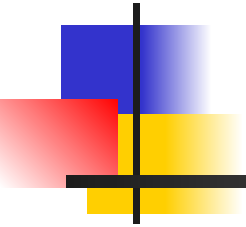
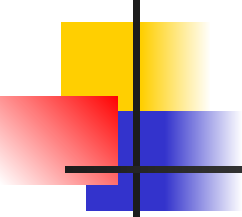


Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных





Примеры функций нескольких переменных

- $S(a, b) = a \cdot b$ – площадь прямоугольника со сторонами a и b .
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ – период колебаний груза массы m на пружине с жесткостью k .
- $R = \frac{P}{a+b}$ – уровень рентабельности зависит от прибыли P на реализованную продукцию, величины основных a и b оборотных фондов.



Декартово произведение

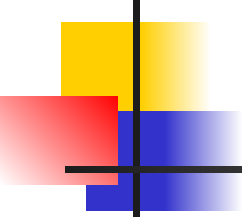
$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$
$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in E_i\}$$

$$\forall i \ E_i = R \implies R^n$$

Функция n действительных переменных

- Отображение $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, где $X \subset \mathbf{R}^n$ называется действительной функцией n действительных переменных (аргументов).
- Соответствие f , которое для каждой пары действительных чисел $(x; y)$ из множества $D \subset \mathbf{R}^2$ определяет один и только один элемент z из множества Z , называется однозначной функцией двух переменных.

Функции



$$z = f(x; y)$$

$$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

$$y = f(\bar{x})$$

$$f: D \rightarrow Z$$

$$f: X \rightarrow \mathbf{R}$$

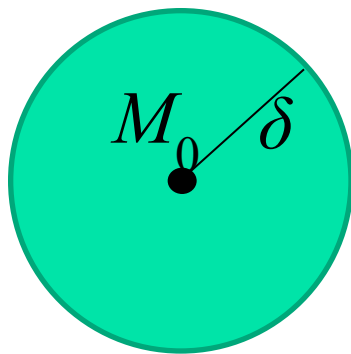
Область определения
(существования) функции



Окрестность точки

■ δ -окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$ называется множество всех точек $M(x; y)$ плоскости xOy , координаты удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$



$$\rho(M; M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Найти область определения функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$D(f) : 1 - x^2 - y^2 > 0$$

$$x^2 + y^2 < 1$$

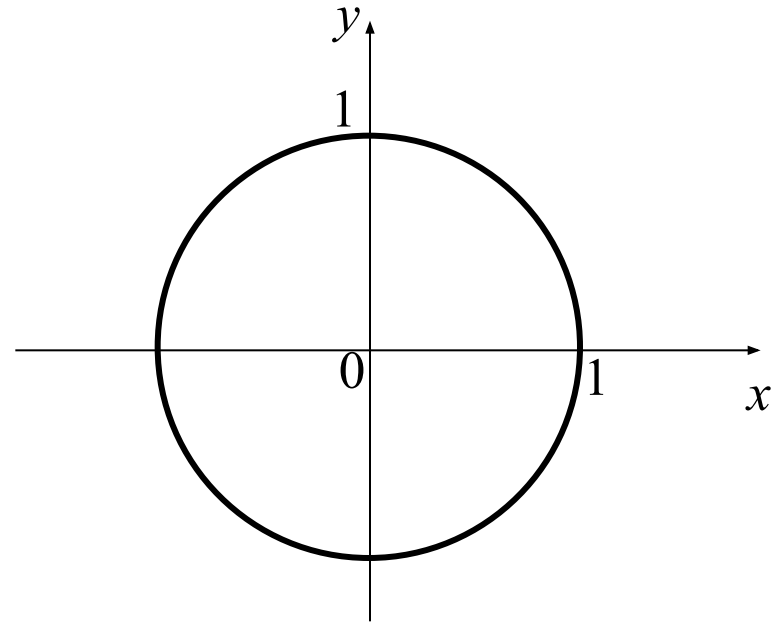




График функции $f: X \rightarrow R$

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in R^{n+1} : y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\}$$

