Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Примеры функций нескольких переменных

- $S(a, b) = a \cdot b$ – площадь прямоугольника со сторонами a и b.
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ – период колебаний груза массы m на пружине с жесткостью k.
- $R = \frac{P}{a+b}$ – уровень рентабельности зависит от прибыли P на реализованную продукцию, величины основных a и b оборотных фондов.

Декартово произведение

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$$

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i\}$$

$$\forall i \;\; E_i = R \Rightarrow R^n$$

Функция *n* действительных переменных

- Отображение $f\colon X \to \boldsymbol{R}$, где $X \subset R^n$ называется действительной функцией *n* действительных переменных (аргументов).
- Соответствие f, которое для каждой пары действительных чисел $(x;\ y)$ из множества $D \subset R^2$ определяет один и только один элемент z из множества Z, называется однозначной функцией двух переменных.

Функции

$z=f(x;\, y)$

$y=f(x_1;\, x_2;\ldots;\, x_n)$

$$y = f(\bar{x})$$

$f\colon D \to Z$

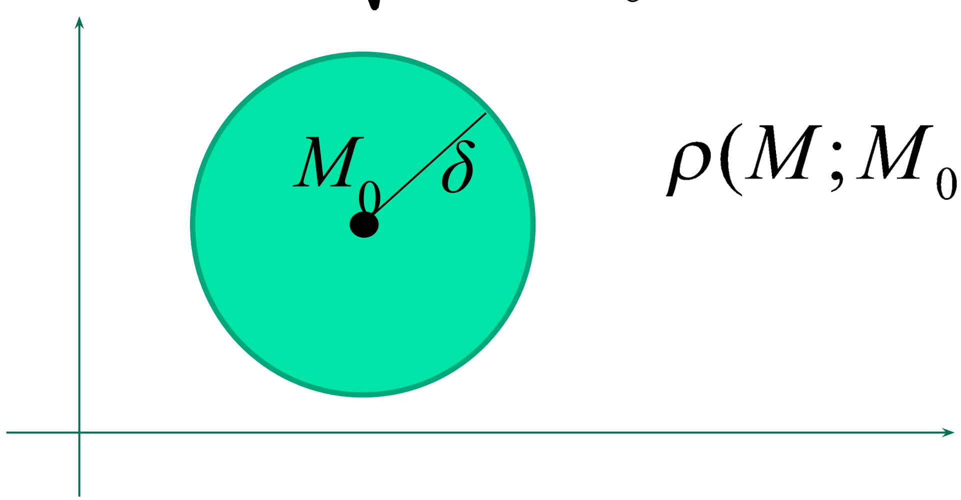
$f\colon X \to \boldsymbol{R}$

Область определения (существования) функции

Окрестность точки

- δ-окрестностью точки $M_0\,(x_0;\, y_0)$ называется множество всех точек $M(x;\, y)$ плоскости xOy, координаты удовлетворяют неравенству

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$



$$\rho(M;M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

Найти область определения функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$D(f): 1 - x^2 - y^2 > 0$$

$$x^2 + y^2 < 1$$

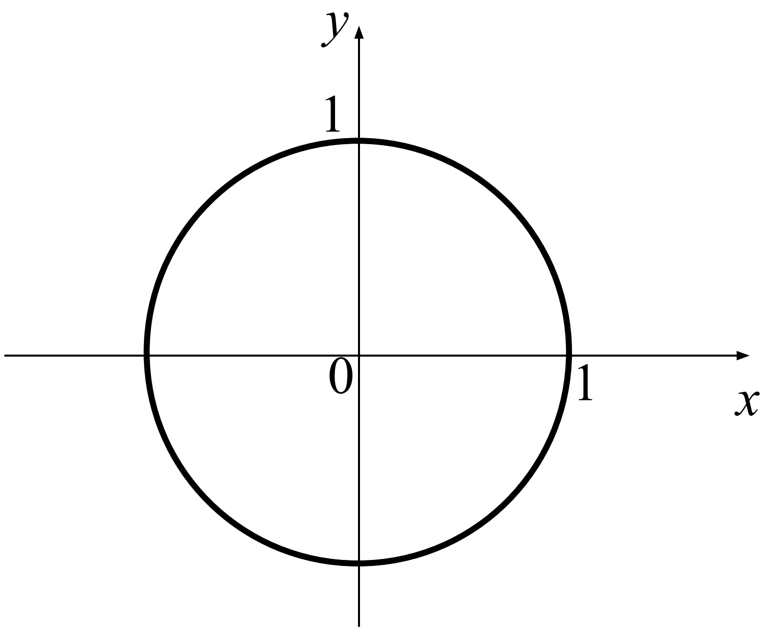


График функции *f*: *X*→*R*

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in R^{n+1} : y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right\}$$

