2) Приведите примеры элементарных исследований свойств при изучении первых функций.

Что входит в исследование свойств функции?

- Поиск области определения и области значений
- Построение графика функции
- Отыскание нулей функции
- Отыскание промежутков знакопостоянства
- Исследование на выпуклость
- Отыскание точек максимума и минимума,
- точек разрыва

7 кл, Мордкович А.Г.

Рабочий словарь

возрастание

убывание

Рассмотрим график линейной функции, изображённый на рисунке 45, *а*. Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика всё время увеличиваются, мы как бы «поднимаемся в горку». В таких случаях математики употребляют термин *возрастание* и говорят так: ***если $k > 0$, то линейная функция $y = kx + m$ возрастает.***

Рассмотрим график линейной функции, изображённый на рисунке 45, *б*. Если двигаться по этому графику слева направо, то ординаты точек графика всё время уменьшаются, мы как бы

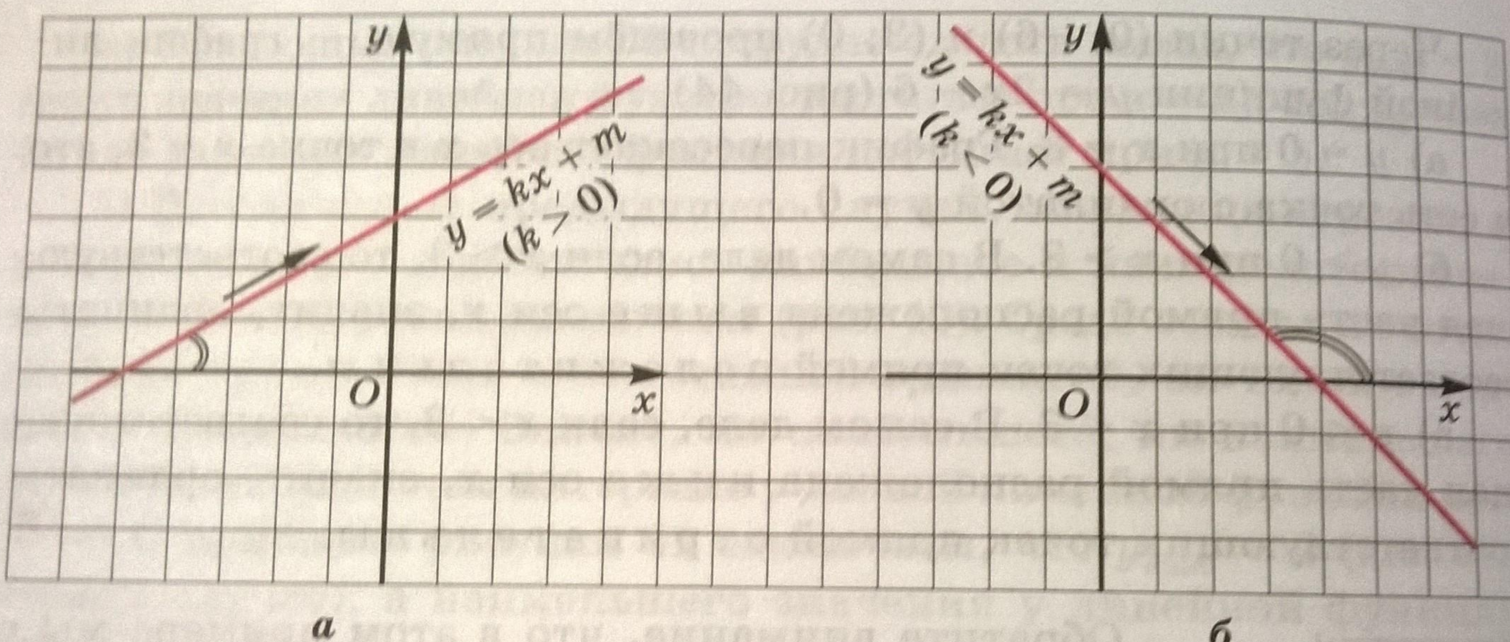


Рис. 45

«спускаемся с горки». В таких случаях математики употребляют термин *убывание* и говорят так: ***если $k < 0$, то линейная функция $y = kx + m$ убывает.***

Пусть даны две линейные функции $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$. Прямые, служащие графиками заданных линейных функций:

Теорема 5.

1) параллельны, если $k_1 = k_2$, $m_1 \neq m_2$;

2) совпадают, если $k_1 = k_2$, $m_1 = m_2$;

3) пересекаются, если $k_1 \neq k_2$.

Пример 1. Найти точку пересечения прямых:

а) $y = 2x - 3$ и $y = 2 - \frac{x}{2}$;

б) $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$.

Решение. а) Для линейной функции $y = 2x - 3$ имеем

x	0	2
y	-3	1

Прямая l_1, служащая графиком линейной функции $y = 2x - 3$, проведена на рисунке 49 через точки $(0; -3)$ и $(2; 1)$.