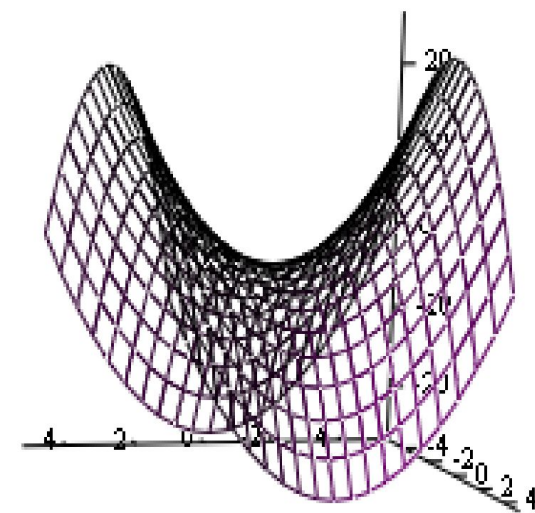
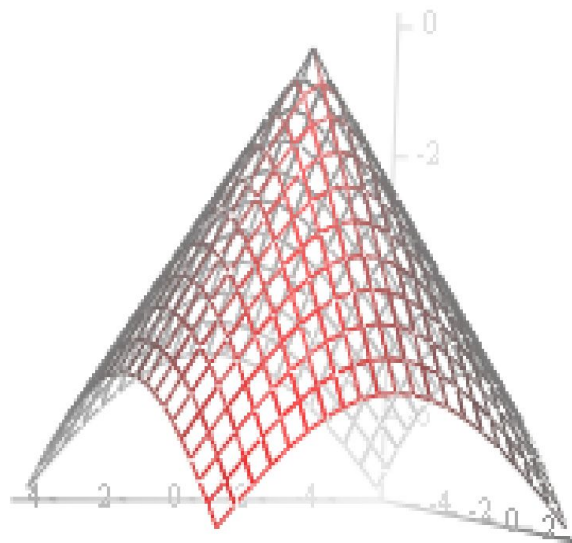
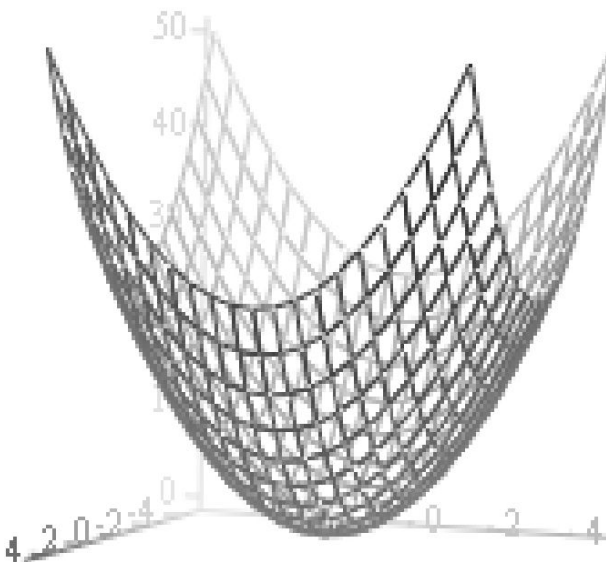
- При $n=2$ графиком функции является поверхность в R^3 .

Функции двух переменных

$$(x, y) \xrightarrow{f} x^2 + y^2$$

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



Предел функции в точке

$M_0(x_0; y_0)$ (при $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$)

$$A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(x; y) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall x \neq x_0, y \neq y_0 \quad \rho(M; M_0) < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x; y) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x; y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$$