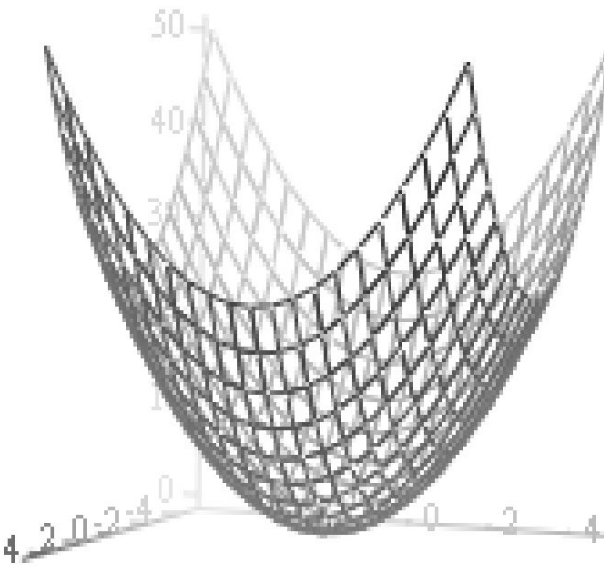
- При $n=2$ графиком функции является поверхность в $\boldsymbol{R}^3$.

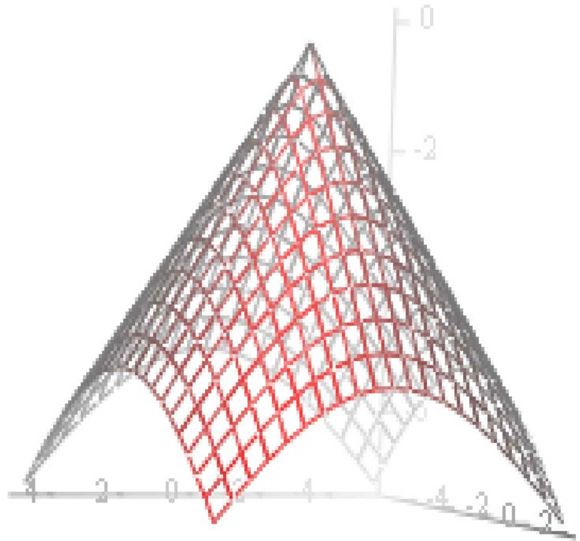
Функции двух переменных

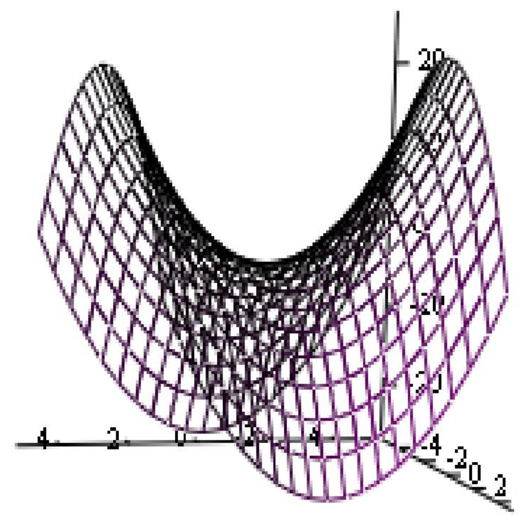
$$(x, y) \xrightarrow{f} x^2 + y^2$$

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$







Предел функции в точке $M_0(x_0;y_0)$ (при $x \to x_0$ и $y \to y_0$)

$$A = \lim_{M \to M_0} f(x;\ y) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall x \neq x_0, y \neq y_0\ \ \rho(M; M_0) < \delta$$

$$\Rightarrow | f(x;y) - A | < \varepsilon$$

$$\lim_{M \to M_0} f(x;\ y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;\ y)$$

