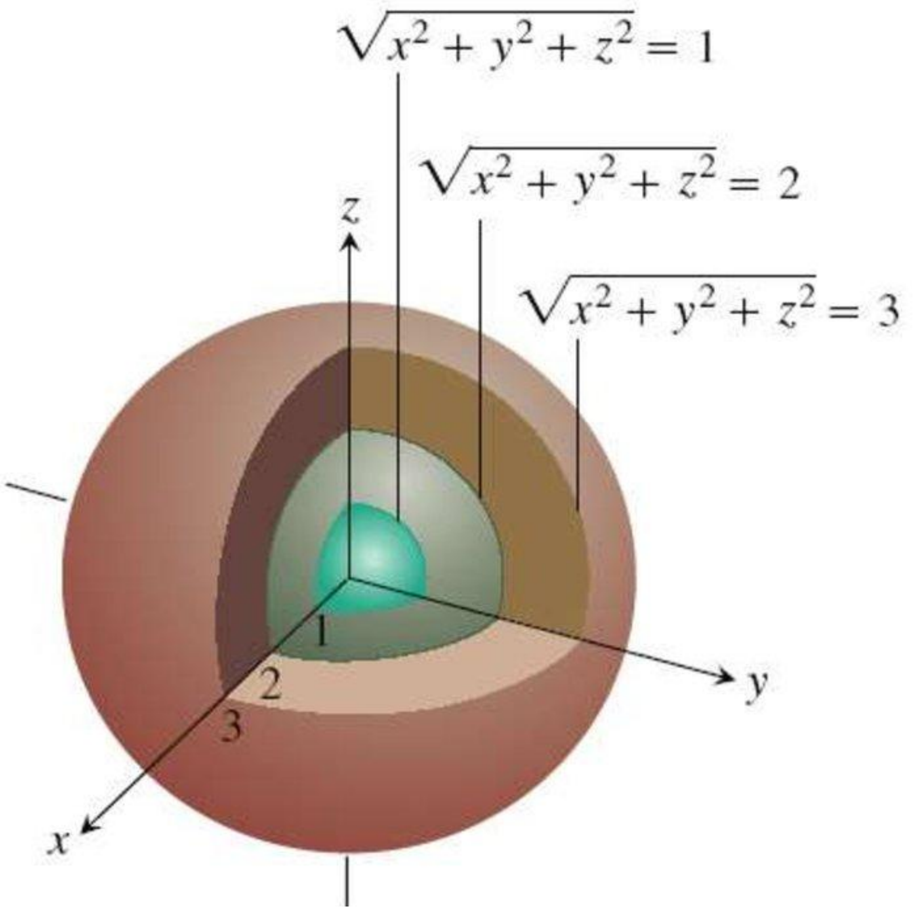
Данное неравенство описывает внутреннюю часть круга радиуса 1 с центром в начале координат.





- **Линия уровня** функции $z=f(x,y)$ - множество точек плоскости XOY, являющихся проекцией сечения графика функции плоскостью, параллельной XOY.
- Уравнение линии уровня: $\boldsymbol{f(x,y)=C}$

- **<u>Опр</u>.** Множество точек пространства, в которых функция трех переменных $f(x, y, z)$ принимает одно и то же значение, $f(x, y, z) = c$, называется поверхностью уровня.



Предел функции многих переменных

- . Число A называется **пределом** функции двух переменных $z=f(x,y)$ при $x \to x_0,\ \ y \to y_0$ и обозначается $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A,$

  если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое, что если точка (x,y) удалена от точки (x_0,y_0) на расстояние меньше δ, то величины $f(x,y)$ и A отличаются меньше чем на ε.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \left(\frac{x^2+4y}{2xy-1}\right) = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{(x-y)(x+y)}{(x+2)(x-y)} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x+y}{x+2} = 1$$

ОПР. δ **-окрестностью точки** $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

Т.е. δ-окрестность точки M_0 – это круг радиуса δ, с центром в точке M_0

Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0;y_0)$ кроме быть может самой точки.

Опр. Число ***А*** называется **пределом функции** $z = f(x;y)$ **при** $x \to x_0$ и $y \to y_0$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдется положительное число δ, такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x;y) - A| < \varepsilon$$

Записывают $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y)$

Предел функции двух переменных обладает свойствами, аналогичными свойствам предела функции одной переменной.

Теорема (о пределах). Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]=A\pm B$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)\cdot g(x,y)\right]=A\cdot B$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right]=\frac{A}{B}(B\neq 0)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[f(x,y)^{g(x,y)}\right]=A^B(A>0)$$

Непрерывность функции 2-х переменных

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется **непрерывной в точке (x_0, y_0)**, если она:

1) определена в точке (x_0, y_0);

2) имеет конечный предел при $x \to x_0, y \to y_0$;

3) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Определение. Функция называется **непрерывной в области определения**, если она непрерывна в каждой точке области.

Определение. Если функция $f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0,y_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$, то точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой разрыва*** этой функции.

Точки разрыва могут образовывать целые линии разрыва. Например, функция $z = \dfrac{2}{y-x}$ имеет линию разрыва $y=x$.