Для линейной функции $y = 2 - \frac{1}{2}x$ имеем

x	0	2
y	2	1

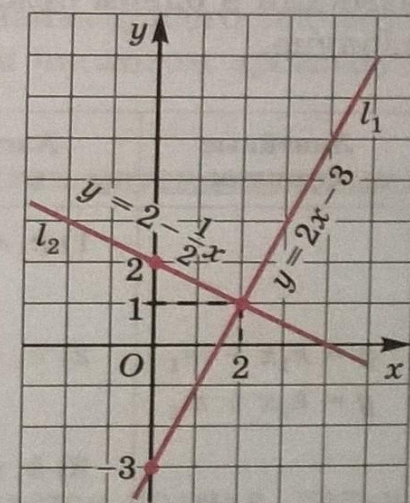


Рис. 49

Прямая l_2, служащая графиком линейной функции $y = 2 - \frac{1}{2}x$, проведена на рисунке 49 через точки $(0; 2)$ и $(2; 1)$.

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке $(2; 1)$.

б) Линейные функции $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ имеют один и тот же угловой коэффициент ($k = -3$), значит, прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x + 5$ параллельны, т. е. точки пересечения у них нет.

○8.25. а) $s = 1{,}5t + 0{,}5$; в) $s = -4{,}5t - 2{,}5$;

б) $s = -3{,}5t + 4{,}5$; г) $s = 2{,}5t - 3{,}5$.

○8.26. а) $s = \frac{2}{3}t - 1$; б) $u = -\frac{v}{2} + 1$; в) $s = \frac{v}{4} - 2$; г) $u = -\frac{2}{3}t + 1$.

○8.27. Найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = x + 4$ и $y = 2x$;

б) $y = -2x + 3$ и $y = 2x - 5$;

в) $y = -x$ и $y = 3x - 4$;

г) $y = 3x + 2$ и $y = -0{,}5x - 5$.

8.28. Постройте график линейной функции $y = x + 4$. Найдите:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат;

б) значение y, соответствующее значению x, равному -2; -1; 1;

в) значение x, которому соответствует значение y, равное 1; -2; 7;

г) выясните, возрастает или убывает заданная линейная функция.

8.29. Постройте график линейной функции $y = -4x + 8$. Найдите:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат;

б) значение y, соответствующее значению x, равному 0; 1; 2; 3;

в) значение x, которому соответствует значение y, равное 0; 4; 8;

г) выясните, возрастает или убывает заданная линейная функция.

○8.31. Постройте график функции $y = -0{,}5x + 2$ и прямую $y = 4$

а) Найдите координаты точки пересечения прямых.

б) Выделите ту часть графика функции $y = -0{,}5x + 2$ которая расположена ниже прямой $y = 4$. Какие значения y соответствуют выделенной части графика? Какие значения при этом принимает выражение $-0{,}5x + 2$?

в) Определите, какие значения x соответствуют выделенной части графика линейной функции.

г) Найдите, при каких значениях x выполняется неравенство $-0{,}5x + 2 > 4$.

○8.32. Постройте график функции $y = -3x + 6$.

а) С помощью построенного графика решите уравнение $-3x + 6 = 0$.

б) Выделите ту часть графика, которая соответствует условию $y > 0$. Какие значения аргумента соответствуют выделенной части графика?

в) С помощью графика решите неравенство $-3x + 6 > 0$.

г) Решите неравенство $-3x + 6 < 0$.

○8.33. Постройте график функции $y = 2x - 6$.

а) С помощью построенного графика решите уравнение $2x - 6 = 0$.

б) Выделите ту часть графика, которая соответствует условию $y < 0$. При каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения?

в) С помощью графика решите неравенство $2x - 6 \leqslant 0$.

г) Решите неравенство $2x - 6 \geqslant 0$.

o9.3. Зависимость между переменными y и x выражена формулой $y = kx$. Определите значение коэффициента k и выясните, возрастает или убывает линейная функция $y = kx$, если:

а) $y = 12$ при $x = 3$; в) $y = 45$ при $x = -9$;
б) $y = -25$ при $x = 5$; г) $y = -99$ при $x = -11$.

9.4. Постройте график линейной функции $y = kx$, если известно, что ему принадлежит точка:

а) $M(12; 48)$; в) $M(3; -18)$;
б) $M(-16; 32)$; г) $M(-14; -21)$.

o9.8. Постройте график линейной функции $y = 0{,}4x$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 0; 5; 10; −5;
б) значение x, которому соответствует значение y, равное 0; 2; 4; −2;
в) решения неравенства $0{,}4x > 0$;
г) решения неравенства $-2 \leqslant 0{,}4x \leqslant 0$.

o9.9. Постройте график линейной функции $y = -2{,}5x$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 0; 2; −2;
б) значение x, которому соответствует значение y, равное 0; 5; −5;
в) решения неравенства $-2{,}5x \geqslant 0$;
г) решения неравенства $0 < -2{,}5x < 2$.

