

Производная элементарных функций

Функция	Производная
1) Постоянная: C	$(C)' = 0$
2) Степенная: x^n	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
<i>Частные случаи:</i> $x = x^1$	$(x)' = 1$
x^2	$(x^2)' = 2x$
x^3	$(x^3)' = 3x^2$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3) Показательная: a^x	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
e^x	$(e^x)' = e^x$
4) Логарифмическая: $\log_a x (x > 0)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
<i>Натуральный логарифм:</i> $\ln x (x > 0)$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Функция	Производная
5) Тригонометрические: $\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$
$\cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
<i>Обратные тригонометрические:</i> $\arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

1. Постоянный множитель выносится за знак производной	$(cv)' = c(v)'$
2. Производная суммы (разности) двух функции равна сумме (разности) производных этих функций	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго	$(u \times v)' = u'v + uv'$
4. Производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Вычисление производных элементарных функций

Пример №1: Вычислить производную данной функции $y = 5x^4$

Решение :

$$y' = (5x^4)' = 5(x^4)' = 5(4 \cdot x^{4-1}) = 5 \cdot 4 \cdot x^3 = 20x^3$$

$$n=4$$

Здесь выносим коэффициент за скобки по свойству

$$(cv)' = c(v)'$$

Здесь используем формулу производной степенной функции

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Вычисление производных элементарных функций

Пример №2: Вычислить производную данной функции

$$y = \frac{3}{x^3}$$

Решение:

$$y' = \left(\frac{3}{x^3}\right)' = \left(3 \cdot \frac{1}{x^3}\right)' = 3 \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)' = 3(x^{-3})' = 3 \cdot (-3 \cdot x^{-3-1}) = -9x^{-4} = -\frac{9}{x^4}$$

До этого знака равенства производим математические манипуляции

Здесь выносим коэффициент за скобки по **свойству**

$$(cv)' = c(v)'$$

$$n = -3$$

Здесь используем **формулу производной степенной функции**

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Вычисление производных элементарных функций

Пример №3: Вычислить производную данной функции

$$y = \frac{x^6 + 3}{x^2}$$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^6 + 3}{x^2} \right)' = \frac{(x^6 + 3)' * x^2 - (x^6 + 3) * (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{6x^5 * x^2 - (x^6 + 3) * 2x}{x^4} = \frac{6x^7 - 2x^7 - 6x}{x^4} = \\ &= \frac{4x^7 - 6x}{x^4} = \frac{x(4x^6 - 6)}{x^4} = \frac{4x^6 - 6}{x^3} \end{aligned}$$

Здесь используем правило дифференцирования функции частного

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Находим производную числителя и умножаем на знаменатель

Умножаем числитель на производную знаменателя

Далее выполняем арифметические действия: перемножаем, раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые