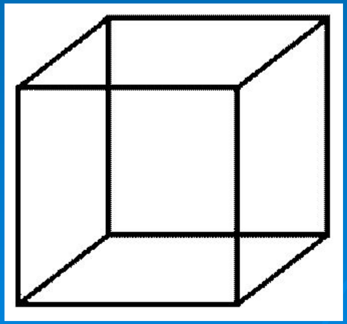
Объем цилиндра и конуса

Понятие Объема

Объем геометрического тела – та часть пространства, которую занимает данное тело.

За единицу объема принят объем куба, ребро которого равно единице длины.

Объем измеряется в кубических единицах (мм^2, см^2, м^2)



Свойства объемов:

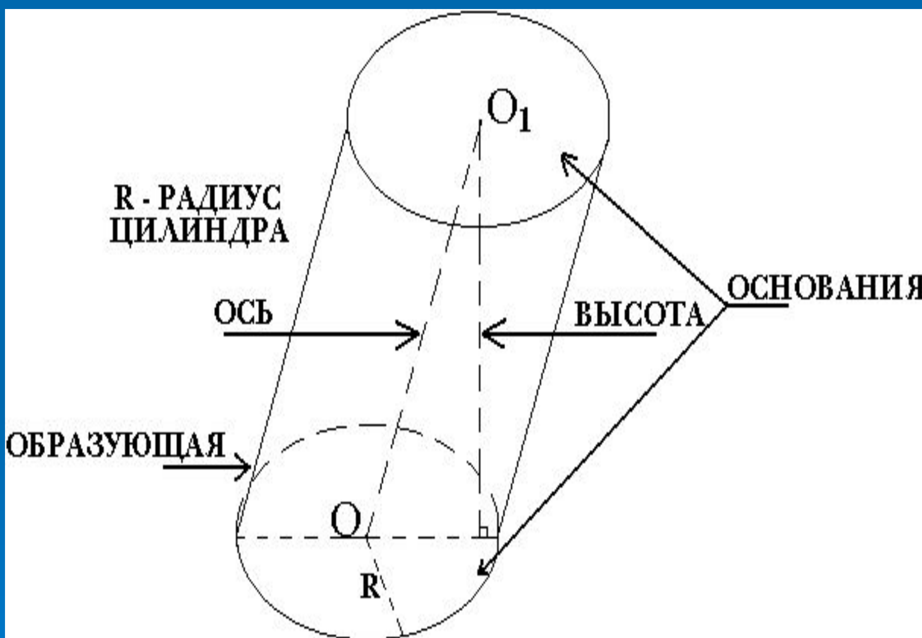
1. **Неотрицательность** (объем геометрического тела – есть число положительное)

2. **Аддитивность** (если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел)

3. **Нормированность** (объем куба равен кубу его стороны)

4. **Инвариантность** (равные геометрические тела имеют равные объемы)

Цилиндр



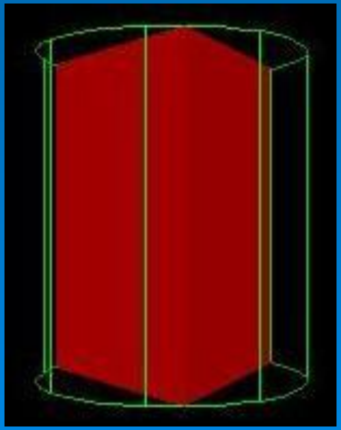
<u>Цилиндр</u> – геометрическое тело, ограниченной цилиндрической поверхностью (называемой боковой поверхностью цилиндра) и не более чем двумя поверхностями (основаниями цилиндра); причём если оснований два, то одно получено из другого параллельным переносом вдоль образующей боковой поверхности цилиндра; и основание пересекает каждую образующую боковой поверхности ровно один раз.