Подставьте вместо символа * такое число, чтобы графики заданных линейных функций были параллельны:

10.4. а) $y = 8x + 12$ и $y = *x - 3$;

б) $y = *x - 4$ и $y = 5 + 6x$;

в) $y = *x + 6$ и $y = 12 - 7x$;

г) $y = 4x - 1$ и $y = *x + 11$.

10.5. а) $y = *x + 5$ и $y = *x + 7$;

б) $y = 45x - 9$ и $y = 45x + *$;

в) $y = -*x - 3$ и $y = *x + 1$;

г) $y = 1{,}3x + 21$ и $y = 1{,}3x - *$.

Подставьте вместо символа * такое число, чтобы графики заданных линейных функций пересекались:

10.6. а) $y = 6x + 1$ и $y = *x - 3$;

б) $y = *x + 5$ и $y = 9x - 1$;

в) $y = 7x + 8$ и $y = *x - 4$;

г) $y = *x - 15$ и $y = 3x + 2$.

10.7. а) $y = 2x + *$ и $y = x - *$;

б) $y = *x - 1$ и $y = *x + 3$;

в) $y = 3x - *$ и $y = -x - *$;

г) $y = *x + 17$ и $y = *x + 9$.

Подставьте вместо символа * такое число, чтобы графики заданных линейных функций совпадали; установите, в каких случаях это задание некорректно:

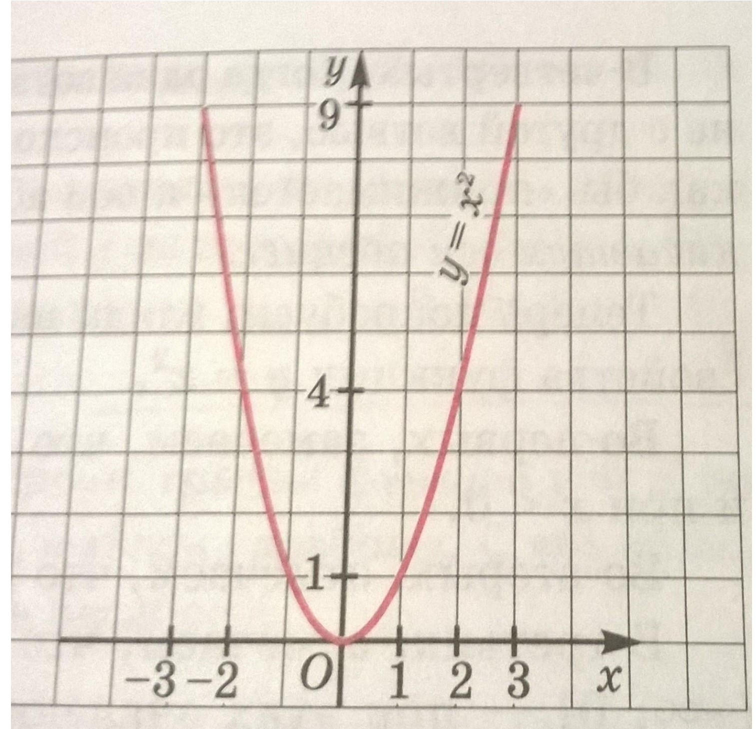
10.8. а) $y = *x + 5$ и $y = x + 7$;

б) $y = *x + 8$ и $y = 5x + 8$;

в) $y = 6x - 3$ и $y = *x - 3$;

г) $y = 7x - 9$ и $y = *x - 8$.

Теперь попробуем, глядя на рисунок 56, *б*, описать некоторые свойства функции $y = x^2$.



б

Во-первых, замечаем, что $y = 0$ при $x = 0$, $y > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

Во-вторых, отмечаем, что $y_{\text{наим}} = 0$, а $y_{\text{наиб}}$ не существует.

В-третьих, замечаем, что *функция* $y = x^2$ *убывает на луче* $(-\infty; 0]$ — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «спускаемся с горки». *Функция* $y = x^2$ *возрастает на луче* $[0; +\infty)$ — при этих значениях x, двигаясь по параболе слева направо, мы «поднимаемся в горку».

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2$:

а) на отрезке $[1; 3]$;

б) на отрезке $[-3; -1{,}5]$;

в) на отрезке $[-3; 2]$.

Решение. а) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту её часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[1; 3]$ (рис. 58). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим}} = 1$ (при $x = 1$), $y_{\text{наиб}} = 9$ (при $x = 3$).

б) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту её часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3; -1{,}5]$ (рис. 59).

