

Векторы на плоскости

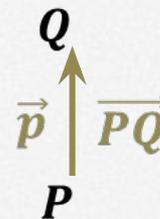
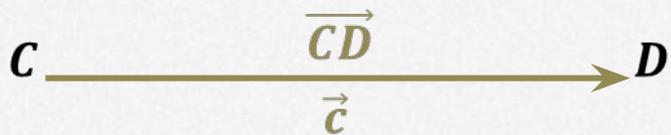
Понятие вектора

Понятие вектора



Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**.

Назвать векторы:



Нулевой вектор

Условимся любую точку плоскости также считать вектором.

$$M \bullet \overrightarrow{MM} (\vec{0})$$

Такие векторы называют **нулевыми**.

Начало нулевого вектора совпадает с его концом.

Длина вектора



Длиной ненулевого вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB .

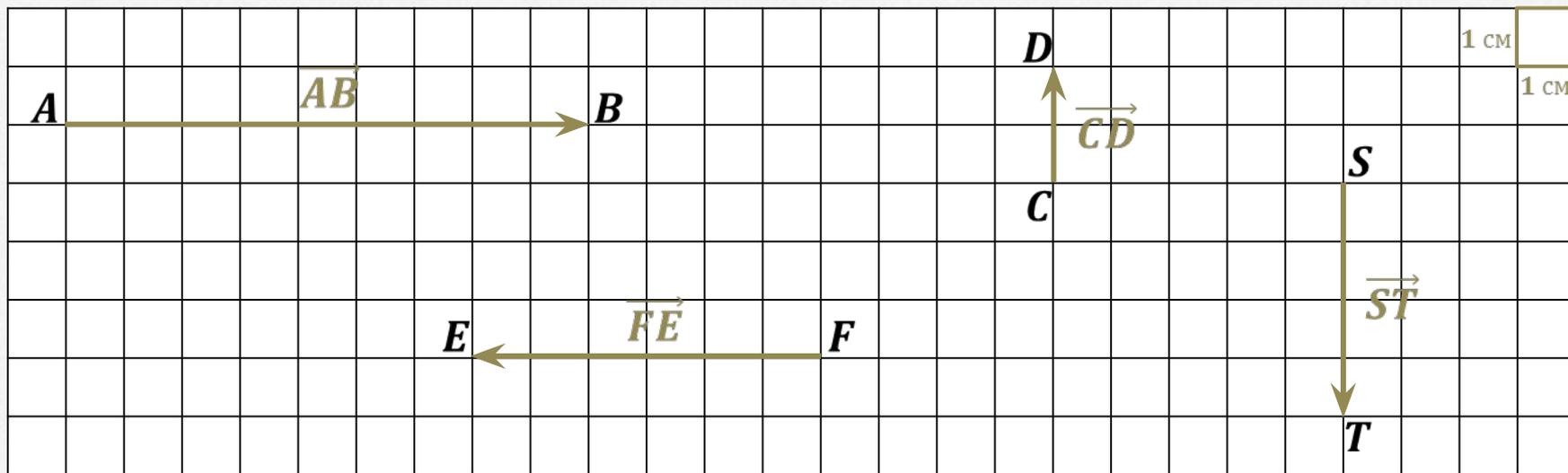
$$|\overrightarrow{AB}|$$

«модуль вектора AB »

$$\bullet \overrightarrow{MM}$$

$$|\vec{0}| = 0$$

Указать длину векторов
(каждая клетка на рисунке имеет сторону длиной в 1 см).



$$|\vec{AB}| = AB = 9 \text{ см}; \quad |\vec{CD}| = CD = 2 \text{ см}; \quad |\vec{ST}| = ST = 4 \text{ см}; \quad |\vec{FE}| = FE = 6 \text{ см}.$$

В $\triangle ABC$ стороны AB , BC и AC равны 4, 7 и 10 см соответственно. Точки K , M и L — середины сторон AB , BC и AC треугольника. Найдите длины векторов: \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{CL} , \overrightarrow{KM} , \overrightarrow{BM} и \overrightarrow{ML} .

