



LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Теория вероятностей и математическая статистика

Практика

Занятие 2. Независимость. Условная вероятность

Условной вероятностью события A (при условии, что происходит событие B с вероятностью $P(B) > 0$) называют отношение

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.1)$$

Случайные события A и B называются (попарно) *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (2.2)$$

Случайные события A_1, A_2, \dots, A_n называют *независимыми в совокупности*, если

$$P(A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}) \quad (2.3)$$

для любых сочетаний $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ n -элементного множества $\{1, 2, \dots, n\}$ ($k \geq 2$).

Равенство (2.1) можно записать в виде формулы умножения вероятностей $P(AB) = P(B)P(A | B)$, обобщением которой на случай n событий A_1, \dots, A_n служит формула

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}), \quad (2.4)$$

справедливая при $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$.

Вероятность суммы событий A и B может быть вычислена как

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.5)$$

Вероятность суммы n событий находится по формуле

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} P(A_k A_l) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right). \quad (2.6)$$

Задача 2.2. События A и B независимы. Будут ли независимыми события:
а) A и \bar{B} , б) \bar{A} и \bar{B} ?

Задача 2.4. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все заданные вопросы. Найти ту же вероятность, используя классическое определение вероятности.

Задача 2.6. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события: A - появление туза, B - появление карты красной масти, C - появление бубнового туза, D - появление десятки. Зависимы или нет следующие пары событий: а) A и B , б) A и C , в) B и C , г) B и D , д) C и D ?

Задача 2.11. Даны три попарно независимые равновероятные события, которые не могут произойти одновременно. Определить максимально возможное значение вероятности суммы этих событий. Изменится ли ответ, если снять с событий условие равной вероятности?

Задача 2.14. В связке из n ключей только один подходит к секретеру. Ключи последовательно подбирают до тех пор, пока не обнаружат нужный ключ. Найти вероятность того, что секретер откроет k -ым ключом.

Задача 2.20. Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет “герб”. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

На дом: 2.5, 2.7, 2.9, 2.12, 2.16*, 2.19, 2.22*.