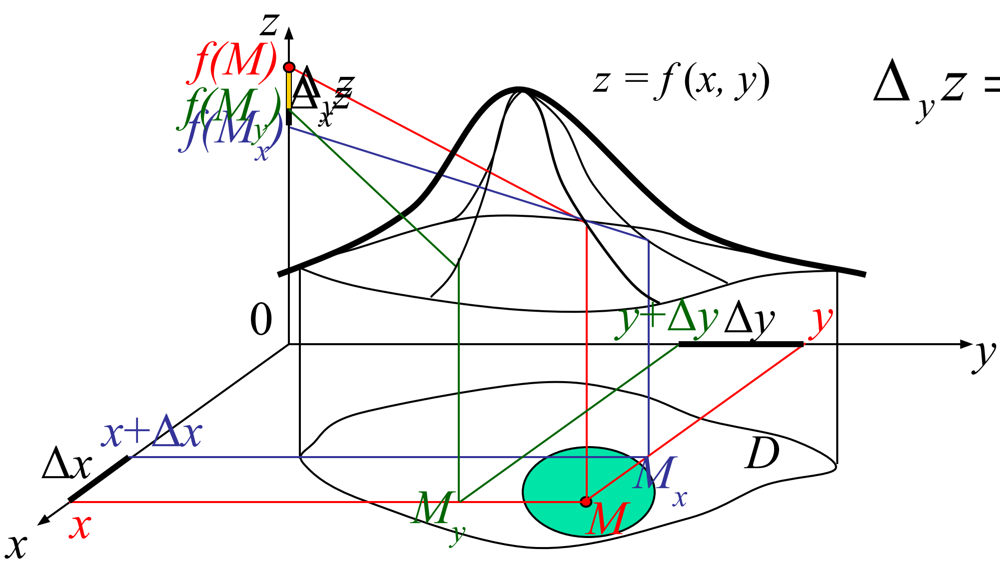
Непрерывность функции в точке

- Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0\,(x_0;\,y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;\ y) = f(x_0;\ y_0)$$

Частные приращения функций двух переменных

- Функция $z=f(x, y)$ определена в окрестности точки $M(x, y)$.
- Δx – приращение переменной x в точке M (переменная y остается неизменной).
- Частным приращением функции $z=f(x, y)$ по переменной x называется $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$



$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

Частные производные функции двух переменных

- Частной производной функции $z=f(x, y)$ по переменной x называется предел, если он существует, отношения частного приращения функции по переменной x к приращению этой переменной, когда последнее стремится к 0.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Частные производные функции двух переменных

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Частные производные функции z по переменным x и y.

Обозначения частной производной функции $z=f(x, y)$

по переменной x: $f_x^{/}(x, y)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}$ $\quad z'_x$

вычисленной в точке $M(x_0, y_0)$ $\quad f'_x(x_0, y_0)$ $\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$