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = 4 \text{ (см)}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = BC = 7 \text{ (см)}$$

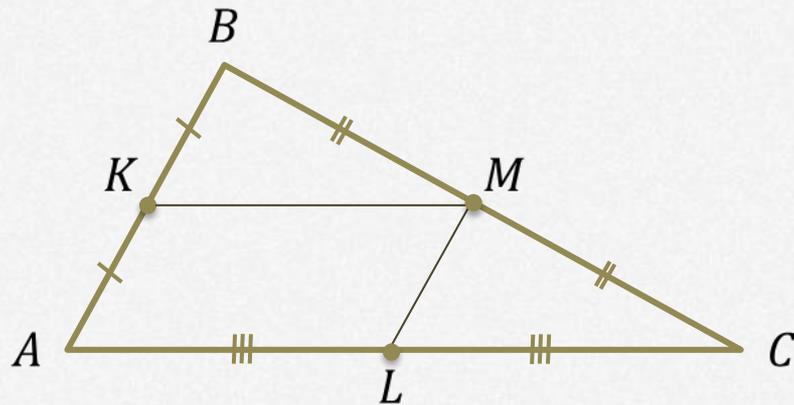
$$|\overrightarrow{AC}| = AC = 10 \text{ (см)}$$

$$|\overrightarrow{CL}| = CL = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (см)}$$

$$|\overrightarrow{KM}| = KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (см)}$$

$$|\overrightarrow{BM}| = BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5 \text{ (см)}$$

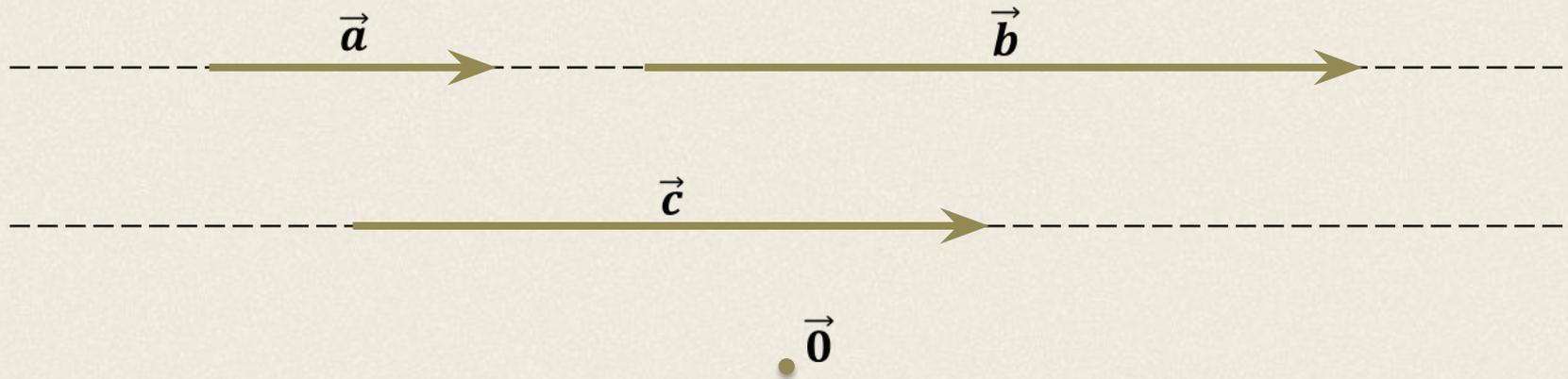
$$|\overrightarrow{ML}| = ML = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ (см)}$$



Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.



Указать коллинеарные векторы.

