НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«Чернігівська політехніка»

Комп'ютерні числення

МОДУЛЬ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЛЕКЦІЯ 7. ФУНКЦІЯ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Трунова Олена Василівна
доцент, к.пед.н.

2020

Зміст

1. Означення функції і способи її задання

Якщо кожному числу x з деякої множини X відповідає одне й тільки одне число y, то говорять, що на множині X задана ***функція.***

Змінна x при цьому називається ***незалежною*** змінною (або аргументом), а змінна y - ***залежною***.

Спосіб (правило), за допомогою якого встановлюється відповідність, що визначає дану функцію, позначають тією чи іншою буквою: $f, g, h, \varphi \ldots$. Тобто ту обставину, що x є функція аргументу, виражають записом: $y = f(x)$ або $y = \varphi(x)$ і т.п.

Множина X називається ***областю визначення*** функції і позначається $D(f)$, а множина всіх чисел y, що відповідають різним числам $x \in X$ - ***областю значень*** цієї функції і позначається $E(f)$.

Ці області можуть представляти собою окремі точки числової прямої, відрізки, інтервали цієї прямої, множину всіх дійсних чисел.

Розрізняють такі способи завдання функції: табличний, графічний, аналітичний (за допомогою формул).

Нехай задана прямокутна система координат Oxy і функція $y = f(x)$.

Графіком функції $f(x)$ називають множину всіх точок площини з координатами $(x; f(x))$, де $x \in D(f)$.

Для функції, заданої аналітично, тобто рівнянням $y = f(x)$, під графіком розуміють множину точок $M(x; y)$ площини, координати яких задовольняють рівнянню $y = f(x)$.

Графік функції є деяка лінія на площині. Наприклад, рівняння $y = x^2$ задає функцію, графіком якої є парабола.

Функція, задана аналітично рівнянням $y = f(x)$, визначена в точці $x = x_0$, якщо можливо обчислити $y_0 = f(x_0)$. Множина таких точок утворює область визначення функції.

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

Приклад 1. Знайдіть область визначення функції:

а) $f(x)=\underbrace{\frac{x-7}{x-3}}$; б) $f(x)=\sqrt{5-3x}$; в) $f(x)=\lg(\underbrace{x^2-3x+2}_{>0})$.

$D(f) = R.$

а) Дріб $\frac{x-7}{x-3}$ визначений, якщо його знаменник не дорівнює нулю. Область

$x - 3 \neq 0$

визначення даної функції можна знайти з умови $x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$. Таким чином, $D(f)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-3x}}$

б) Функція $f(x)=\sqrt{\underbrace{5-3x}_{\geq 0}}$ визначена, якщо підкореневий вираз невід'ємний, тобто $5-3x\ge 0 \Rightarrow -3x\ge -5 \Rightarrow x\le \frac{5}{3}$. Значить, $D(f)=(-\infty;\frac{5}{3}]$.

в) Логарифм визначений, коли $x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x-2)>0$. Значить, $D(y)=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

$x_1 = 1$

$x_2 = 2$

Основними (або найпростішими) елементарними функціями називаються:

стала функція	$y = c$;
степенева функція	$y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;
показникова функція	$y = a^{x}$, $a > 0$;
логарифмічна функція	$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
тригонометрічні функції	$y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$;
обернені тригонометричні функції	$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = arctgx$; $y = arcctgx$.

$\sin(5x+2)$

Функція, аргумент якої в свою чергу є функція ($y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$), називається ***складною функцією*** (або композицією функцій).

Функція, аргумент якої в свою чергу є функція ($y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$), називається ***складною функцією*** (або композицією функцій).

Приклад 2. Функція $y = \sin x$ - найпростіша, $y = \sin 3x$ - складна ($y = \sin u$, $u = 3x$).

Приклад 3. Функція $y = \lg^3(2^{x^3})$ складна, вона може бути представлена наступним ланцюгом основних елементарних функцій: $y = z^3$, $z = \lg u$, $u = 2^v$, $v = x^3$.

Елементарними функціями називаються функції, які утворюються з основних елементарних функцій за допомогою скінченого числа арифметичних операцій $(+, -, \cdot, \div)$ і композицій (тобто утворення складних функцій). Усі інші функції називаються неелементарними.