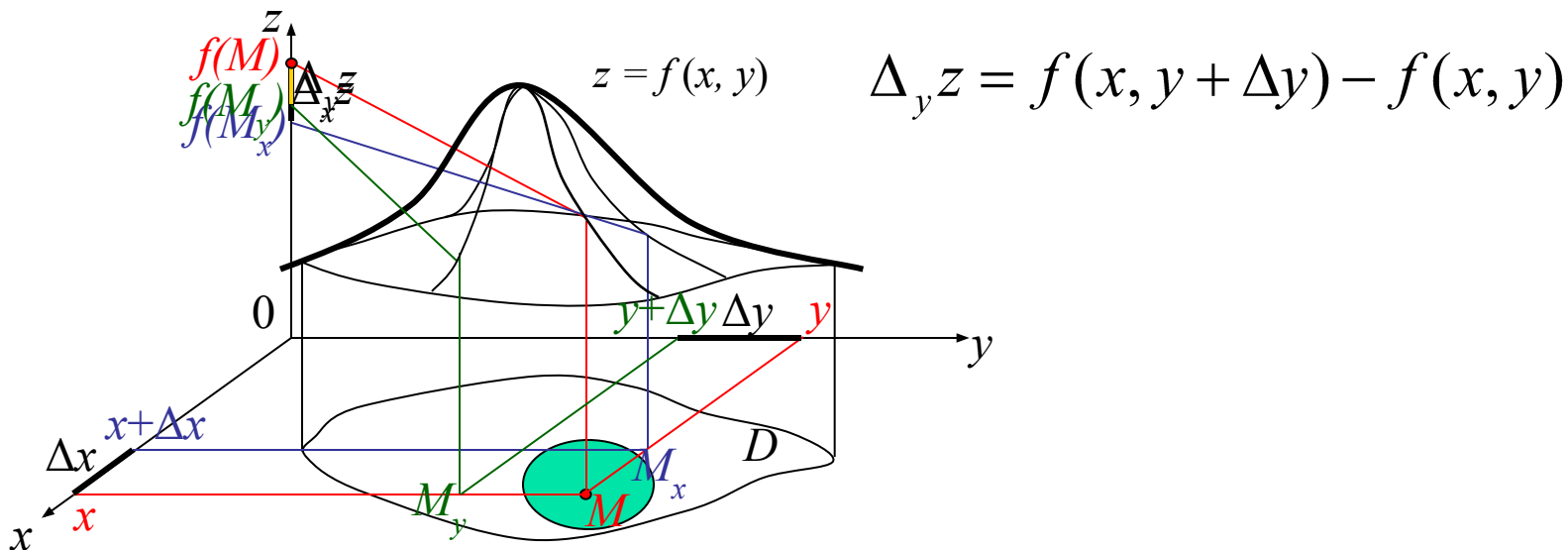
Непрерывность функции в точке

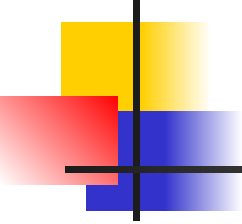
- Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$$

Частные приращения функций двух переменных

- Функция $z=f(x, y)$ определена в окрестности точки $M(x, y)$.
- Δx – приращение переменной x в точке M (переменная y остается неизменной).
- Частным приращением функции $z=f(x, y)$ по переменной x называется $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$





Частные производные функции двух переменных

- Частной производной функции $z=f(x, y)$ по переменной x называется предел, если он существует, отношения частного приращения функции по переменной x к приращению этой переменной, когда последнее стремится к 0.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Частные производные функции двух переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Частные
производные
функции z по
переменным x и y .

Обозначения частной производной функции $z=f(x, y)$

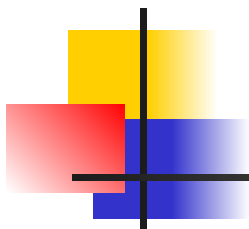
по переменной x : $f'_x(x, y)$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ z'_x