Геометрический смысл частных производных

$P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

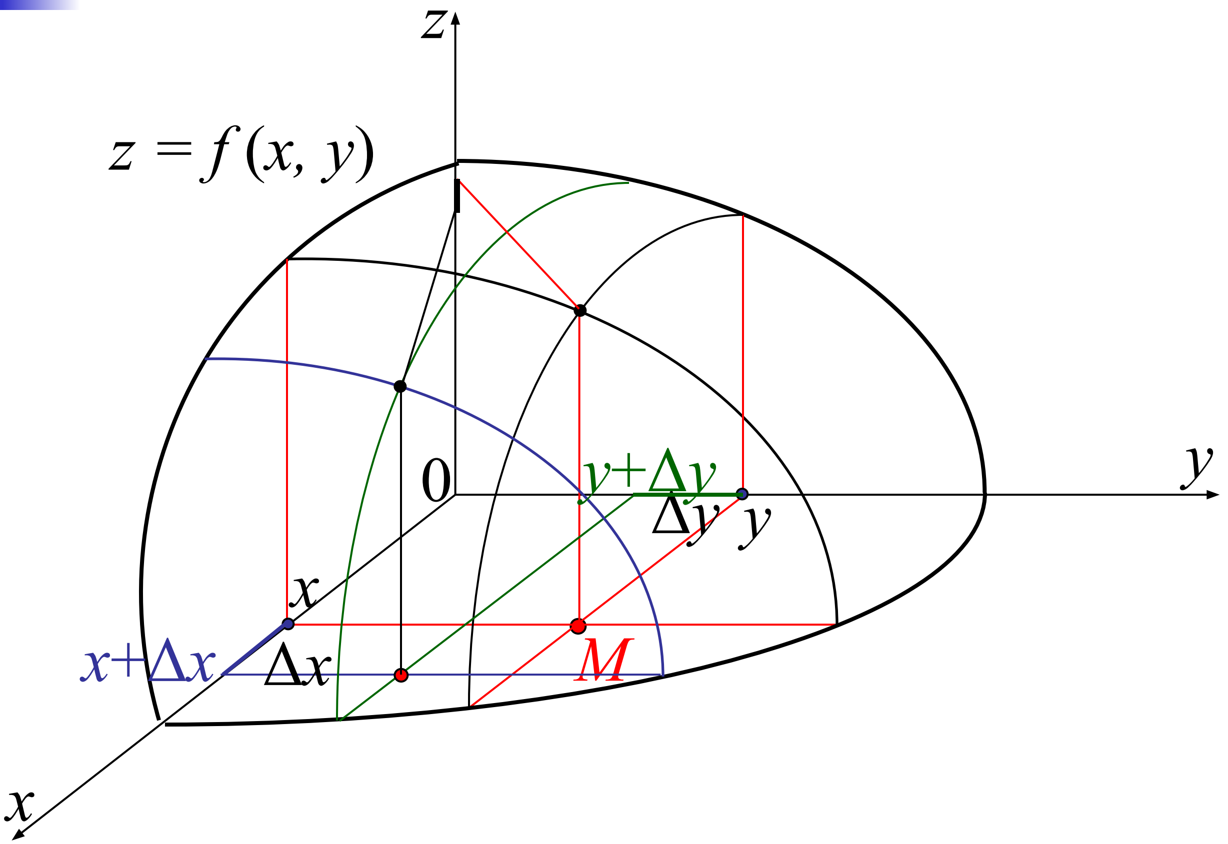
$f_x^{/}(x_0, y_0) = tg\alpha$

$z = f(x, y)$

$f_y^{/}(x_0, y_0) = tg\beta$

Частная производная $f^{/}_x(x_0, y_0)$ – угловой коэффициент касательной к линии пересечения поверхности $z = f(x,y)$ и плоскости $y=y_0$ в соответствующей точке.

Полное приращение функций двух переменных



$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Дифференцируемость функции

Функция $z=f(x;\ y)$ называется дифференцируемой в точке M, если полное приращение этой функции

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

можно представить в виде

$$\Delta z = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{o(\rho)}{\rho} \to 0$$

Полный дифференциал функции

Полным дифференциалом дифференцируемой функции $z=f(x;\ y)$ в точке M называется главная часть её приращения, линейная относительно Δx и Δy, т.е.

$$\Delta z = \boxed{A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y} + o(\rho)$$

$$dz = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$$

$$dz = A\cdot dx + B\cdot dy$$

Необходимое условие дифференцируемости функции

- Если функция $z=f(x;\ y)$ дифференцируема в точке $M(x;\ y)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные, причем $A=\frac{\partial z}{\partial x};\ B=\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\boxed{dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

Достаточное условие дифференцируемости функции

- Если функция $z=f(x;\ y)$ в точке $M(x;\ y)$ имеет непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке.

Частные производные высших порядков

$$z = f(x, y)$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ – частные производные первого порядка (непрерывные и имеют частные производные)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

частные производные второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Смешанные

Частные производные высших порядков

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \left(z''_{xy}\right)'_y = z^{(3)}_{xy^2}$$

частная производная третьего порядка

$$f^{(n)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}} = \left(f^{(n-1)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-1}}}\right)'_{x_{i_n}}$$

Теорема Шварца

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$

- Если функция от n переменных определена в открытой n-мерной области, в которой существуют частные производные до $(k–1)$-го порядка включительно и смешанные производные k-го порядка включительно и все эти производные **непрерывны**, то смешанные производные k-го порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, **равны между собой**.

