

Знайти всі значення параметра  $p$ , при яких область визначення функції

$$y = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{\frac{x^2 - (p + 3)x + 3p}{x + 5}}$$

складається з однієї точки

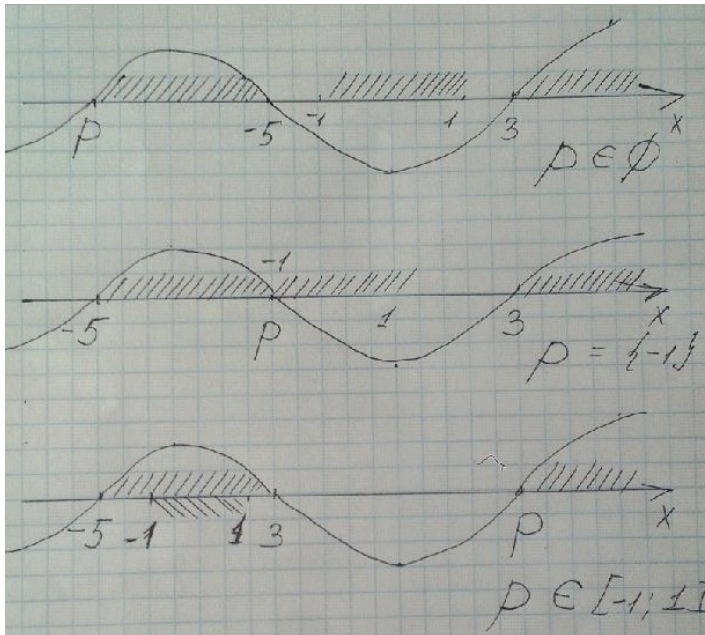
Область визначення даної функції задається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 & *(-1) \\ \frac{x^2 - (p + 3)x + 3p}{x + 5} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 1) + (x + 1) \leq 0 & (1) \\ \frac{(x - p) \cdot (x - 3)}{x + 5} \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Нерівність (1) виконується при  $x \in [-1; 1]$ .

Розв'яжемо нерівність (2). Є три різних випадки розміщення точок.  $x = -5$ ;  $x = p$ ;  $x = 3$ .

Зобразимо ці випадки на координатних прямих:



Зіставимо відрізок  $[-1; 1]$  із заштрихованими проміжками. Відрізок  $[-1; 1]$  може мати із заштрихованими проміжками єдину спільну точку тільки у випадку, коли  $p = -1$ . Це спіла точка є  $x = -1$

Відповідь:  $p = -1$ .

. Розв'язати рівняння

$$x + \sqrt{x} + \sqrt{1 + \{x\}} = 1$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{1 + \{x\}} = (1 - x)$$

$$\text{ОДЗ: } 1 - x \geq 0$$

$$x \leq 1$$

$$x \leq 1$$

$$[x] + \sqrt{1 + \{x\}} \geq 0$$

$$\sqrt{1 + \{x\}} \geq -[x]$$

$$x \geq -1$$

Отже,  $x \in [-1; 1]$

1)  $x = 0$  – корінь рівняння

2) якщо  $x \in (-1; 0)$ , то  $[x] = -1$

$$[x] + \sqrt{1 + \{x\}} = (1 - x)^2$$

$$-1 + \sqrt{1 + \{x\}} = x^2 - 2x + 1$$

$$\sqrt{1 + \{x\}} = x^2 - 2x + 2$$

Оскільки  $x \in [-1; 0)$ , то

$$\sqrt{1 + \{x\}} < \sqrt{2} < 2 < x^2 - 2x + 2$$

Отже, на даному проміжку рівняння немає коренів.

1) Якщо  $x \in (0;1)$ , то  $[x] = 0$

$$0 + \xi \overline{1 + \{x\}} = (1 - x)^2$$

$$1 + \{x\} = (1 - x)^4$$

$$1 + \{x\} > 1, \text{ а } (1 - x)^4 < 1$$

Отже, на даному проміжку рівняння немає розв'язків.

2) Коли  $x = 1$ , то  $[x] = 1$ ;  $\{x\} = 0$

$$1 + \xi \overline{1 + \xi \overline{1 + 0}} = 1 + \xi \overline{2} \neq 1$$

Отже,  $x = 1$  – не є коренем рівняння.

Відповідь:  $x = 0$

Обчислити  $\sin \frac{\alpha + \beta}{2}$  і  $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ , якщо  $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$ ;  $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$ ;

$$\frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi - \frac{\pi}{2} < \beta < 0$$

Розв'язання. Маємо

$$-\frac{21}{65} = \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (1)$$

$$-\frac{27}{65} = \cos \alpha + \cos \beta = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (2)$$

Поділивши почленно (1) на (2) дістанемо:

$$\frac{-\frac{21}{65}}{-\frac{27}{65}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9}$$

Зазначимо, що  $2\pi < \alpha + \beta < 3\pi$  і  $\pi < \frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{3\pi}{2}$ , тобто  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  це кут третьої чверті. Отже,

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} < 0 \quad \text{і} \quad \sin \frac{\alpha + \beta}{2} < 0. \quad \text{Маємо} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \frac{81}{49}(\text{квадрат}) \frac{7}{9}}$$

$$\text{Тоді } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{7}{9}\right)^2}} = - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{49}{81}}} = - \frac{9}{\sqrt{130}}.$$

$$\text{Маємо: } \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{7}{9} \left(-\frac{9}{\sqrt{130}}\right) = - \frac{7}{\sqrt{130}}$$

$$\text{Відповідь: } \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = - \frac{7}{\sqrt{130}}$$

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = - \frac{9}{\sqrt{130}}$$