

Объем цилиндра и конуса

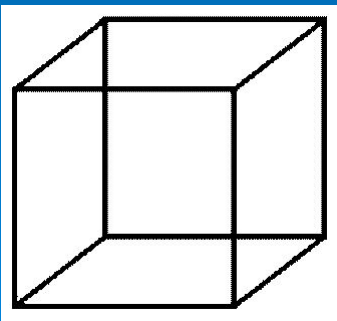


Понятие Объема

Объем геометрического тела – та часть пространства, которую занимает данное тело.

За единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины.

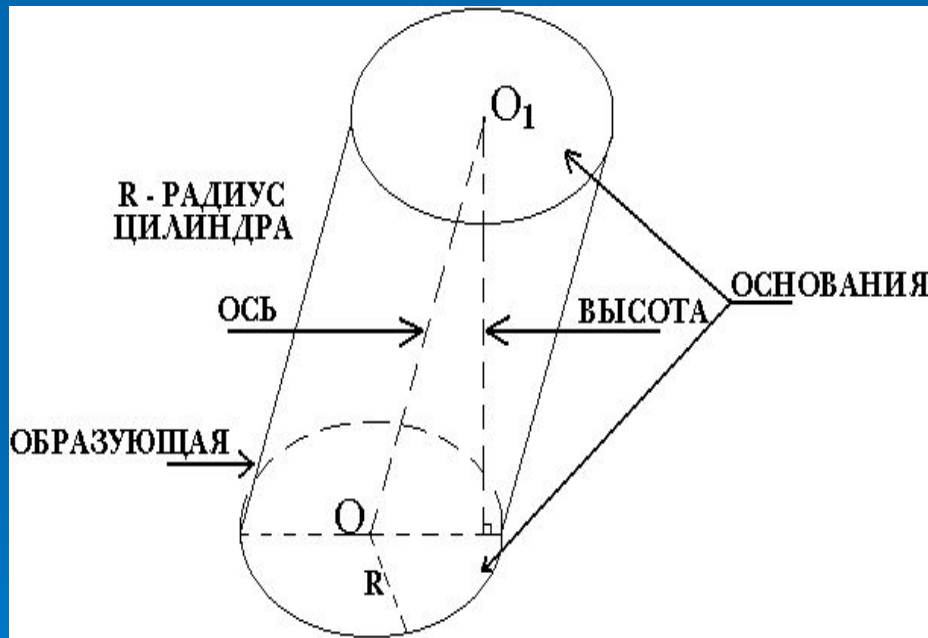
Объем измеряется в кубических единицах (мм^3 , см^3 , м^3)



Свойства объемов:

1. **Неотрицательность** (объем геометрического тела – есть число положительное)
2. **Аддитивность** (если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел)
3. **Нормированность** (объем куба равен кубу его стороны)
4. **Инвариантность** (равные геометрические тела имеют равные объемы)

ЦИЛИНДР



Длина образующей называется высотой цилиндра, а радиус основания – радиусом цилиндра

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченной цилиндрической поверхностью (называемой боковой поверхностью цилиндра) и не более чем двумя поверхностями (основаниями цилиндра); причём если оснований два, то одно получено из другого параллельным переносом вдоль образующей боковой поверхности цилиндра; и основание пересекает каждую образующую боковой поверхности ровно один раз.

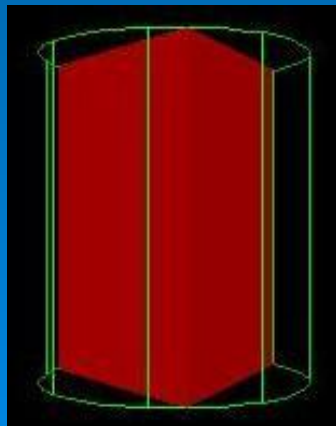


Объем цилиндра

Объем цилиндра равен произведению площади

основания на высоту: $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H,$

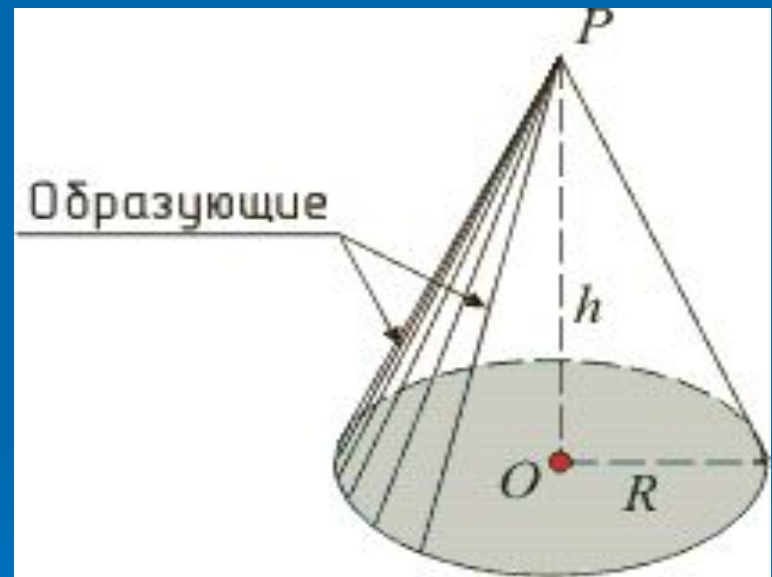
Для доказательства впишем в данный цилиндр правильную n -угольную призму. С возрастанием n объем этой призмы будет стремиться к объему цилиндра. Объем призмы, как известно, находится по формуле $V = S_{\text{осн}} h$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания призмы. С возрастанием n площадь основания призмы стремится к площади круга – основания цилиндра. Значит, выражая площадь основания цилиндра через его радиус, получаем, что $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H,$



КОНУС

Геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L , называется **конусом**.