Дифференциалы высших порядков

$$z = f(x, y)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

полный дифференциал первого порядка

$$d^2 z = d(dz)$$

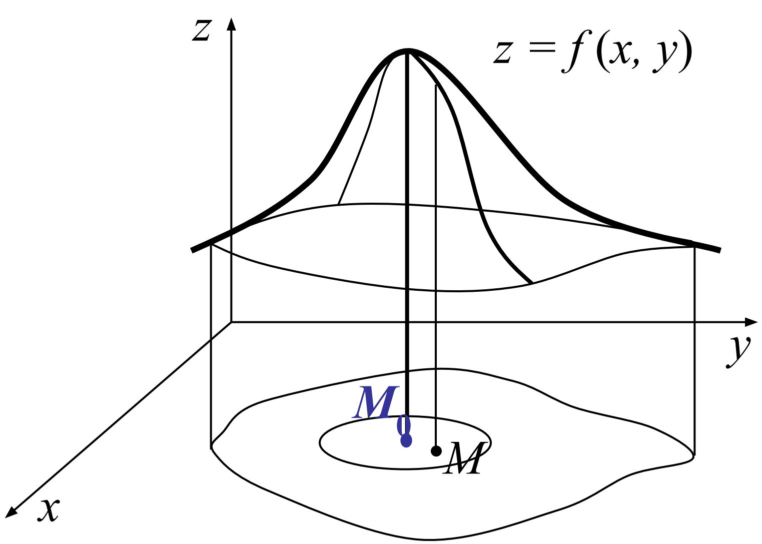
дифференциал второго порядка

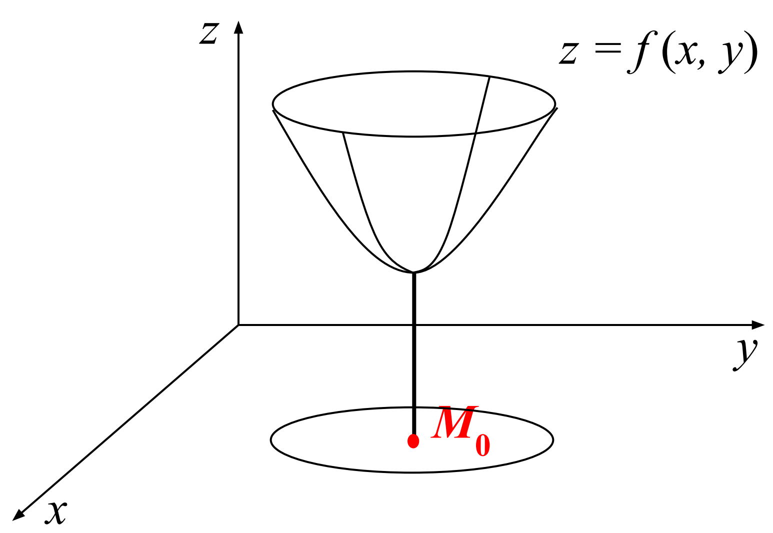
$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Точки экстремума

- Функция $z=f(x, y)$ определена в области D

- Точка $M_0(x_0, y_0)$ области D называется точкой локального максимума (минимума) если существует В(M_0, δ), что для всех точек $M(x, y)$ из В $(M_0, \delta)\cap D$ выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$).
- Точки максимума и минимума (Δz – знакопостоянно) функции называются точками экстремума, а значения функции в этих точках – экстремальными.