Коллинеарные векторы:

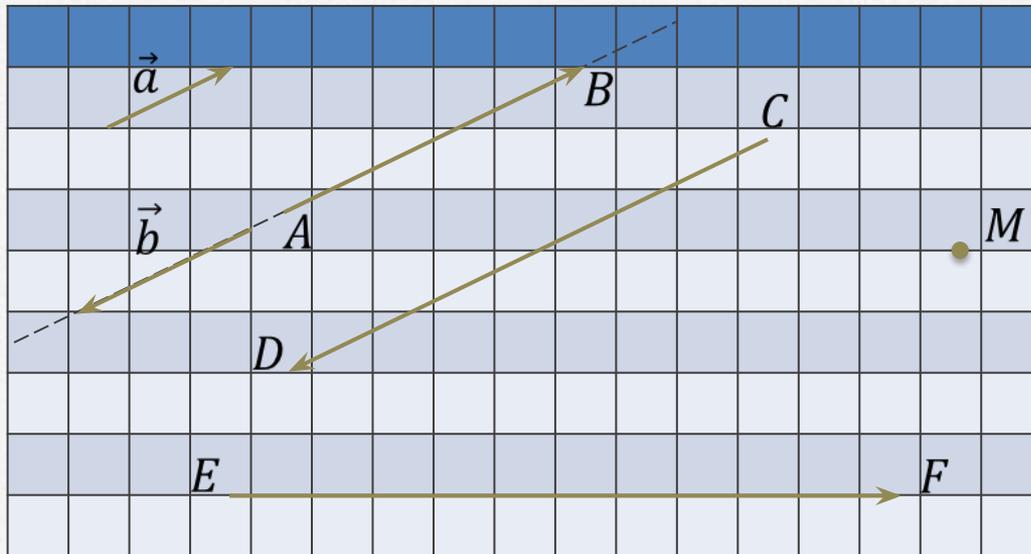
\vec{a} , \vec{b} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{MM} ;

\overrightarrow{MM} и \overrightarrow{EF} .

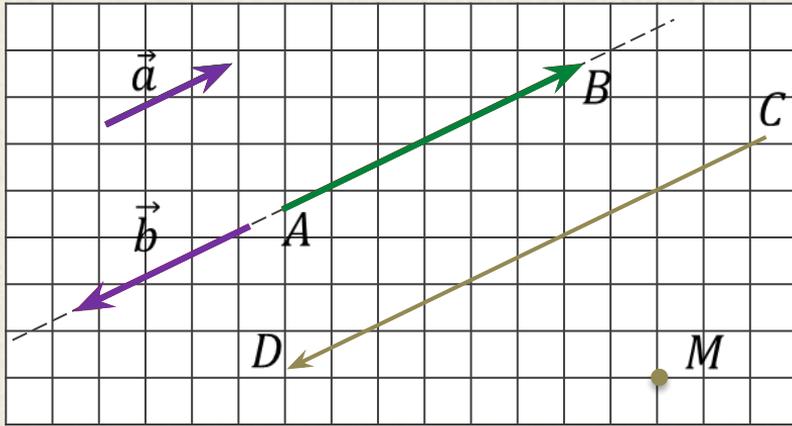
Неколлинеарные векторы:

\overrightarrow{AB} и \overrightarrow{EF} ;

\vec{b} и \overrightarrow{EF} .



Коллинеарные векторы



\vec{a} и \overrightarrow{AB}

(одинаково направлены)
Сонаправленные векторы

$\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$

\vec{a} и \vec{b}

(противоположно направлены)

Противоположно
направленные векторы

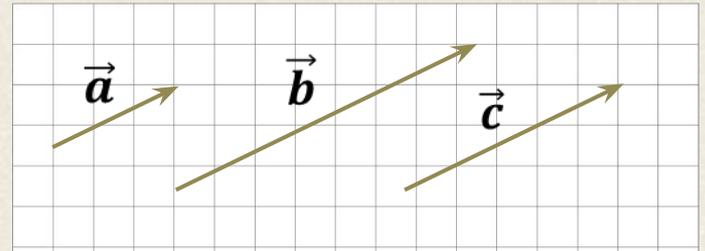
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.