вычисленной в точке $M(x_0, y_0)$

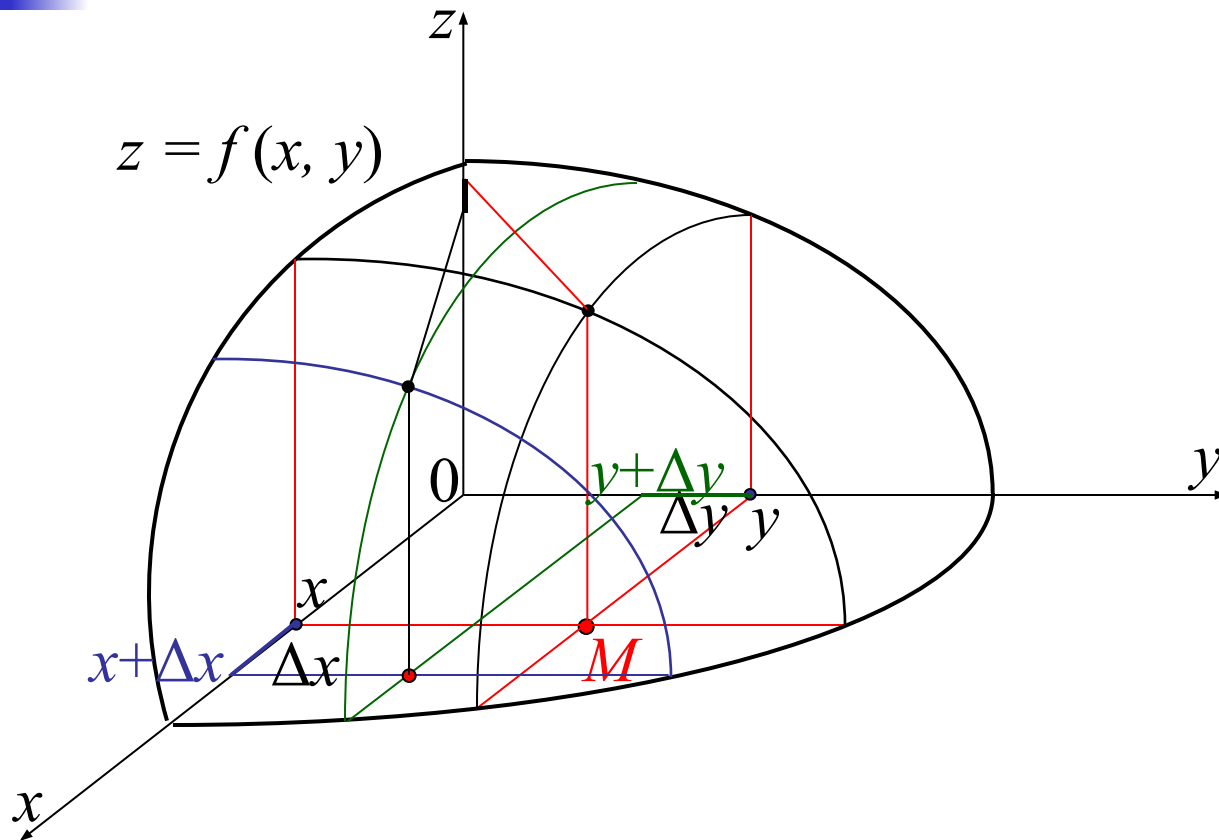
$f'_x(x_0, y_0)$

$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$

Геометрический смысл частных производных



Полное приращение функций двух переменных



$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Дифференцируемость функции

Функция $z=f(x; y)$ называется дифференцируемой в точке M , если полное приращение этой функции

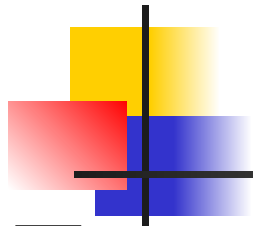
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{o(\rho)}{\rho} \rightarrow 0$$

Полный дифференциал функции



Полным дифференциалом дифференцируемой функции $z=f(x; y)$ в точке M называется главная часть её приращения, линейная относительно Δx и Δy , т.е.

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\rho)$$

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$$

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy$$

Необходимое условие дифференцируемости функции

- Если функция $z=f(x; y)$ дифференцируема в точке $M(x; y)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные, причем $A = \frac{\partial z}{\partial x}$; $B = \frac{\partial z}{\partial y}$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Достаточное условие дифференцируемости функции



- Если функция $z=f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ имеет непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке.