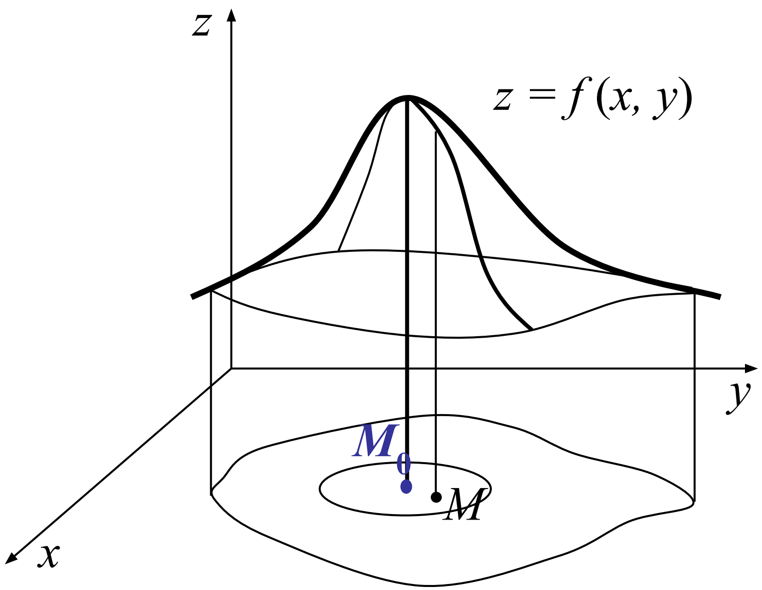




Необходимое условие существования экстремума

- Если функция $z=f(x, y)$ определена и дифференцируема в B (M_0, δ) и имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум, то в этой точке частные производные первого порядка равны нулю:

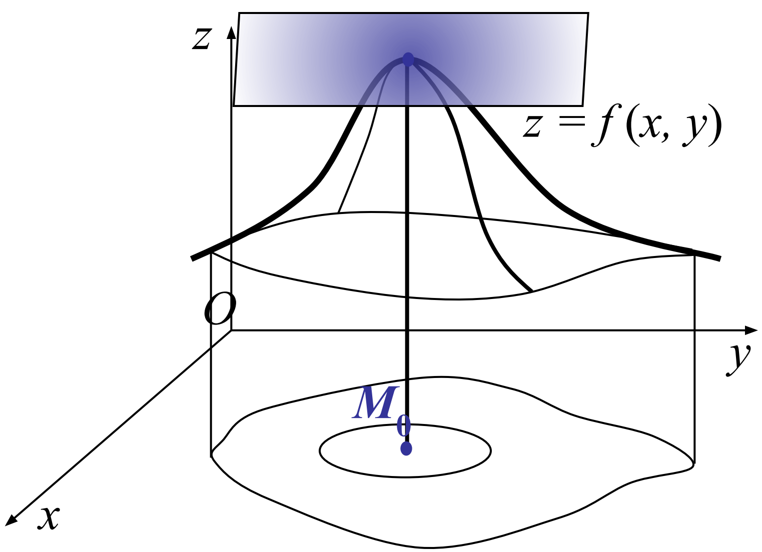
$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0$$

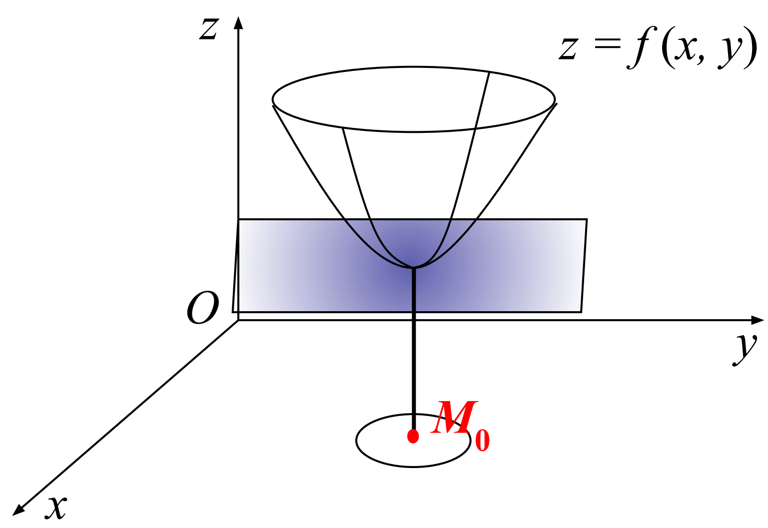


Эта система эквивалентна уравнению $df(x, y)=0$.

- Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой все частные производные функции $z=f(x, y)$ существуют и равны нулю, называется стационарной точкой данной функции.

