

Нестандартные уравнения

Составила учитель математики
МОУ «Гимназия им. Горького А.М.»:
Фабер Г.Н.

Цель:

- 1. Отыскание методов решения нестандартных уравнений .*
- 2. Подбор задач для каждого метода.*

Задачи:

- *Разобрать все методы и собрать их вместе ,а также указать наиболее эффективные методы решения.*

1. Пусть мы имеем уравнение $f(x) = g(x)$ и существует такое число M , что для любого x из области определения $f(x)$ и $g(x)$ имеем $f(x) \leq M$, $f(x) \geq M$ и $g(x) \leq M$, $g(x) \geq M$,

тогда уравнение $f(x) = g(x)$ эквивалентно системе
$$\begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$$

2. $a + \frac{1}{a} \geq 2$ при $a \geq 0$;

$a + \frac{1}{a} \leq -2$ при $a \leq 0$;

причем равенство достигается только при $a = \pm 1$.

3. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ при $a \geq 0; b \geq 0$;

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ при $a \geq 0; b \geq 0$;

причем равенство достигается при $a = b$.

Задача 1: $\log_2(x(1-x)) = -2 + \left| \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \right|$

Решение: левая часть: $\log_2(x(1-x)) \leq -2$, так как

$$\log_2(-x^2 + x) = \log_2(-(x^2 - x)) = \log_2\left(-\left(x - \frac{2}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= \log_2\left(-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}; \text{ тогда } \log_2\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leq -2$$

правая часть: $-2 + \left| \sin \frac{\pi}{x} \right| \geq -2; -2 + \left| \sin \frac{\pi}{x} \right| \geq -2.$

$$\log_2(x(1-x)) = -2$$

$$-2 + \left| \sin \frac{\pi}{x} \right| = -2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Задания

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} = 4 - \left| \sin \frac{\pi}{4}(x-1) \right|$$

$$2^x + 2^{-x} = 2 \cos \frac{x}{3}$$

$$2^{u^2-4x+5} = 1 + \sin^2 \frac{\pi x}{4}$$

$$3^x + 3^{2-x} = 3(1 + \cos 2\pi x)$$

$$2x^2 + \log_2(7 + 2x - x^2) = 4 + x^4$$

$$\log_2(6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11$$

$$\log_2(1 + x^2) = \log_2 x + 2x - x^2$$

$$\log_2(3 - \sin x) = \sin x$$

$$4^{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} + 4^{\cos^2 \frac{\pi x}{4}} = \sqrt{13 + 6x - 3x^2}$$

$$1 + \cos^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$$

Задания

1) $2 \cos (x/3) = 5^x + 5^{-x}$

2) $\log_{1/3}(3 + |\sin x|) = 2^{|x|} - 2$

3) $2^{|x|} = \sin x^2$

4) $3^{|x|} = \cos(x/3)$

5) $\cos^2 (x \sin x) = 1 + \log^2_5 \sqrt{x^2 + x + 1}$