Приклад 4. Прикладом неелементарної функції може служити функція виду: $y = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ неск. к. ар. опер.

Формула $y = f(x)$ визначає явний спосіб завдання функції. Однак у багатьох випадках доводиться використовувати неявний спосіб завдання функції.

Неявною називають функцію, яка задана рівнянням виду $F(x;y) = 0$, нерозв'язним щодо функції y.

Приклад 5. Рівняння $2y + x^2 - 4 = 0$ задає неявно функцію $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Нехай для будь-яких різних значень $x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, що $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тоді для будь-якого $y \in E(f)$ знайдеться тільки одне значення $x = g(y) \in D(f)$, таке, що $y = f(x)$.

Функція $x = g(y)$, визначена на $E(f)$, називається ***оберненою*** для функції $f(x)$.

Приклад 6. Знайдіть обернену функцію для даної:

$$\text{а) } y = x - 1;\ \text{б) } y = \frac{2}{x+3};\ \text{в) } y = 2^x.$$

а) Для функції $y = x - 1$ оберненою функцією є функція $x = y + 1$, або в стандартній формі $y = x + 1$.

$y \quad x$

б) Розв'яжемо рівняння $y = \frac{2}{x+3}$ відносно x: $x + 3 = \frac{2}{y} \Rightarrow x = \frac{2}{y} - 3$.

$y \quad x$

Оберненою функцією є функція $y = \frac{2}{x} - 3$.

в) Для функції $y = 2^x$ оберненою функцією є функція $x = \log_2 y$, або в стандартній формі $y = \log_2 x$.

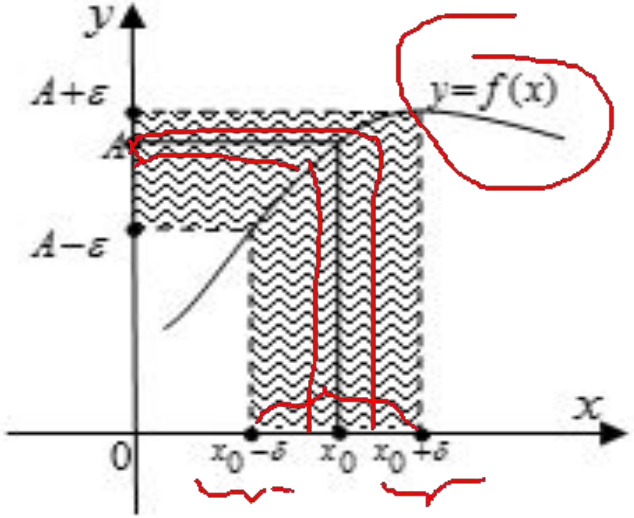
$\log_2 y = \log_2 2^x$

$\log_2 y = x \cdot \underbrace{\log_2 2}_{=1}$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні щодо бісектриси першого і третього координатних кутів.

2. Границя числової послідовності. Границя функції

Число A називається ***границею послідовності*** $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує натуральне число $N = N(\varepsilon)$ таке, що $|a_n - A| < \varepsilon$ при $n \geq N$.



У випадку, якщо послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ має своєю границею число A, говорять також, що послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ збігається (або наближається) до числа A, і позначають це так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Якщо послідовність не має границі, то говорять, що вона розбіжна.

Приклад. Показати, що послідовність $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ має границю, яка дорівнює 2. $= A$

Розв'язання. За означенням границі послідовності для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, починаючи з якого виконується нерівність

$|a_n - A| < \varepsilon$

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon. \qquad (2)$$

$1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \ldots, \frac{2n}{n+1}, \ldots$

Спростимо нерівність

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\cancel{2n} - \cancel{2n} - 2}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

Розв'яжемо одержану нерівність відносно n:

$$\frac{n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Якщо, наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (0,1), то починаючи з номера $N = 19$ $\left(n > \frac{2}{\frac{1}{10}} - 1 \Rightarrow n > 20 - 1 \Rightarrow n > 19\right)$, буде виконуватись нерівність (2). Якщо $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то починаючи з номера $N = 199$ $\left(n > \frac{2}{\frac{1}{100}} - 1 \Rightarrow n > 200 - 1 \Rightarrow n > 199\right)$ буде виконуватись нерівність (2). Таким чином, яке б ε ми не вибрали, завжди знайдеться номер N, починаючи з якого буде виконуватись нерівність (2). Тоді у відповідності з означенням границі послідовності випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2$.

