

Теория автоматического управления



Лекция 2. Переходная характеристика. Импульсная характеристика. ЛЧХ.

Основные термины и определения

- ▶ Передаточная функция (ПФ) – отношение изображений по Лапласу выходной переменной к входной при нулевых начальных условиях (ННУ).

$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

- ▶ Годограф корней – совокупность траекторий корней ПФ.
- ▶ Временная характеристика – реакция системы на типовое воздействие при ННУ.
- ▶ Переходная характеристика ($h(t)$) – реакция системы на единичное ступенчатое воздействие ($1(t)$).
- ▶ Импульсная характеристика ($w(t)$) – реакция системы на единичное импульсное воздействие ($\delta(t)$).
- ▶ Нули ПФ (0) – корни числителя ПФ.
- ▶ Полюса ПФ (x) – корни знаменателя ПФ.

Переходная характеристика

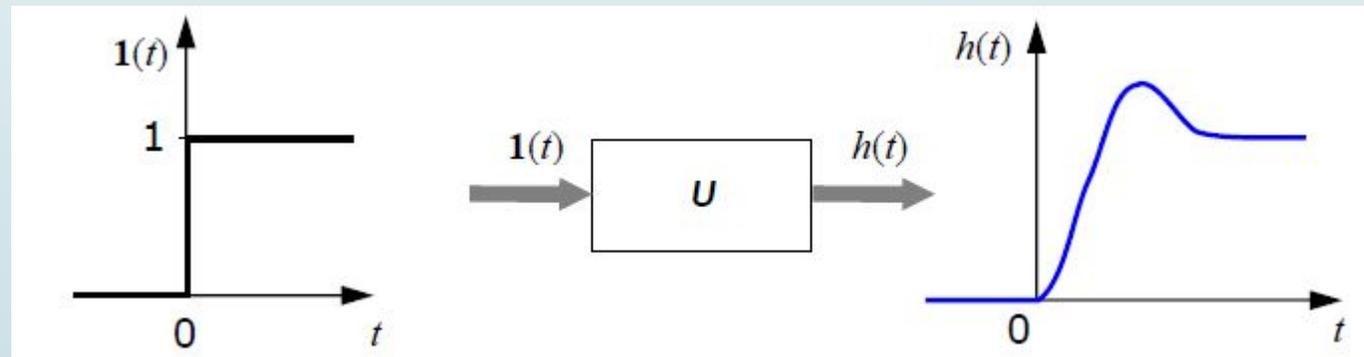
Переходная функция – реакция на $1(t)$ при ННУ.

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$h(s) = W(s)Z\{1(t)\} = \frac{W(s)}{s} = W_h(s) = \frac{G_h}{D'_h};$$

$$h(t) = Z^{-1}\{W_h(s)\} = Z^{-1}\{W(s)/s\} \rightarrow h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{s_i t}, \text{ где } C_i = \frac{G_h(s_i)}{D'_h(s_i)}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = w(t)$$
$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$$



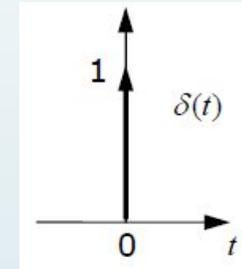
Импульсная характеристика

▣ Импульсная характеристика (весовая функция) – реакция системы на единичное импульсное воздействие (дельта-функцию) при ННУ.

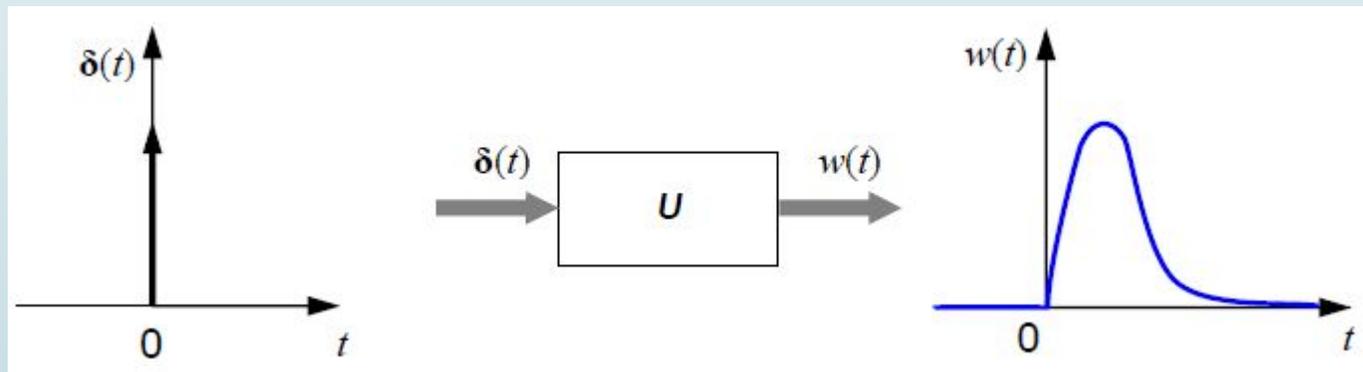
Свойства:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t - \tau) dt = \varphi(\tau);$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0);$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) w(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} x(t - \tau) w(\tau) d\tau.$$