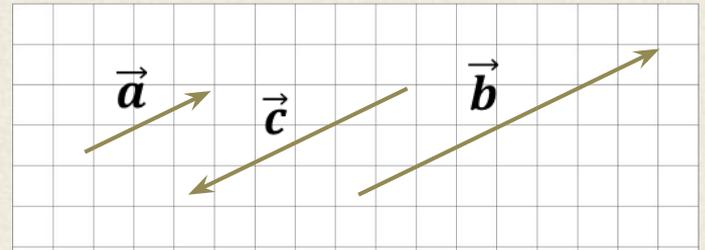
$\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

Свойства ненулевых коллинеарных векторов

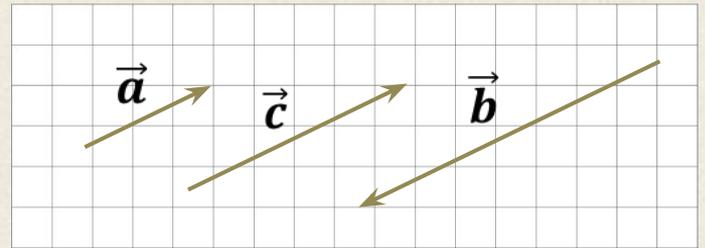
1. Если вектор $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, а вектор $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то сонаправленными будут векторы $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.



2. Если вектор $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$ и вектор $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то векторы $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.



3. Если вектор $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, а вектор $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то векторы $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



Равные векторы

Если векторы сонаправлены и их длины равны, то такие векторы называют **равными**.

$$1. \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

$$2. |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$\vec{a} = \vec{b}$$

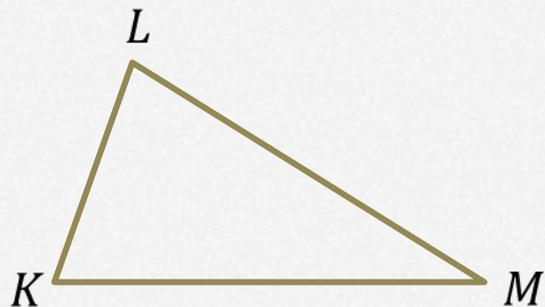


Выписать пары коллинеарных векторов, которые определяются сторонами:

а) $\triangle KLM$;

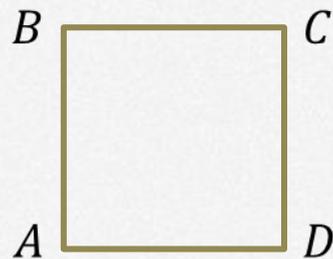
б) квадрата $ABCD$.

а)



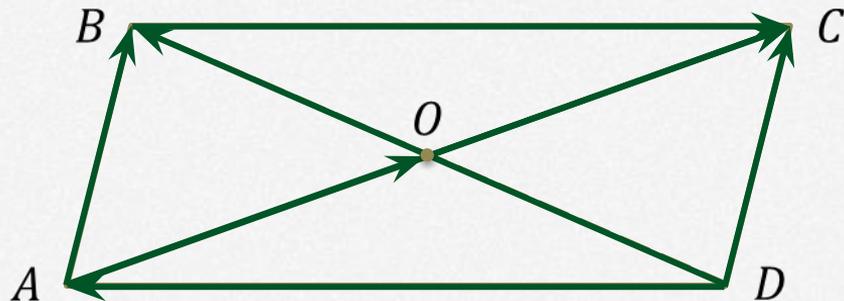
\overrightarrow{KL} и \overrightarrow{LK} ;
 \overrightarrow{LM} и \overrightarrow{ML} ;
 \overrightarrow{KM} и \overrightarrow{MK} .