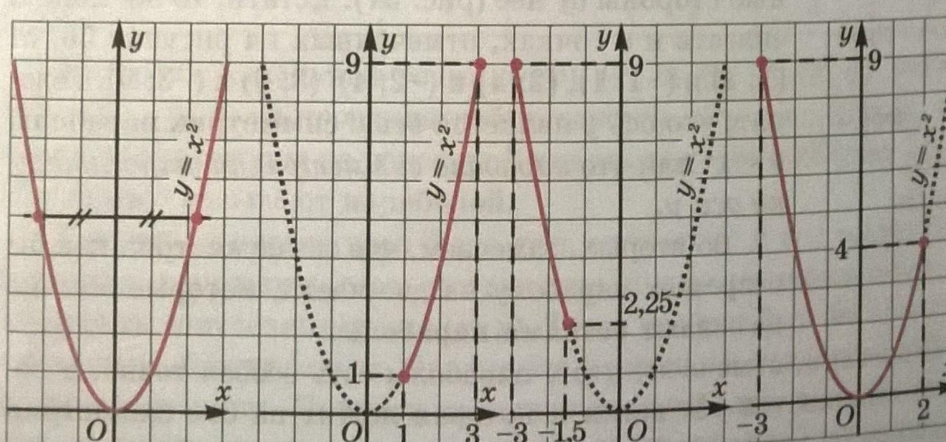


Рис. 57 **Рис. 58** **Рис. 59** **Рис. 60**

Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим}} = 2{,}25$ (при $x = -1{,}5$), $y_{\text{наиб}} = 9$ (при $x = -3$).

в) Построим параболу $y = x^2$ и выделим ту её часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-3; 2]$ (рис. 60). Для выделенной части графика находим $y_{\text{наим}} = 0$ (при $x = 0$), $y_{\text{наиб}} = 9$ (при $x = -3$).

37.12. Постройте график функции $y = x^2$. С помощью графика найдите:

а) значения функции при $x = -2$, $x = 2$;

б) значения аргумента при $y = 4$;

в) значения x, если $y < 4$, $y > 4$;

г) значения y, если $0 < x < 2$.

37.13. Постройте график функции $y = -x^2$. С помощью графика найдите:

а) значения функции при $x = -1$, $x = 1$;

б) значения аргумента при $y = -1$;

в) значения x, если $y < -1$, $y > -1$;

г) значения y, если $-1 < x < 0$.

Используя выделенную часть графика функции $y = x^2$, найдите наибольшее и наименьшее значения функции и ответьте на вопрос, какому промежутку оси абсцисс соответствует выделенная часть:

37.14. а) На рис. 37; б) на рис. 38; в) на рис. 39; г) на рис. 40.

37.15. а) На рис. 41; б) на рис. 42; в) на рис. 43; г) на рис. 44.