Число A називається **границею функції** $y = f(x)$ в точці $x = x_0$, якщо
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Це коротко записується у вигляді $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Якщо A є границя $f(x)$ в точці x_0, то на графіку це ілюструється наступним чином. Оскільки з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, то це означає, що для всіх x, віддалених від x_0 не далі ніж δ, точка $M(x; y)$ графіка функції $y = f(x)$ лежить всередині смуги 2ε шириною, обмеженою прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$.і. Очевидно, що зі зменшенням ε величина δ також зменшується.

Односторонні границі

Границя $\lim\limits_{x\to x_0 (x<x_0)} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$ називається ***лівосторонньою*** границею даної функції в точці $x = x_0$ . .

Границя $\lim\limits_{x\to x_0 (x>x_0)} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0)$ називається ***правосторонньою*** границею даної функції.

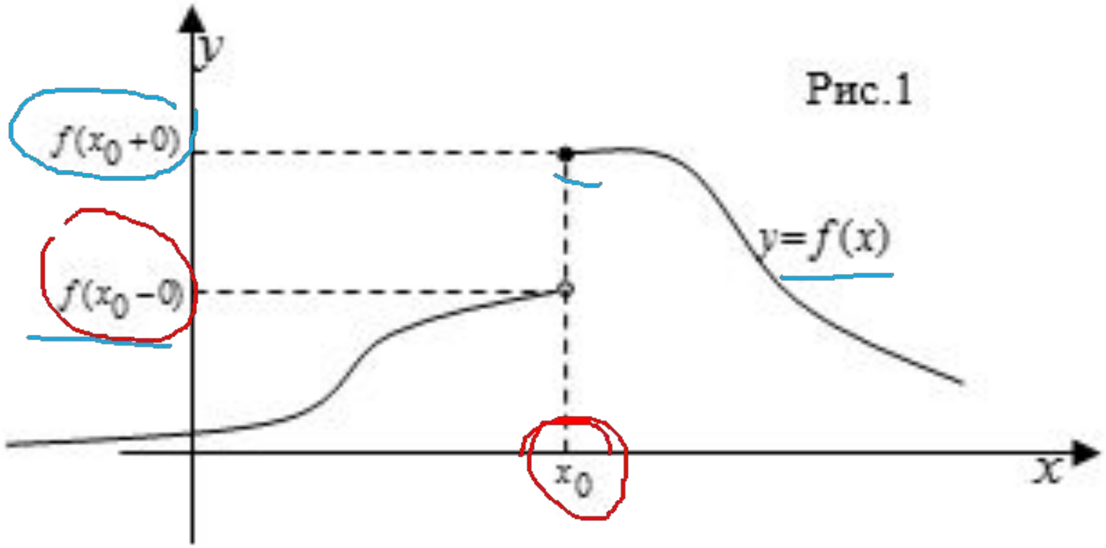
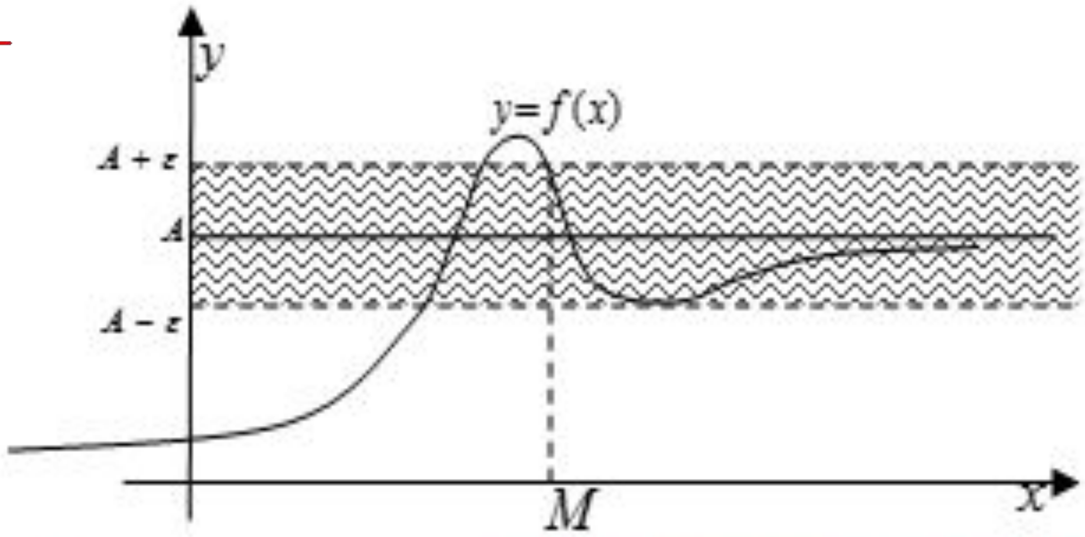