б)



\overrightarrow{BC} и \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{CB} и \overrightarrow{DA} ;
 \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{CD} ;
 \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{BC} и \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{DC} , \overrightarrow{AD} и \overrightarrow{DA} .

Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O .
Равны ли векторы: AB и DC , BC и DA , AO и OC , AC и BD ?



$$\vec{a} = \vec{b}$$

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

\overrightarrow{AB} и \overrightarrow{DC} :

1. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$

2. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

\overrightarrow{BC} и \overrightarrow{DA} :

1. $\overrightarrow{BC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DA}$

2. $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{DA}$

\overrightarrow{AO} и \overrightarrow{OC} :

1. $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$

2. $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$

$\Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

\overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} :

1. \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD}

не коллинеарны

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$

Откладывание вектора от данной точки

Если точка A является началом вектора \vec{a} , то говорят, что вектор \vec{a} отложен от точки A .



От любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору \vec{a} , и притом только один.

Доказательство:

$$\vec{a} \neq \vec{0}$$

$$\overline{MM'} \neq \vec{0}, \vec{a} \parallel \overline{AB}$$

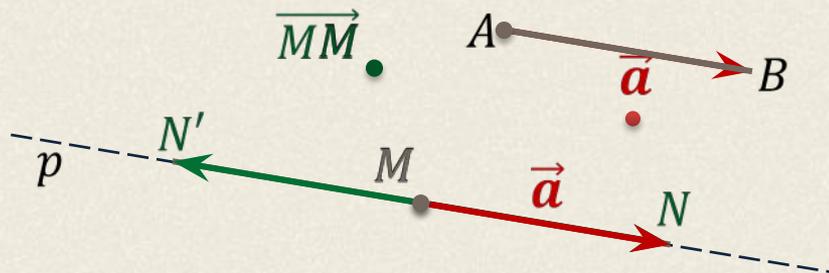
$$MN = AB, MN' = AB$$

$$|\overline{MN}| = |\overline{MN'}| = |\vec{a}|$$

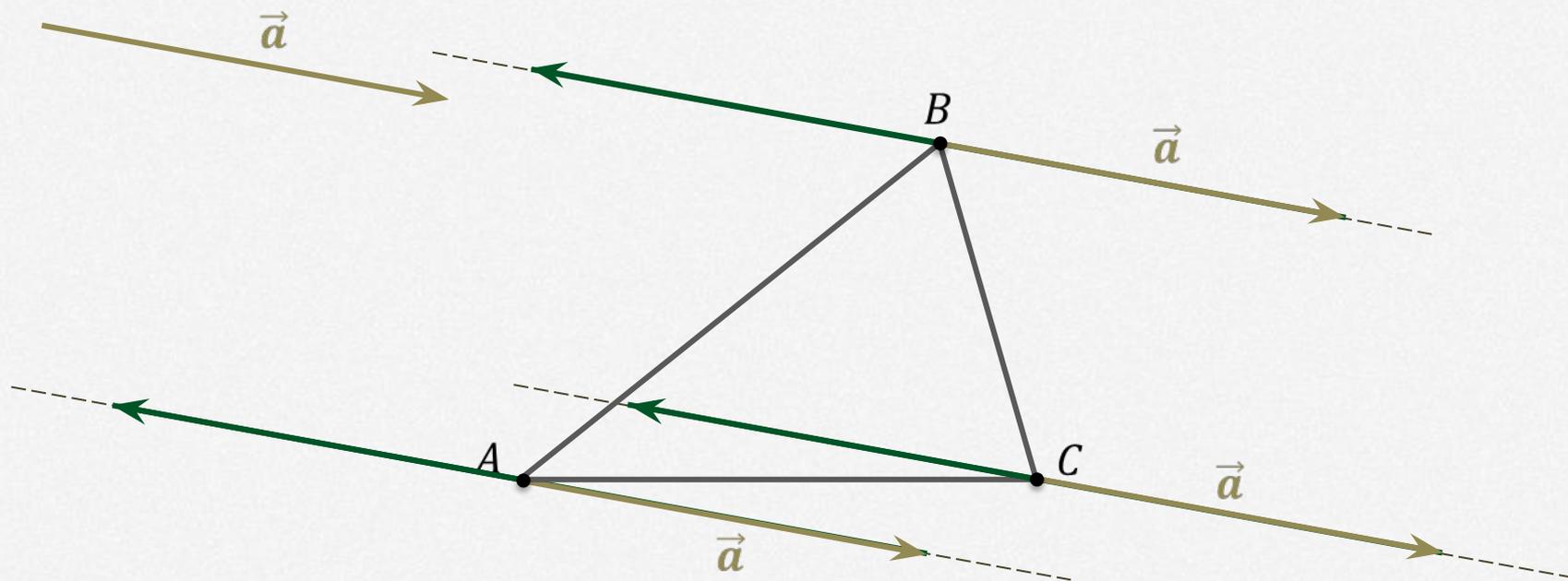
$$\overline{MN} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\overline{MN'} \uparrow\downarrow \vec{a}$$