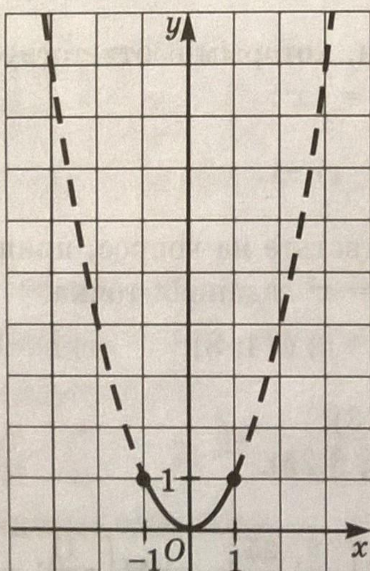


Рис. 37

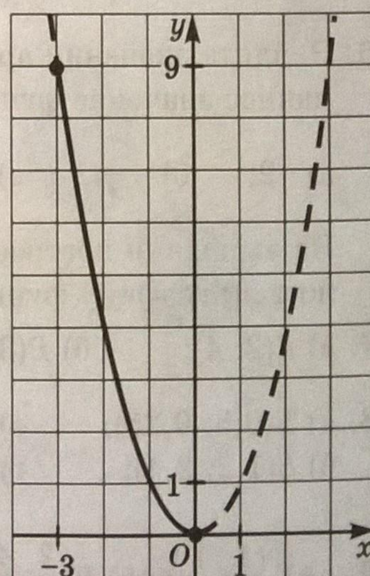


Рис. 38

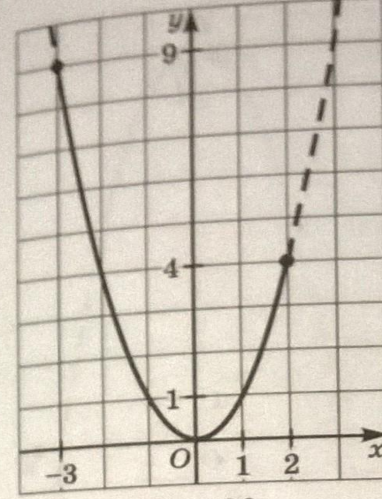


Рис. 39

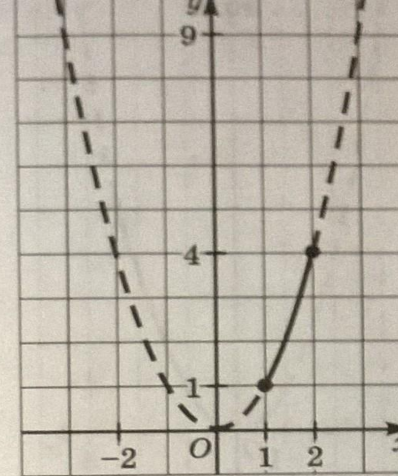


Рис. 40

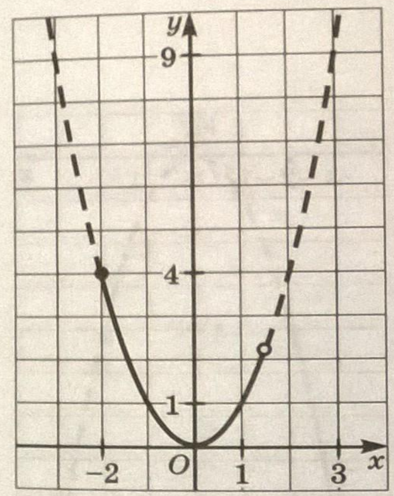


Рис. 41

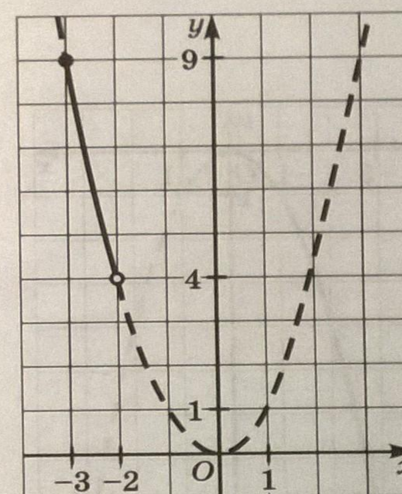


Рис. 42

Используя выделенную часть графика функции $y = -x^2$, найдите наибольшее и наименьшее значения функции и укажите, какому промежутку оси абсцисс соответствует выделенная часть:

37.16. а) На рис. 45; в) на рис. 47;
б) на рис. 46; г) на рис. 48.

37.17. а) На рис. 49; в) на рис. 51;
б) на рис. 50; г) на рис. 52.