Длина образующей называется <u>высотой цилиндра</u>, а радиус основания – <u>радиусом цилиндра</u>

Объем цилиндра

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту: $V_{ц} = \pi R^2 H,$

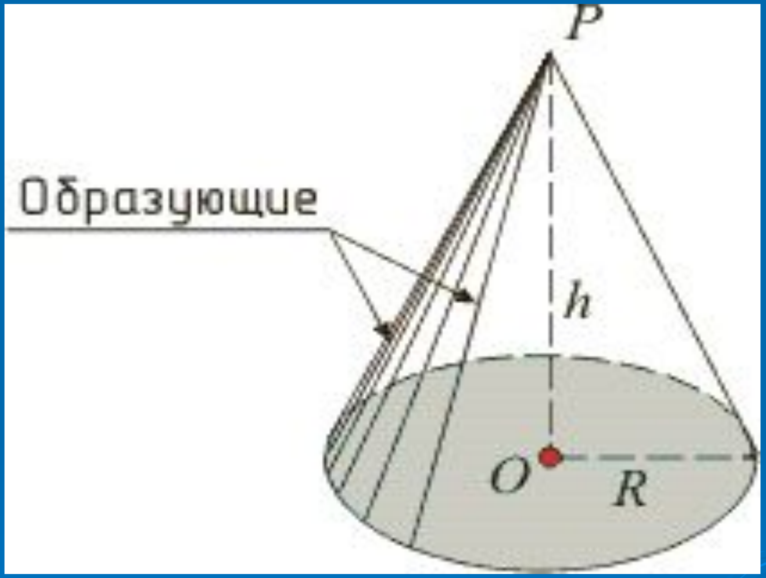
Для доказательства впишем в данный цилиндр правильную *n*-угольную призму. С возрастанием *n* объем этой призмы будет стремиться к объему цилиндра. Объем призмы, как известно, находится по формуле $V = S_{осн} h$, где $S_{осн}$ – площадь основания призмы. С возрастанием *n* площадь основания призмы стремится к площади круга – основания цилиндра. Значит, выражая площадь основания цилиндра через его радиус, получаем, что $V_{ц} = \pi R^2 H,$



КОНУС

Геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L, называется **конусом**.

Конус – это тело вращения, образованное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов (т.е. вокруг оси проходящей через один из катетов).



Образующая – это отрезок, соединяющий вершину конуса и точку, лежащую на границе основания. Все образующие конуса равны.
Высота конуса – это отрезок, проведенный из вершины конуса в центр основания, перпендикулярно плоскости основания

Объем конуса

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_{осн} h.$

Доказательство:

$$V_{конуса} = \int_0^H S(x)\,dx.$$

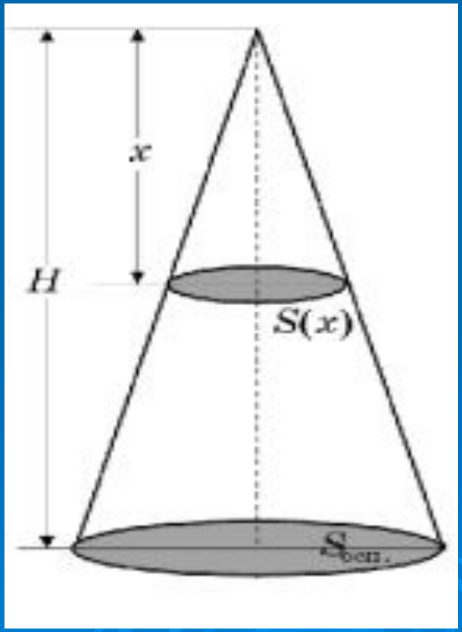
$$\frac{S(x)}{S_{осн}} = k^2 = \left(\frac{x}{H}\right)^2 = \frac{x^2}{H^2},$$

$$S(x) = S_{осн} \cdot \frac{x^2}{H^2}.$$

$$V_{конуса} = \int_0^H S_{осн} \cdot \frac{x^2}{H^2}\,dx = \frac{S_{осн}}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{S_{осн} \cdot H^3}{H^2 \cdot 3} =$$