Частные производные ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$z = f(x, y)$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ — частные производные первого порядка
(непрерывные и имеют частные производные)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

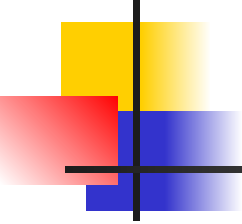
частные
производные
второго
порядка

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Смешанные


Частные производные высших порядков


$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = \left(z''_{xy} \right)'_y = z^{(3)}_{xy^2}$$

частная
производная
третьего
порядка

$$f^{(n)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}} = \left(f^{(n-1)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-1}}} \right)'_{x_{i_n}}$$

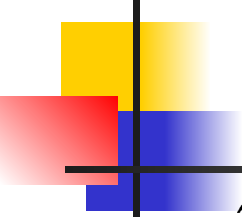
Теорема Шварца


$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

■ Если функция от n переменных определена в открытой n -мерной области, в которой существуют частные производные до $(k-1)$ -го порядка включительно и смешанные производные k -го порядка включительно и все эти производные **непрерывны**, то смешанные производные k -го порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, **равны между собой**.

Дифференциалы высших порядков

$$z = f(x, y)$$


$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

полный дифференциал
первого порядка

$$d^2 z = d(dz)$$

дифференциал
второго порядка

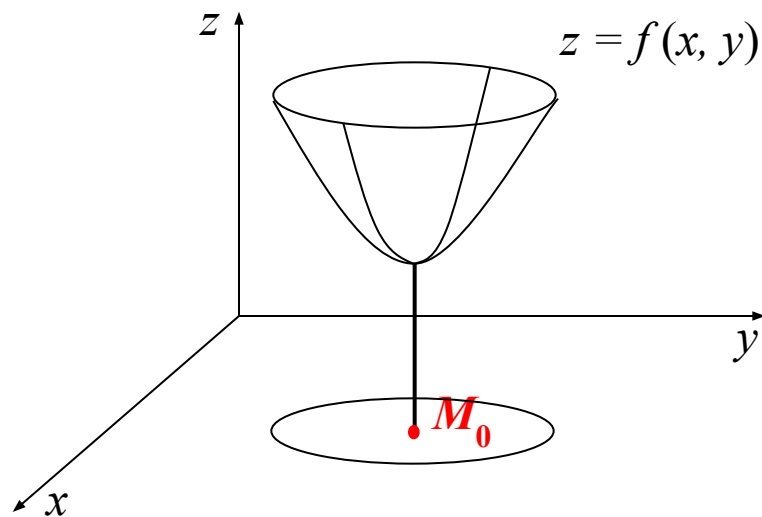
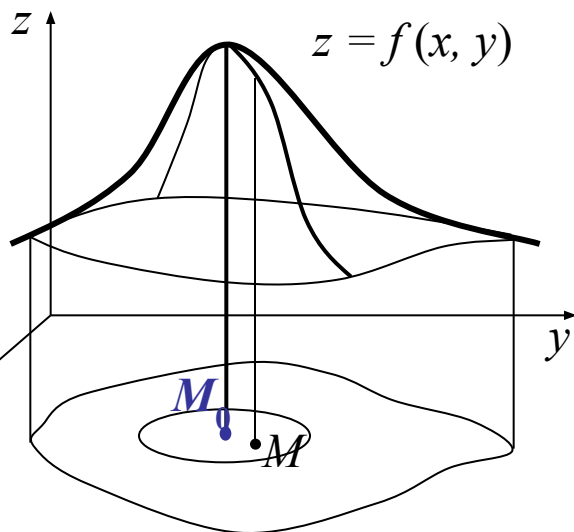
$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Точки экстремума

■ Функция $z=f(x, y)$ определена в области D

■ Точка $M_0(x_0, y_0)$ области D называется точкой **локального максимума (минимума)** если существует $B(M_0, \delta)$, что для всех точек $M(x, y)$ из $B(M_0, \delta) \cap D$ выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$).