Рис.1

Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$ в точці $x = \pm\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $M > 0$, що при всіх $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою в області*** D, якщо існує стале число $M > 0$ таке, що для всіх $x \in D$ $|f(x)| \le M$.

Приклад 8. Функція $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ обмежена для всіх $x \in \mathbf{R}$, оскільки в цій області $|f(x)| \le 2$.

Теореми про границі

1. Границя суми скінченого числа функцій дорівнює сумі границь цих функцій, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)+v(x))=\lim\limits_{x\to x_0}u(x)+\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$.

2. Границя добутку скінченого числа функцій дорівнює добутку їх границь, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)\cdot v(x))=\lim\limits_{x\to x_0}u(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$.

Наслідок. Якщо, $c=const$, то $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}cu(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to x_0}u(x)}$.

3. Границя частки дорівнює частці границь $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}u(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}$,

якщо границя знаменника не дорівнює нулю $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\neq 0$.

Для обчислення границь необхідно знать наступні співвідношення

Якщо a – дійсне число ($a \neq 0$), то

1. $a + \infty = \infty$,
2. $a \cdot \infty = \infty$,
3. $\dfrac{a}{\infty} = 0$,
4. $\infty + \infty = \infty$,
5. $\infty \cdot \infty = \infty$,
6. $\dfrac{a}{0} = \infty$.

Невизначенності, що потребують свого розкриття:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Приклад: знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-x+1}{x^3+2x+4}$.

1) $= \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0.$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-x+1}{x^3+2x+4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\dfrac{7}{1}=7.$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-x+1}{x^3+2x+4}=\left[\begin{array}{c}\text{при}\\ x=\infty\end{array}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\begin{array}{c}\text{розділимо чисельник}\\ \text{і знаменник}\\ \text{почленно на } x^3\end{array}\right]=$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+4}{7x^2-x+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{1}{0}=\infty$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\left[\frac{a}{\infty}=0\right]=\frac{0-0+0}{1+0+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Границі

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, \text{якщо } n=m\\ 0, \text{якщо } n<m\\ \infty, \text{якщо } n>m\end{cases},$$

Тут $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ – многочлени

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 4x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \infty;$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - 4x^3 + 3x^2}{1 + 8x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} = -0{,}5;$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 2x^3 + 1}{2x^6 - 3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0.$$

Приклад: знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+17x+3}{x^2+3x+8}$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+17x+3}{x^2+3x+8}=\left[\begin{matrix}\text{підставим}\\ \text{значення}\, x=-1\end{matrix}\right]=\frac{(-1)^2+17\cdot(-1)+3}{(-1)^2+3\cdot(-1)+8}=\frac{-13}{6}.$$

Приклад: знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-14x+5}{x^2-4x+3}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-14x+5}{x^2-4x+3}=\left[\begin{matrix}\text{подставим}\\ \text{значение } x=1\end{matrix}\right]=\frac{1^3-14\cdot 1+5}{1^2-4\cdot 1+3}=\frac{-8}{0}=-\infty.$$

Приклад 9. Використовуючи теореми про границі, знайдіть $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-1}{2x^2-4x+1}$.

$ax^2+bx+c=0$, x_1 і x_2 - корені

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{2x^2-4x+1}=\frac{3\cdot 2-1}{2\cdot 2^2-4\cdot 2+1}=\frac{5}{1}=5$$

$= a\cdot(x-x_1)(x-x_2)=0$

Приклад 10. Використовуючи теореми про границі, знайдіть $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Маємо невизначеність. «Розкриємо» цю невизначеність (тобто позбудемося неї), розклавши чисельник і знаменник на множники і скоротивши їх далі на спільний множник $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{4}{-1}=-4.$$

Приклад 11. Використовуючи теореми про границі, знайдіть $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$. Маємо невизначеність. Домножимо чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до чисельника:

$$\underline{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}}=\boxed{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-3^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}$$

$x\to1$

$x=1$ $\quad \underline{x-1\neq0}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+8-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\underline{\lim_{x\to1}}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Важливі границі

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$!