- Необходимое условие достижения дифференцируемой функцией $z=f(x, y)$ экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ геометрически выражается в том, что касательная плоскость к поверхности (графику функции $z=f(x, y)$) в соответствующей её точке параллельна плоскости независимых переменных.



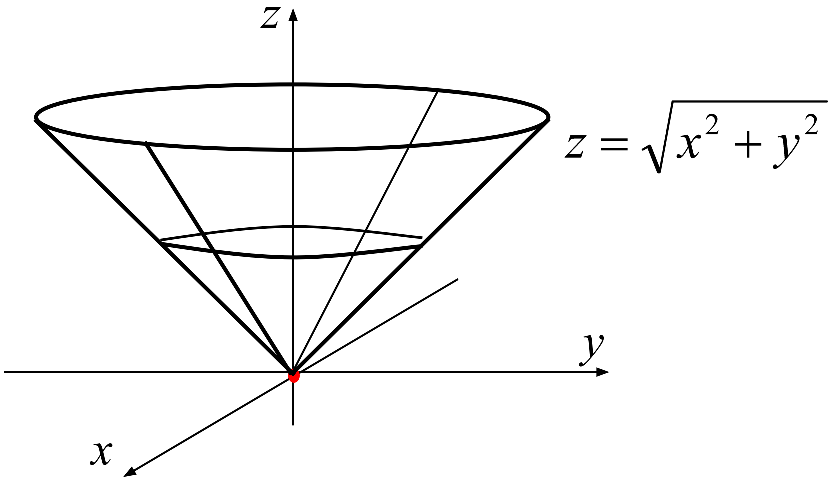


Замечание.

- Функция $z=f(x, y)$ может иметь экстремум и в таких точках, в которых по крайней мере одна из частных производных не существует.
- Например, функция $z=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $O(0, 0)$ имеет минимум, но в этой точке частные производные первого порядка не существуют.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



- Точки, в которых частные производные равны нулю или хотя бы одна из них не существуют, называются критическими точками.

Достаточное условие существования экстремума
Случай функции двух переменных

- Пусть функция $z=f(x, y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, причем $grad\ f(M_0)=0$. Обозначим

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}=a_{11} \qquad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}=a_{12} \qquad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2}=a_{22} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Если $\Delta>0$, $a_{11}<0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка максимума;
- Если $\Delta>0$, $a_{11}>0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ – точка минимума;
- Если $\Delta<0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума;
- Если $\Delta=0$, то требуются дополнительные исследования.

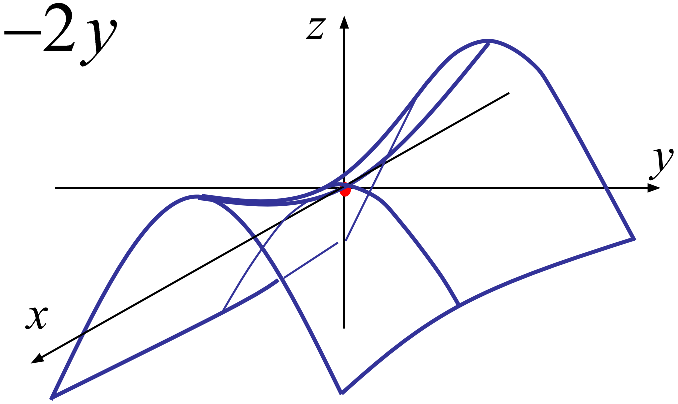
Точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума если $d^2f(M_0)$ знакопостоянен.

Замечание.