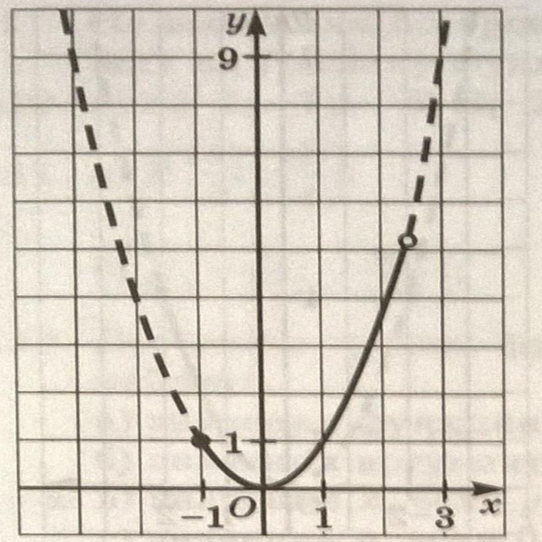


Рис. 43

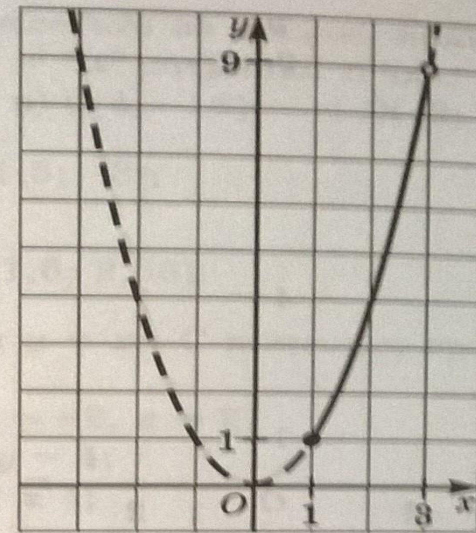


Рис. 44

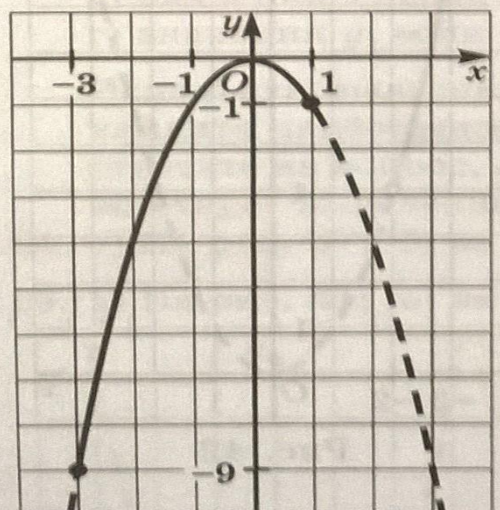


Рис. 45

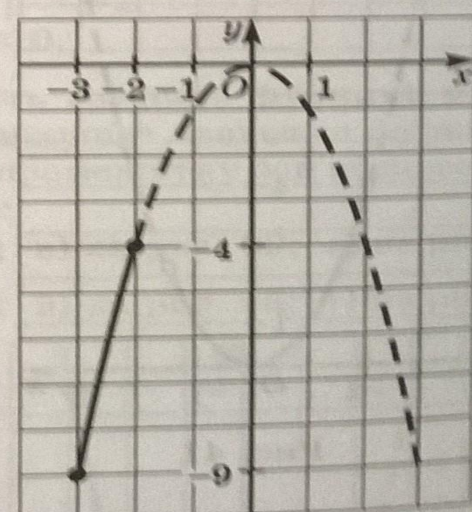


Рис. 46

Найдите наибольшее и наименьшее значения функц
$y = x^2$ на заданном отрезке:

37.18. а) $[1; 2]$; б) $[-2; -1]$; в) $[0; 1]$; г) $[-3; 0]$.

7 кл, Алимов Ш.А., Колягин Ю.М.

581 Построить график функции:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -2x + 1$; 3) $y = 3x - 4$;

4) $y = 0{,}5x - 1$; 5) $y = \frac{1}{4}x - 2$; 6) $y = \frac{1}{2}x + 2$.

558 Построить график функции:

1) $y = 3x$; 2) $y = 5x$; 3) $y = -4x$; 4) $y = -0{,}8x$.

559 Построить график функции:

1) $y = 1{,}5x$; 2) $y = -2{,}5x$; 3) $y = -0{,}2x$.

1) В каком месяце долгота дня первого числа равна 600 мин, 750 мин, 850 мин?

2) В какое время года долгота первого дня месяца больше 700 мин, меньше 600 мин?

3) Какова долгота дня в первый день января, марта, мая, июля, октября?

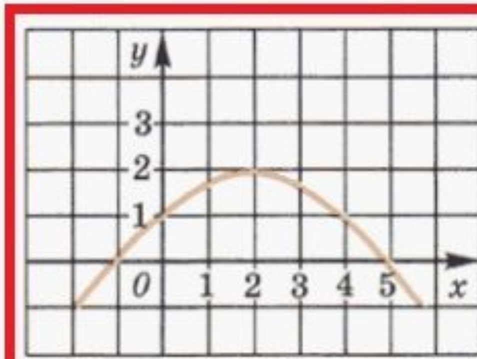
547 Функция $y(x)$ задана графиком (рис. 14, a).

1) Найти $y(0)$, $y(2)$, $y(4)$, $y(-1)$.

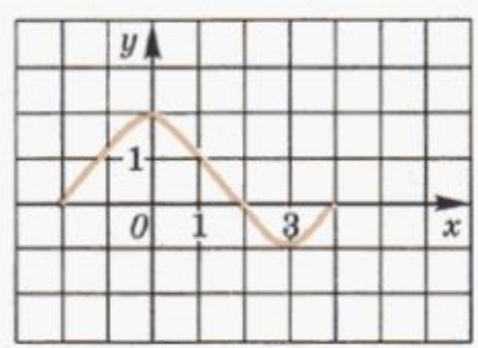
2) При каком значении x значение функции равно 1, 2, 0?

3) Назвать несколько значений x, при которых значение функции положительно.

4) Назвать несколько значений x, при которых значение функции отрицательно.



а)



б)

561 Построить график функции, заданной формулой $y = -1{,}5x$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному 1; 0; 2; 3;

2) значение x, если значение y равно -3; 4,5; 6;

3) несколько целых значений x, при которых значения y положительны (отрицательны).

562 Построить график функции, заданной формулой $y = 0{,}2x$. Найти по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -5; 0; 5;

2) значение x, если значение функции равно -2; 0; 2;

3) несколько значений x, при которых значения y отрицательны (положительны).

586 1) Построить график функции $y = -0{,}5x - 2$ и указать по графику несколько значений x, при которых значения функции положительны; отрицательны.

2) Построить график функции $y = -4x + 3$ и указать по графику несколько значений x, при которых значения функции отрицательны; положительны.

587 Построить график функции, найдя точки пересечения его с осями координат:

1) $y = 2x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x - 1$; 3) $y = 4x + 8$;

4) $y = -3x + 6$; 5) $y = 2{,}5x + 5$; 6) $y = -6x - 2$.