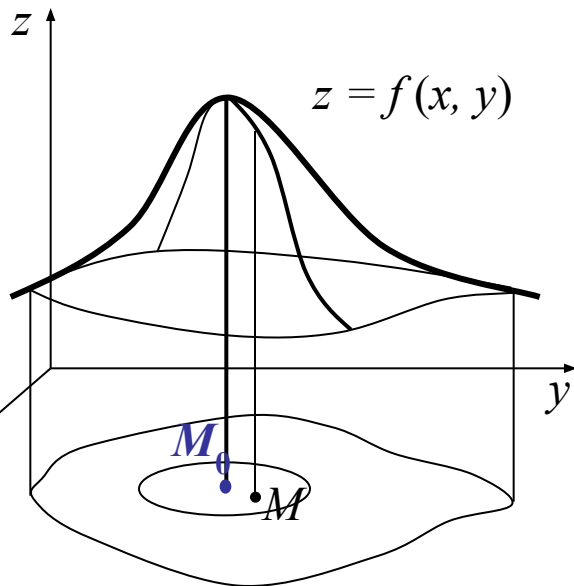
■ Точки максимума и минимума (Δz – знакопостоянно) функции называются **точками экстремума**, а значения функции в этих точках – **экстремальными**.



Необходимое условие существования экстремума

- Если функция $z=f(x, y)$ определена и дифференцируема в $B(M_0, \delta)$ и имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю:

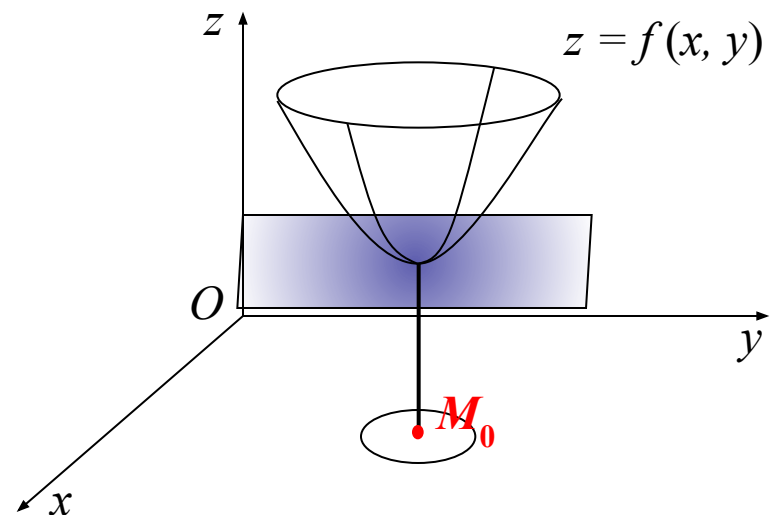
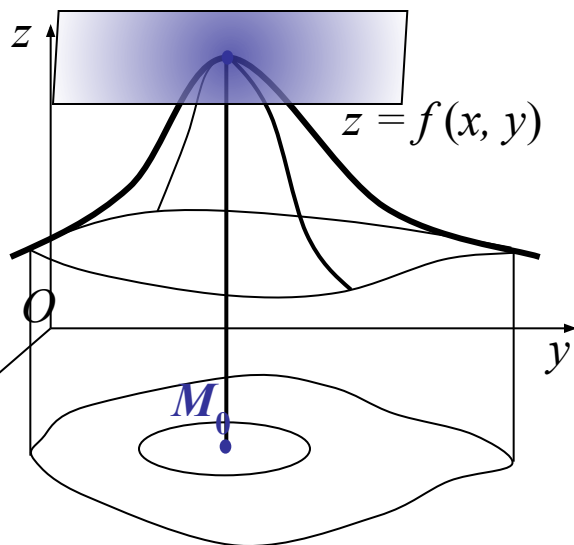
$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$$



Эта система эквивалентна уравнению $df(x, y)=0$.

- Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой все частные производные функции $z=f(x, y)$ существуют и равны нулю, называется **стационарной точкой** данной функции.