число Ейлера

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e \approx 2{,}71828}$$!

Наслідки другої особливої границі

Наведені формули є **наслідками другої ~~чудової~~ важливої границі** (випливають з неї)

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a},$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1,$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1,$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$

Приклад 12. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$. $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x} = \dfrac{5}{3}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$. Маємо невизначеність. Поділимо чисельник і знаменник дробу під знаком границі на x і скористаємося першою важливою границею (формула (6.1)): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3} = \dfrac{1\cdot 5}{1\cdot 3} = \dfrac{5}{3}$. $=$ $\dfrac{5}{3}$,

Приклад: знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}6x}{\sin 4x}$. $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{4x} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}6x}{\sin 4x}=\begin{bmatrix}\text{підставим}\\ x=0\end{bmatrix}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{\cos 6x}}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sin 4x\cdot\cos 6x}=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{разделим}\\ \text{и домножим}\\ \sin 6x \text{ на } 6x,\\ \sin 4x \text{ на } 4x,\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 6x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x\cdot\cos 6x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin 6x}{6x}}_{1}\cdot\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{\frac{\sin 4x}{4x}}}_{1}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to 0}\frac{6\cancel{x}}{4\cancel{x}\cdot\cos 6x}=\begin{bmatrix}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{6x}=1,\\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=1\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{4x\cdot\cos 6x}=\begin{bmatrix}\text{сократим}\\ \text{на} \quad x\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{4\cdot\cos 6x}=\left[\lim_{x\to 0}\cos 6x=\cos 0=1\right]=\frac{6}{4\cdot 1}=\frac{3}{2}$$

Еквівалентні нескінченно малі функції для обчислення границь

$\sin(\alpha) \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$

$\arcsin(\alpha) \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$

$\cos(\alpha) \sim 1 - \dfrac{\alpha^2}{2},\ \alpha \to 0;$

$\tan(\alpha) \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$

$\arctan(\alpha) \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$

$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$

$a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a,\ \alpha \to 0;$

$\ln(1+\alpha) \sim \alpha,\ \alpha \to 0;$

$(1+\alpha)^k - 1 \sim k\alpha,\ \alpha \to 0;$

Приклад: знайти $\underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}\cdot = [1^{\infty}]}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}=e^{km}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+2}{3x-1}-1\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+2-(3x-1)}{3x-1}\right)^{4x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{3x}+2-\cancel{3x}+1}{3x-1}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{4x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\frac{3}{3}}{\frac{3x-1}{3}}\right)^{4x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right)^{4x-1}=\left[\begin{array}{c}\text{степінь }(4x-1)\\ \text{домножим } i\\ \text{розділим на}\\ \dfrac{3x-1}{3}\end{array}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3x-1}{3}\cdot\frac{3}{3x-1}\cdot(4x-1)}=$$

1

$= e$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x-1}{3}}\right)^{\frac{3x-1}{3}}=e\right]=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3}{3x-1}\cdot(4x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3\cdot(4x-1)}{3x-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-3}{3x-1}}=\cancel{\left[\text{розділим чисельник і знаменник дробу на } x\right]=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{12x}{x}-\frac{3}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12-\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}}}}=$$

$$=\cancel{\left[\frac{a}{\infty}=0\right]}=e^{\frac{12-0}{3-0}}=e^{4}.$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{3}}=e^{\frac{12}{3}}=e^{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} u^{v} = [1^{\infty}] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(u-1)\cdot v}$$

$$\lim_{x\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{3x+2}{3x-1}}_{u}\Bigg)^{\overbrace{4x-1}^{v}} = [1^{\infty}] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\overbrace{\frac{3x+2}{3x-1}}^{u} - 1\right)\cdot\overbrace{(4x-1)}^{v}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{3x}+\overbrace{2-\cancel{3x}+1}^{3}}{3x-1}\right)\cdot(4x-1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-3}{3x-1}} = e^{\frac{12}{3}} = e^{4}.$$