8 кл, Мордкович А.Г.

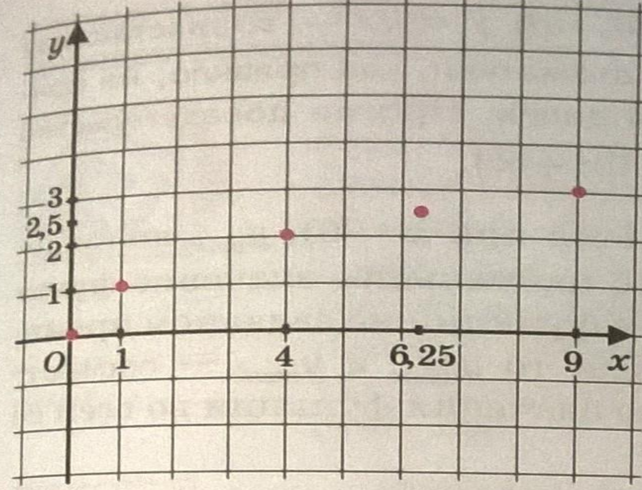


Рис. 9, а

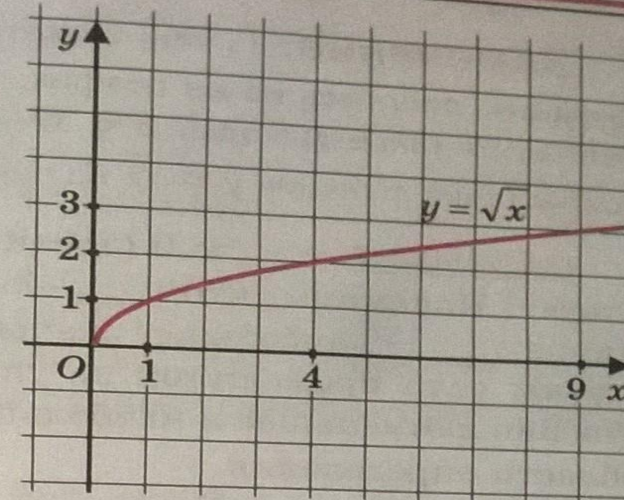


Рис. 9, б

в точке (0; 0). Заметим, что, имея шаблон параболы $y = x^2$, можно без труда с его помощью построить график функции $y = \sqrt{x}$, ведь это ветвь той же параболы, только ориентированная не вверх, а вправо ($x = y^2$).

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

Описывая свойства этой функции, будем опираться на ее геометрическую модель — ветвь параболы (рис. 9, *б*).

Свойство 1. Область определения функции — луч $[0; +\infty)$.

Свойство 2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x > 0$.

Свойство 3. Функция возрастает на луче $[0; +\infty)$. Напомним, что в курсе алгебры 7-го класса мы договорились называть функцию, график которой на рассматриваемом промежутке идет слева направо как бы в горку, *возрастающей*, а функцию, график которой на рассматриваемом промежутке идет слева направо как бы под горку, — *убывающей*. Более точно можно сказать так: функцию $y = f(x)$ называют *возрастающей на промежутке X*, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функцию $y = f(x)$ называют *убывающей на промежутке X*, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

<u>Свойство 4</u>. $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наиб}$ не существует. Напомним, что $y_{наим}$ — это наименьшее значение функции, а $y_{наиб}$ — наибольшее значение функции на заданном промежутке; если промежуток не указан, то $y_{наим}$ и $y_{наиб}$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции во всей ее области определения.

<u>Свойство 5</u>. $y = \sqrt{x}$ — непрерывная функция. Напомним, что этот термин мы рассматриваем пока как синоним предложения «график функции есть сплошная линия, которую можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги». В старших классах будет дано точное математическое истолкование понятия непрерывности функции, не опирающееся на геометрическую иллюстрацию.

обратите внимание

А теперь обратим внимание на одно любопытное обстоятельство. Рассмотрим две функции: $y = \sqrt{x}$ (ее график изображен на рис. 9, б) и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$ (ее график изображен на рис. 10).