$$\overline{MN} = \vec{a}$$

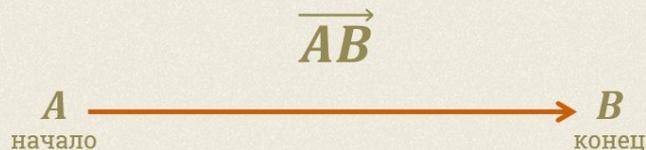


Отложить векторы, равные ненулевому вектору \vec{a} , от каждой из вершин $\triangle ABC$.



Понятие вектора

Понятие вектора



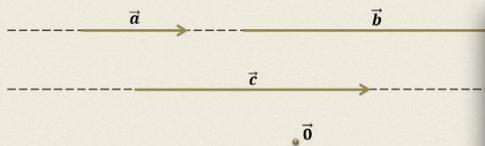
Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется **направленным отрезком** или **вектором**.

Понятие вектора

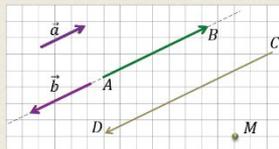
Коллинеарные векторы

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным **любому вектору**.



Коллинеарные векторы



\vec{a} и \overrightarrow{AB}
(одинаково направлены)
Сонаправленные векторы
 $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$
 \vec{a} и \vec{b}
(противоположно направлены)
Противоположно
направленные векторы
 $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

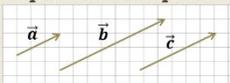
Нулевой вектор будет сонаправлен с любым вектором.

$$\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$$

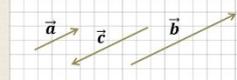


Свойства ненулевых коллинеарных векторов

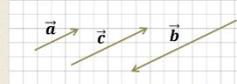
1. Если вектор $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, а вектор $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то сонаправленными будут векторы $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.



2. Если вектор $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$, и вектор $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то векторы $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.



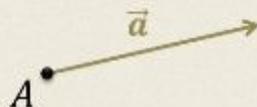
3. Если вектор $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, а вектор $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$, то векторы $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.



Понятие вектора

Откладывание вектора от данной точки

Если точка A является началом вектора \vec{a} , то говорят что вектор \vec{a} отложен от точки A .



От любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору \vec{a} , и притом только один.

Доказательство.

$$\vec{a} = \vec{0}$$

$$M \in p, p \parallel AB$$

$$MN = AB, MN' = AB$$

$$|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{MN'}| = |\vec{a}|$$

$$\overrightarrow{MN} \uparrow \vec{a}$$

$$\overrightarrow{MN'} \uparrow \vec{a}$$

$$\overrightarrow{MN} = \vec{a}$$