- Необходимое условие достижения дифференцируемой функцией $z=f(x, y)$ экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ геометрически выражается в том, что касательная плоскость к поверхности (графику функции $z=f(x, y)$) в соответствующей её точке параллельна плоскости независимых переменных.

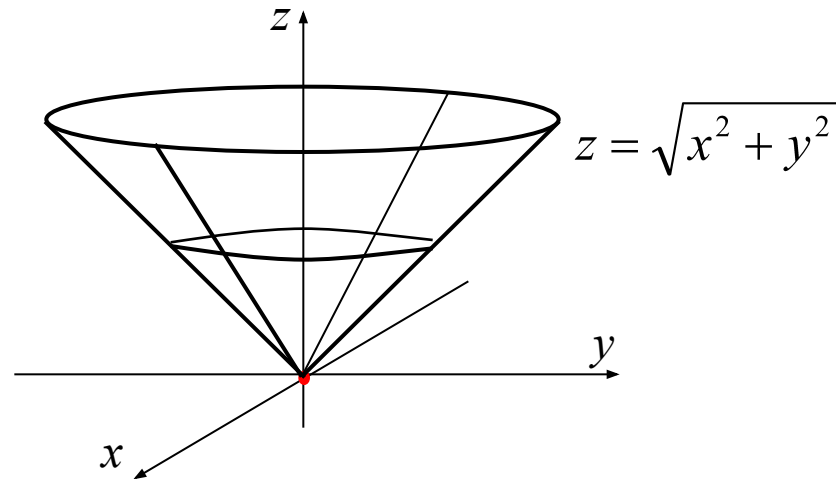


Замечание.

- Функция $z=f(x, y)$ может иметь экстремум и в таких точках, в которых по крайней мере одна из частных производных не существует.
- Например, функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $O(0, 0)$ имеет минимум, но в этой точке частные производные первого порядка не существуют.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



- Точки, в которых частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существует, называются **критическими точками**.

Достаточное условие существования экстремума

Случай функции двух переменных

- Пусть функция $z=f(x, y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, причем $\text{grad } f(M_0) = 0$. Обозначим

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} = a_{11} \quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} = a_{12} \quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} = a_{22} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Если $\Delta > 0$, $a_{11} < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимума;
- Если $\Delta > 0$, $a_{11} > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума;
- Если $\Delta < 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума;
- Если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

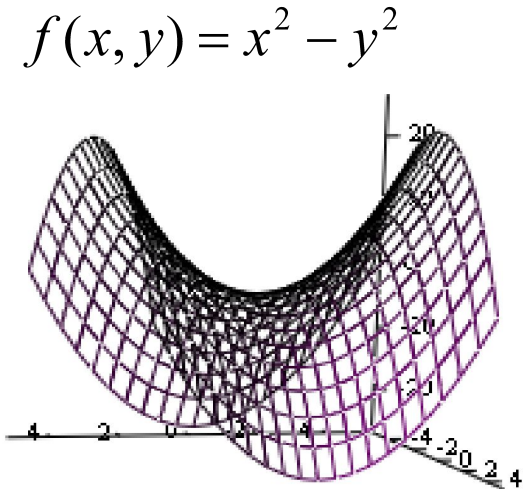
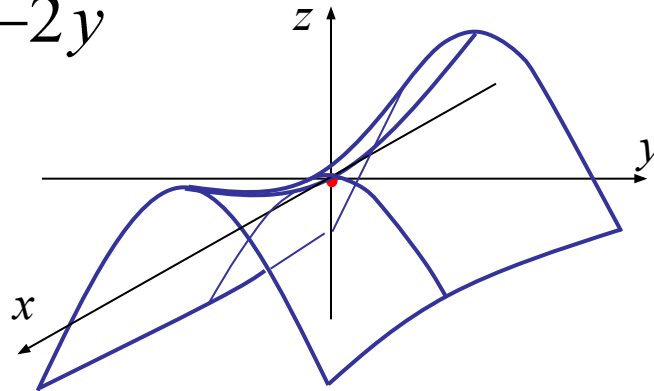
Точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума если $d^2f(M_0)$ знакопостоянен.