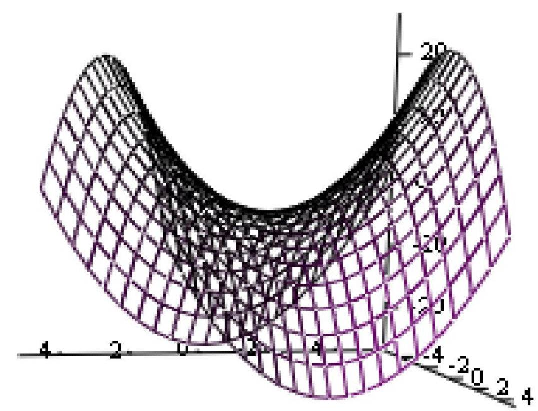
- Стационарная точка функции $z=f(x, y)$ может и не являться точкой экстремума.
- Например, функция $z = x^2 - y^2$ в точке $O(0, 0)$ не имеет экстремума, хотя в этой точке частные производные первого порядка равны нулю.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

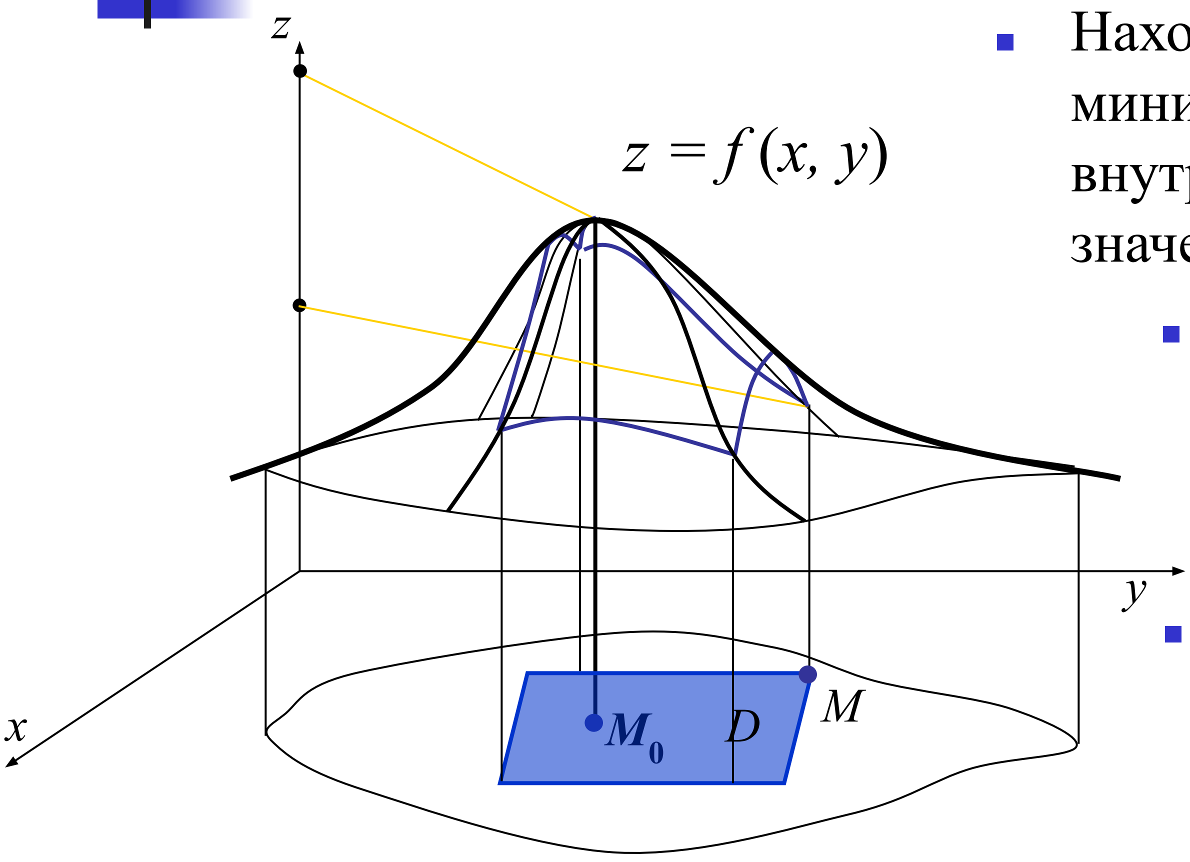
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$



$f(x, y) = x^2 - y^2$



Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области D



- Находим все максимумы и минимумы функции $z=f(x, y)$ внутри области D и вычисляем значение функции в них.
  - Находим наибольшее и наименьшее значение функции на границе области D.
  - Наибольшее из всех этих чисел будет наибольшим значением функции $f(x, y)$ в области D, а наименьшее – наименьшим.