LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY
of NIZHNI NOVGOROD
National Research University

Теория вероятностей и математическая статистика

Практика

Занятие 2. Независимость. Условная вероятность

Условной вероятностью события A (при условии, что происходит событие B с вероятностью $P(B) > 0$) называют отношение

$$P\,(A \mid B) = \frac{P\,(AB)}{P\,(B)}\,. \tag{2.1}$$

Случайные события A и B называются (попарно) ***независимыми***, если

$$P\,(AB) = P\,(A)\,P\,(B)\,. \tag{2.2}$$

Случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют ***независимыми в совокупности***, если

$$P\,(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) = P\,(A_{i_1})\,P\,(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P\,(A_{i_k}) \tag{2.3}$$

для любых сочетаний $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ n - элементного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(k \geq 2)$.

Равенство (2.1) можно записать в виде формулы умножения вероятностей $P\,(AB) = P\,(B)\,P\,(A \mid B)$, обобщением которой на случай n событий $A_1, \ldots, A_n$ служит формула

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\,(A_1)\,P\,(A_2 \mid A_1)\,P\,(A_3 \mid A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P\,(A_n \mid A_1 \ldots A_{n-1})\,, \tag{2.4}$$

справедливая при $P\,(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$.

Вероятность суммы событий A и B может быть вычислена как

$$P\left(A\bigcup B\right) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2.5)$$

Вероятность суммы n событий находится по формуле

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1\le k}\sum_{\le l\le n} P(A_k A_l) + \ldots + (-1)^n P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right). \qquad (2.6)$$

Задача 2.2. События A и B независимы. Будут ли независимыми события: а) A и $\bar{B}$, б) $\bar{A}$ и $\bar{B}$?

Задача 2.4. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все заданные вопросы. Найти ту же вероятность, используя классическое определение вероятности.

Задача 2.6. Из полной колоды карт (52 листа) вынимается одна карта. Рассматриваются события: A - появление туза, B - появление карты красной масти, C - появление бубнового туза, D - появление десятки. Зависимы или нет следующие пары событий: а) A и B, б) A и C, в) B и C, г) B и D, д) C и D?

Задача 2.11. Даны три попарно независимые равновероятные события, которые не могут произойти одновременно. Определить максимально возможное значение вероятности суммы этих событий. Изменится ли ответ, если снять с событий условие равной вероятности?

Задача 2.14. В связке из n ключей только один подходит к секретеру. Ключи последовательно подбирают до тех пор, пока не обнаружат нужный ключ. Найти вероятность того, что секретер откроют k-ым ключом.

Задача 2.20. Трое игроков поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет "герб". Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

На дом: 2.5, 2.7, 2.9, 2.12, 2.16*, 2.19, 2.22*.