Частные производные первого порядка

Определение. ***Частным приращением*** функции $z=f(x,y)$ ***по переменной x*** будем называть разность:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

где переменная x получила приращение Δx, а y осталась постоянной.

Определение. ***Частным приращением*** функции $z=f(x,y)$ ***по переменной y*** будем называть разность

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

где переменная y получила приращение Δy, а x осталась постоянной.

Определение. ***Полным приращением*** функции $z=f(x,y)$ называется разность:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

В общем случае полное приращение не равно сумме частных приращений: $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Определение. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то их называют ***частными производными*** функции $z=f(x,y)$ по x и по y соответственно. При этом записывают:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Частная производная находится по правилам дифференцирования одной переменной, причем остальные переменные рассматриваются в этом случае как постоянные, т.е. если находят z'_x то считается постоянной переменная y; если находят z'_y - то переменная x.

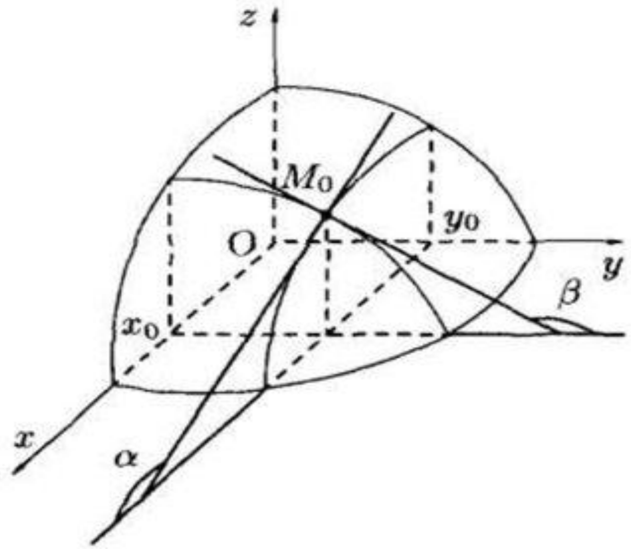
Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность. Графиком функции $z = f(x, y_0)$ есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью $y = y_0$. Исходя из геометрического смысла производной для функции от одной переменной, заключаем, что

$f_x{}'(x_0; y_0) = tg\alpha$, где α – угол между осью Ox и *касательной, проведенной к кривой*

$z = f(x, y_0)$ в точке $M_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$.

Аналогично, $f_y{}'(x_0; y_0) = tg\beta$.



Примеры:

1. $z = x\ln(x^2 - y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(x^2 - y^2) + x\frac{2x}{x^2 - y^2} = \ln(x^2 - y^2) + \frac{2x^2}{x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{-2y}{x^2 - y^2} = -\frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

2. $z = e^{-xy}\sin\frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -ye^{-xy}\sin\frac{x}{y} + e^{-xy}\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -xe^{-xy}\sin\frac{x}{y} + e^{-xy}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cos\frac{x}{y}.$$

Частные производные второго порядка

Определение. **Частными производными *второго порядка*** называются частные производные от частных производных первого порядка.

Обозначения:

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx} = f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$(z'_y)'_y = z''_{yy} = f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Определение. Частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ называются *смешанными частными производными 2- го порядка.*

Теорема. Если частные производные второго порядка функции z = $f(x,\ y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0), то в этой точке $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(Аналогично равны смешанные производные высших порядков).

Производные третьего порядка обозначаются так:

$$(z''_{xx})'_x = z'''_{xxx} = f'''_{xxx}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},$$

$$(z''_{xx})'_y = z'''_{xxy} = f'''_{xxy}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},$$ и т.д.

- **Пример.** Найти частные производные 2-го порядка функции

$$z = x^3 y^2 + \sin(xy+1)$$

- **Решение.** Последовательно находим

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=c} = 3x^2y^2 + y\cos(xy+1);$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=c} = 2x^3y + x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right) \underset{y=c}{=}$$

$$\underset{y=c}{=} 6xy^2 - y^2 \sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right) \underset{x=c}{=}$$

$$\underset{x=c}{=} 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx \sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3 y + x\cos(xy+1)\right) \underset{y=c}{=}$$

$$\underset{y=c}{=} 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 y + x\cos(xy+1)\right) \underset{x=c}{=}$$

$$\underset{x=c}{=} 2x^3 - x^2 \sin(xy+1)$$

Список использованных источников

https://ppt-online.org/388301

https://en.ppt-online.org/108266

https://en.ppt-online.org/370286

https://en.ppt-online.org/86927

https://en.ppt-online.org/370286

http://uslide.ru/matematika/28764-funkcii-neskolkih-peremennih.html

http://present5.com/differencialnoe-ischislenie-funkcii-neskolkix-peremennyx-predel-i-nepreryvnost/

http://www.myshared.ru/slide/494936/

http://present5.com/differencialnoe-ischislenie-funkcii-neskolkix-peremennyx-predel-i-nepreryvnost/

https://en.ppt-online.org/370286

https://en.ppt-online.org/107234