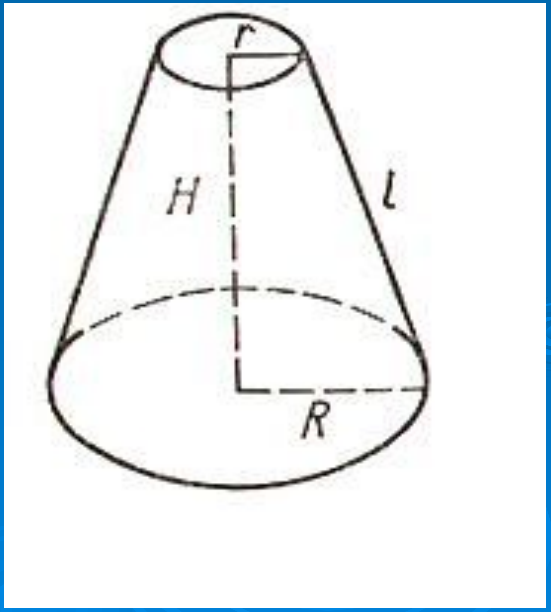
$$= \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

$$V_{конуса} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$



Усеченный конус

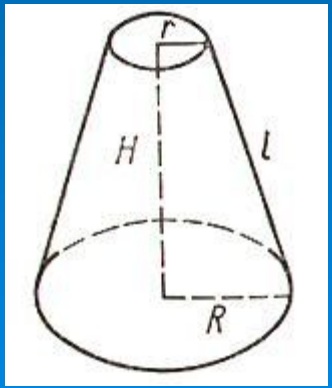
Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярно к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом.



Основания исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются основаниями усеченного конуса, а отрезок, соединяющий их центры, – высотой усеченного конуса.

Объем усеченного конуса

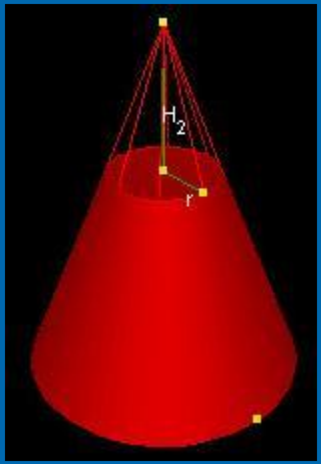
Объем V усеченного конуса, высота которого равна h, а площади основания равны S и S_1 вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$,
где *R* и *r* – радиусы оснований усеченного конуса.



Доказательство:

Объем усеченного конуса может быть найден как разность объемов конусов с радиусами оснований *R* и *r*, общей вершиной и осью. Пусть высоты конусов равны H_1 и H_2 соответственно, причем $H_1 - H_2 = H$ – высота усеченного конуса. Вывод этой формулы получается из следующей цепочки равенств с учетом того,

что из подобия следует $\dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{R}{r}$.



$$H_1 = H + H_2 = H_2\frac{R}{r} \Rightarrow H_2\left(\frac{R}{r} - 1\right) = H \Rightarrow H_2 = H\frac{r}{R-r} \Rightarrow$$

$$H_1 = H + H\frac{r}{R-r} = H\left(1 + \frac{r}{R-r}\right) = H\frac{R}{R-r},$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H_1 - \frac{1}{3}\pi r^2 H_2 = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 \cdot H\frac{R}{R-r} - r^2 \cdot H\frac{r}{R-r}\right) = \frac{1}{3}\pi H\left(\frac{R^3 - r^3}{R-r}\right) = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

Пример решения задачи

Смолу для промышленных нужд собирают, подвешивая конические воронки к соснам. Сколько воронок диаметром 10 см с образующей 13 см нужно собрать, чтобы заполнить 10-литровое ведро?

Дано:
Коническая воронка
D = 10 см
L = 13 см

Найти:
V – ?

Решение:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 =$$

$$= 100\pi \text{ см}^3 = 0{,}1\pi \text{ дм}^3.$$

$$\left(H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.\right)$$

$$n = \frac{10}{0{,}1\pi} = \frac{100}{\pi} = \frac{100}{3{,}14} \approx$$

$$\approx 31{,}8.$$

Ответ: $n \approx 32$ воронки.