Конус – это тело вращения, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов (т.е. вокруг оси проходящей через один из катетов).



Образующая – это отрезок, соединяющий вершину конуса и точку, лежащую на границе основания. Все образующие конуса равны.

Высота конуса – это отрезок, проведенный из вершины конуса в центр основания, перпендикулярно плоскости основания



Объем конуса

Доказательство:

$$V_{\text{конуса}} = \int_0^H S(x) dx.$$

$$\frac{S(x)}{S_{\text{осн}}} = k^2 = \left(\frac{x}{H}\right)^2 = \frac{x^2}{H^2},$$

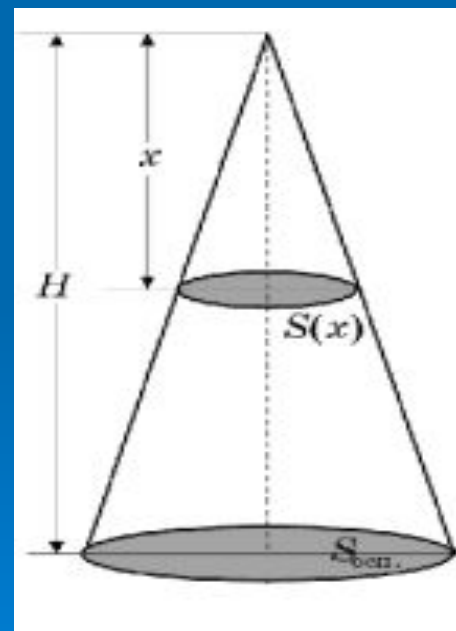
$$S(x) = S_{\text{осн}} \cdot \frac{x^2}{H^2}.$$

$$\begin{aligned} V_{\text{конуса}} &= \int_0^H S_{\text{осн}} \cdot \frac{x^2}{H^2} dx = \frac{S_{\text{осн}}}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{S_{\text{осн}} \cdot H^3}{H^2 \cdot 3} = \\ &= \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \end{aligned}$$

$$V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту:

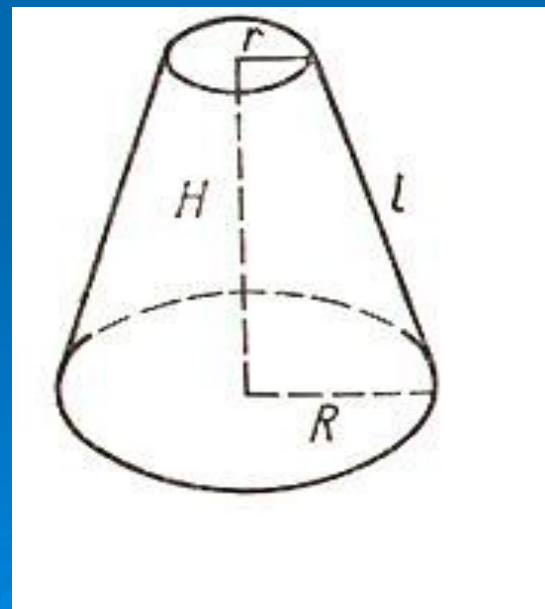
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h.$$



Усеченный конус

Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярно к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом.

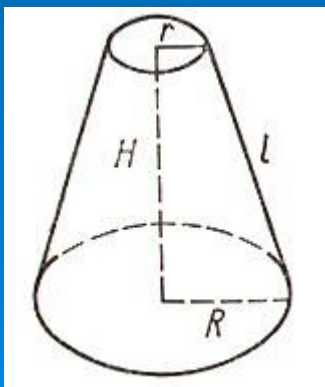
Основания исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются основаниями усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры, – высотой усеченного конуса.



Объем усеченного конуса

Объем V усеченного конуса, высота которого равна h , а площади основания равны S и S_1 , вычисляется по формуле
где R и r – радиусы оснований усеченного конуса.

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2),$$



Доказательство:

Объем усеченного конуса может быть найден как разность объемов конусов с радиусами оснований R и r , общей вершиной и осью. Пусть высоты конусов равны H_1 и H_2 соответственно, причем $H_1 - H_2 = H$ – высота усеченного конуса. Вывод этой формулы получается из следующей цепочки равенств с учетом того,

что из подобия следует $\frac{H_1}{H_2} = \frac{R}{r}$.

$$H_1 = H + H_2 = H_2 \frac{R}{r} \Rightarrow H_2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = H \Rightarrow H_2 = H \frac{r}{R - r} \Rightarrow$$

$$H_1 = H + H \frac{r}{R - r} = H \left(1 + \frac{r}{R - r} \right) = H \frac{R}{R - r},$$



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H_1 - \frac{1}{3} \pi r^2 H_2 = \frac{1}{3} \pi \left(R^2 \cdot H \frac{R}{R - r} - r^2 \cdot H \frac{r}{R - r} \right) = \frac{1}{3} \pi H \left(\frac{R^3 - r^3}{R - r} \right) = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2).$$

Пример решения задачи

Смолу для промышленных нужд собирают, подвешивая конические воронки к соснам. Сколько воронок диаметром 10 см с образующей 13 см нужно собрать, чтобы заполнить 10-литровое ведро?

Дано:
Коническая
воронка
 $D = 10$ см
 $L = 13$ см

Найти:
 $V - ?$

Решение:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \cdot 25 \cdot 12 = \\ = 100\pi \text{ см}^3 = 0,1\pi \text{ дм}^3.$$

$$\left(H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12. \right)$$

$$n = \frac{10}{0,1\pi} = \frac{100}{\pi} = \frac{100}{3,14} \approx \\ \approx 31,8.$$

Ответ: $n \approx 32$ воронок.