Связь между характеристиками и воздействиями

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t);$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = w(t);$$

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt;$$

Построение временных характеристик

Реакция системы на воздействие общего вида

$Z\{f(t)\} = F(s) = \frac{G_f(s)}{D_f(s)}$ Лаплас $D(s)Y(s) = G(s)F(s) + D_H(s)$; $D_H(s)$ - ПОЛИНОМ, отвечающий предначальным условиям, т. к. $\bar{y}(0^-) \neq 0$.

$$y(t) = Z^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st} dt$$

$$Y(s) = \frac{G_y(s)}{D_y(s)} = \frac{G(s)}{D(s)} F(s) + \frac{D_H(s)}{D(s)} \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} \text{Res } Y(S_i) e^{s_i t} - \text{ для простых полюсов}$$

Изображение
вынужденного
движения

Свободная
составляющая

Вычет функции

$$\text{Res } Y(S_i) = C_i = \frac{G_y(s_i)}{D'_y(s_i)} - \text{ значение точки полюса. } D'_y(s_i) = \frac{dD_y(s)}{ds}. \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} C_i e^{s_i t}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_y} \frac{C_i}{s-s_i} - \text{ для простых полюсов}$$

Реакция системы на воздействие общего вида

□

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{G(s_i) G_f(s_i)}{D'(s_i) D_f(s_i)} e^{s_i t} + \sum_{j=1}^n \frac{G(s_j) G_f(s_j)}{D'(s_j) D_f(s_j)} e^{s_j t} + \sum_{i=1}^n \frac{D_n(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t} =$$
$$= y_c(t) + y_{уст}(t) + y_{св}(t)$$

$Re(s) < 0$, $C_i e^{s_i t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, то $y(t) \rightarrow y_{уст}(t)$; s_i - простые полюсы ПФ;
 s_j - простые полюсы изображения воздействия F.

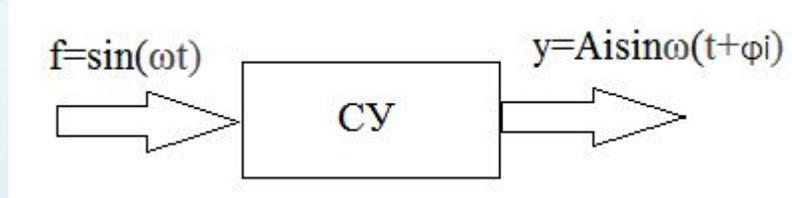
$y_c(t)$ - собственная сопровождающая или переходная составляющая вынужденного движения, происходящая из-за ненулевых посленаачальных условий, вызванных воздействием. Зависит от полюсов ПФ.

$y_{уст}(t)$ - установившаяся составляющая вынужденного движения, которая зависит от полюсов изображения воздействия.

$y_{св}(t)$ - свободная составляющая, которая зависит от полюсов ПФ.

Частотные характеристики.

- ▣ **Частотная характеристика** – зависимость параметрических установившихся реакций на гармонические воздействия всех частот.



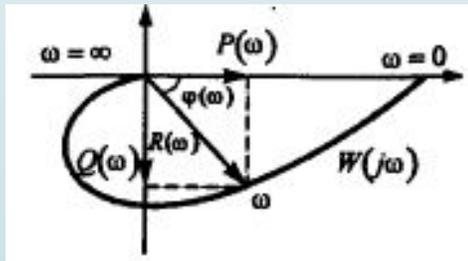
- ▣ **Комплексная частотная характеристика - $W(j\omega)$.**

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = R(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega)[\cos\varphi(\omega) + j\sin\varphi(\omega)]$$

$$P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega); Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega) = R(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

$$R(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$



Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) – Зависимость и фазы выходного сигнала от частоты входного;

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ $R(\omega)$) – амплитуды выходного сигнала от частоты входного;

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ $\varphi(\omega)$) – зависимость фазы выходного сигнала от частоты входного.

Логарифмические частотные характеристики

- Пусть АЧХ изменяется от 0,001 Гц до 100 МГц, так что амплитуда лежит в диапазоне от 10^6 до 0. Единицей отсчета на логарифмической оси частот является декада – диапазон, на котором частота увеличивается в 10 раз (а значение ее логарифма увеличивается на единицу).. В таком случае вводят логарифмические частотные характеристики или диаграмма Бode.

а) ЛАЧХ. $L(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg R(\omega)$.

б) ЛФЧХ. $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$

