Знайти всі значення параметра p , при яких область визначення функції

$$y = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{\frac{x^2 - (p+3)x + 3p}{x+5}}$$

складається з однієї точки

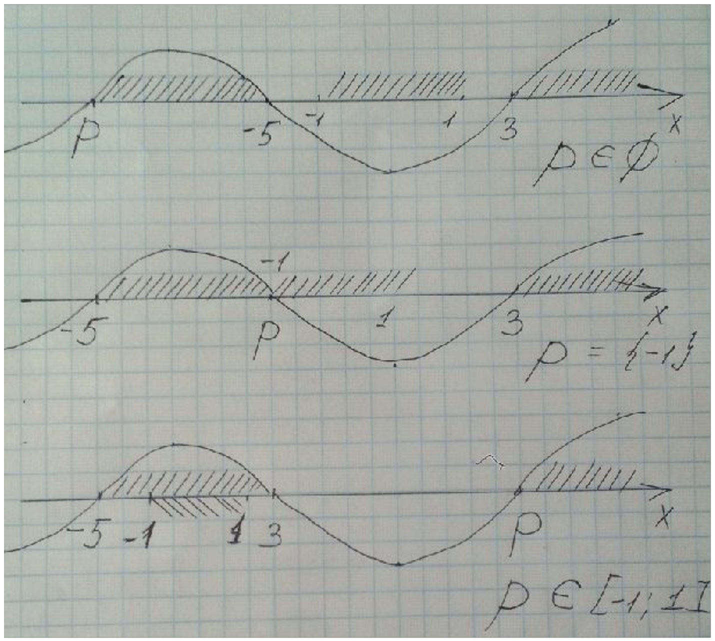
Область визначення даної функції задається системою нерівностей:

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \qquad *(-1) \\ \dfrac{x^2 - (p+3)x + 3p}{x+5} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\cdot(x+1) \leq 0 \qquad (1) \\ \dfrac{(x-p)\cdot(x-3)}{x+5} \leq 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Нерівність (1) виконується при $x \in [-1;1]$.

Розв’яжемо нерівність (2). Є три різних випадки розміщення точок. x=-5; x=p; x=3.

Зобразимо ці випадки на координатних прямих:



Зіставимо відрізок [-1; 1] із заштрихованими проміжками. Відрізок [-1; 1] може мати із заштрихованими проміжками єдину спільну точку тільки у випадку, коли p = -1. Це спіла точка є x = -1

Відповідь: p = -1.

. Розв'язати рівняння

$$x + \sqrt{[x] + \sqrt{1 + \{x\}}} = 1$$

$$\sqrt{[x] + \sqrt{1 + \{x\}}} = (1 - x)$$

ОДЗ: $$\begin{array}{lll} 1 - x \geq 0 & x \leq 1 & x \leq 1 \\ [x] + \sqrt{1 + \{x\}} \geq 0 & \sqrt{1 + \{x\}} \geq -[x] & x \geq -1 \end{array}$$

Отже, $x \in [-1; 1]$

1) **$x = 0$ – корінь рівняння**
2) якщо $x \in (-1; 0)$, то $[x] = -1$

   $$[x] + \sqrt{1 + \{x\}} = (1 - x)^2$$

   $$-1 + \sqrt{1 + \{x\}} = x^2 - 2x + 1$$

   $$\sqrt{1 + \{x\}} = x^2 - 2x + 2$$

Оскільки $x \in [-1;0)$, то

$$\sqrt{1 + \{x\}} < \sqrt{2} < 2 < x^2 - 2x + 2$$

Отже, на даному проміжку рівняння немає коренів.

1) Якщо $x \in (0;1)$, то $[x] = 0$

$0 + \sqrt{1 + \{x\}} = (1 - x)^2$

$1 + \{x\} = (1 - x)^4$

$1 + \{x\} > 1$, а $(1 - x)^4 < 1$

Отже, на даному проміжку рівняння немає розв’язків.

2) Коли $x = 1$, то $[x] = 1$; $\{x\} = 0$

$1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 0}} = 1 + \sqrt{2} \neq 1$

Отже, $x = 1$ – не є коренем рівняння.

Відповідь: $x = 0$

Обчислити $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ і $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, якщо $\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{21}{65}$; $\cos\alpha+\cos\beta=-\frac{27}{65}$;

$\frac{5\pi}{2}<\alpha<3\pi$ і $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$

Розв’язання. Маємо

$$-\frac{21}{65}=\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (1)$$

$$-\frac{27}{65}=\cos\alpha+\cos\beta=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (2)$$

Поділивши почленно (1) на (2) дістанемо:

$$\frac{-\frac{21}{65}}{-\frac{27}{65}}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}; \quad \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{7}{9}$$

Зазначимо, що $2\pi<\alpha+\beta<3\pi$ і $\pi<\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{3\pi}{2}$, тобто $\frac{\alpha+\beta}{2}$ це кут третьої чверті. Отже,

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}<0$ і $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}<0$. Маємо $\cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}(\text{квадрат})x}$.

Тоді $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}(\text{квадрат})\frac{\alpha+\beta}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{7}{9})\text{квадрат}}} = -\frac{9}{\sqrt{130}}.$

Маємо: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{7}{9}\left(-\frac{9}{\sqrt{130}}\right) = -\frac{7}{\sqrt{130}}$

Відповідь: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{7}{\sqrt{130}}$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{9}{\sqrt{130}}$$