Нестандартные уравнения

Составила учитель математики
МОУ «Гимназия им. Горького А.М.»:
Фабер Г.Н.

Цель:

1. Отыскание методов решения нестандартных уравнений .
2. Подбор задач для каждого метода.

Задачи:

- ***Разобрать все методы и собрать их вместе ,а также указать наиболее эффективные методы решения.***

1. Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$ и существует такое число M, что для любого x из области определения $f(x)$ и $g(x)$ имеем $f(x) \le M$, $f(x) \ge M$ *и* $g(x) \le M$, $g(x) \ge M$,

тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе $\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

2. $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$ при $a > 0$;

$a + \dfrac{1}{a} \le -2$ *при* $a \le 0$;

причем равенство достигается только при $a = \pm 1$.

3. $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ при $a \ge 0; b \ge 0$;

$a + b \ge 2\sqrt{ab}$ при $a \ge 0; b \ge 0$;

причем равенство достигается при $a = b$.

Задача 1: $\log_2(x(1-x)) = -2 + \left|\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right|$

Решение: левая часть: $\log_2(x(1-x)) \le -2$, **так как**

$$\log_2(-x^2+x) = \log_2(-(x^2-x)) = \log_2\left(-\left(x - \frac{2}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= \log_2\left(-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0; \frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$; тогда $\log_2\left(\frac{1}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right) \le -2$

правая часть: $-2 + \left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \ge -2$; $-2 + \left|\sin\frac{\pi}{x}\right| \ge -2$.

$$\begin{cases} \log_2(x(1-x)) = -2 \\ -2 + \left|\sin\frac{\pi}{x}\right| = -2 \end{cases} \qquad x = \frac{1}{2}$$

Задания

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left|Sin\frac{\pi}{4}(x-1)\right|$$

$$2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$$

$$2^{x^2-4x+5} = 1 + \sin^2\frac{\pi x}{4}$$

$$3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)$$

$$2x^2 + \log_2(7 + 2x - x^2) = 4 + x^4$$

$$\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$$

$$\log_2(1 + x^2) = \log_2 x + 2x - x^2$$

$$\log_2(3 - \sin x) = \sin x$$

$$4^{\sin^2\frac{\pi x}{4}} + 4^{\cos^2\frac{\pi x}{4}} = \sqrt{13 + 6x - 3x^2}$$

$$1 + \cos^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$$

Задания

1) $2\cos(x/3) = 5^{x}+5^{-x}$
2) $\log_{1/3}(3+|\sin x|) = 2^{|x|}-2$
3) $2^{|x|} = \sin x^{2}$
4) $3^{|x|} = \cos(x/3)$
5) $\cos^{2}(x \sin x) = 1+\log^{2}_{5}\sqrt{x^{2}+x+1}$