Замечание.

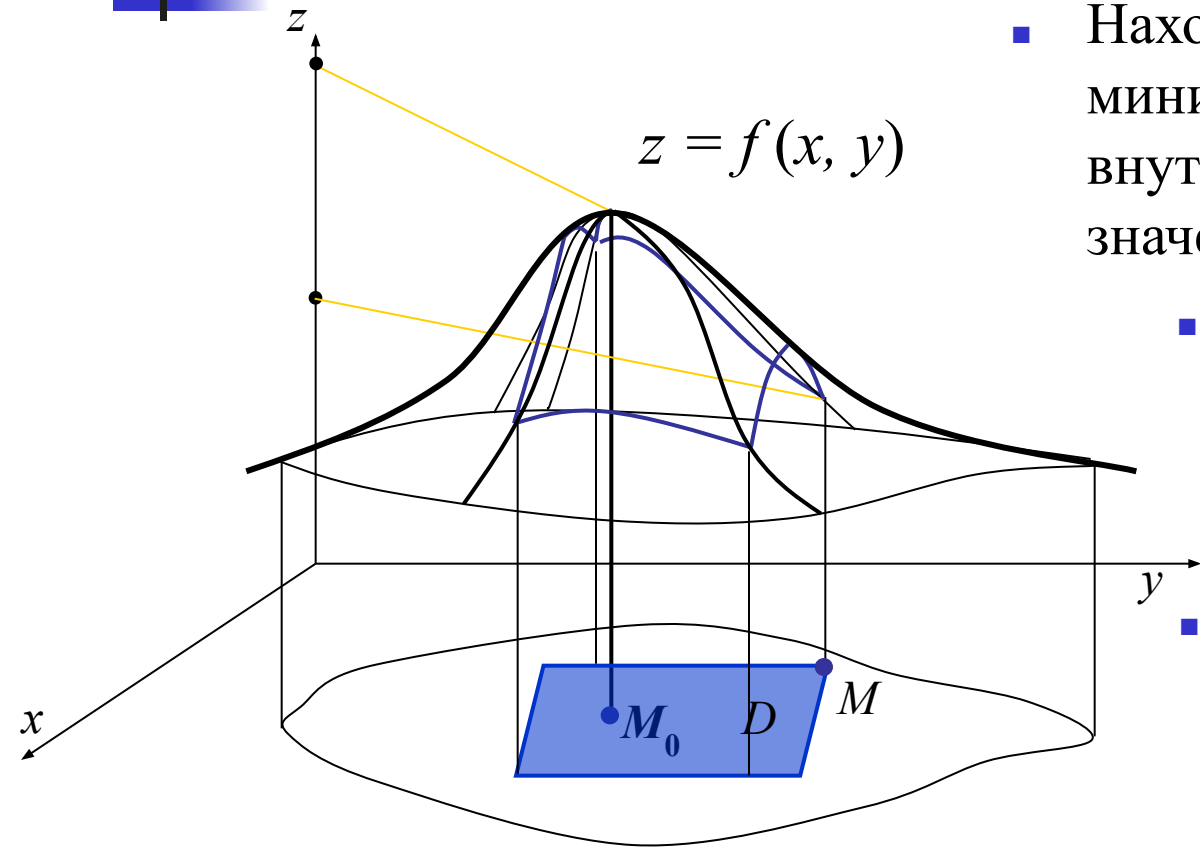
- Стационарная точка функции $z=f(x, y)$ может и не являться точкой экстремума.
- Например, функция $z = x^2 - y^2$ в точке $O(0, 0)$ не имеет экстремума, хотя в этой точке частные производные первого порядка равны нулю.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$



Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области D



- Находим все максимумы и минимумы функции $z=f(x, y)$ внутри области D и вычисляем значение функции в них.
- Находим наибольшее и наименьшее значение функции на границе области D .
- Наибольшее из всех этих чисел будет наибольшим значением функции $f(x, y)$ в области D , а наименьшее – наименьшим.