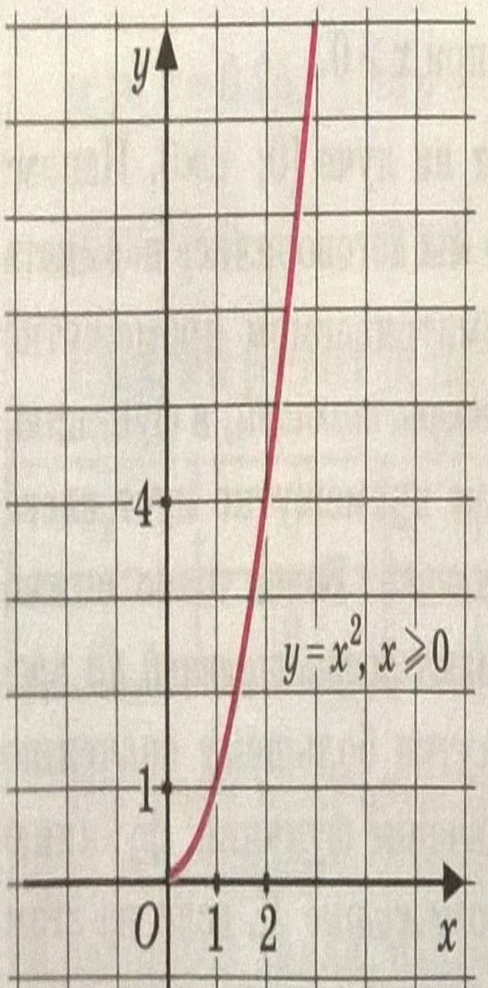


Рис. 10

Мы только что перечислили пять свойств для первой функции, но абсолютно теми же свойствами обладает и вторая функция. Словесные «портреты» двух различных функций одинаковы. Математики не смогли вынести такой несправедливости, когда разные функции, имеющие разные графики, словесно описываются одинаково. Они обнаружили принципиальные различия в характере графиков, заметив, что график функции $y = \sqrt{x}$ обращен *выпуклостью вверх*, тогда как график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, обращен *выпуклостью вниз*.

выпуклость вниз

выпуклость вверх

Обычно говорят, что *функция выпукла вниз*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *ниже* проведенного отрезка (рис. 11); *функция выпукла вверх*, если, соединив любые две точки ее графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *выше* проведенного отрезка (рис. 12).

область значений функции

Функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{x}$, принимает любые неотрицательные значения. В самом деле, какое бы конкретное значение $y \geqslant 0$ ни задать, всегда найдется такое x, что выполняется равенство $f(x) = y$, т. е. $\sqrt{x} = y$; для этого достаточно положить $x = y^2$. Множество всех значений функции называют обычно **областью значений функции**.

Для функции $y = \sqrt{x}$ областью значений является луч $[0; +\infty)$. Это хорошо читается по графику функции (рис. 9, *б*). Если спроецировать график на ось y, как раз и получится луч $[0; +\infty)$.

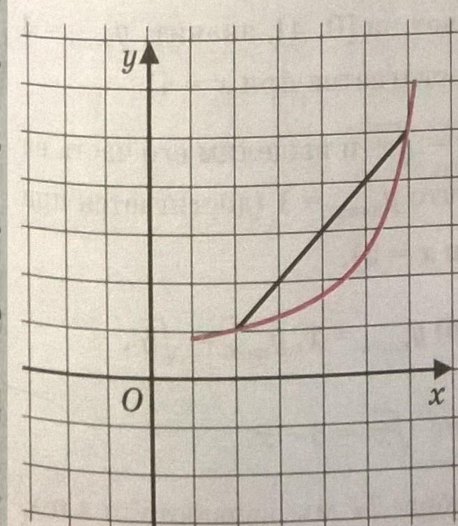


Рис. 11

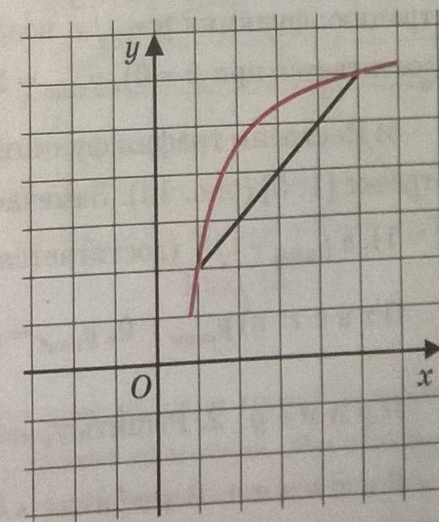


Рис. 12

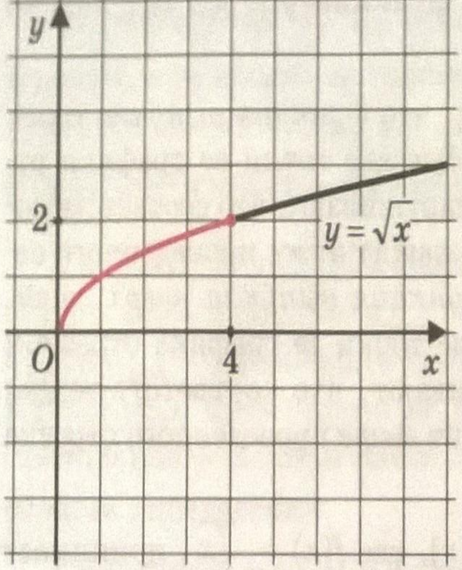


Рис. 13

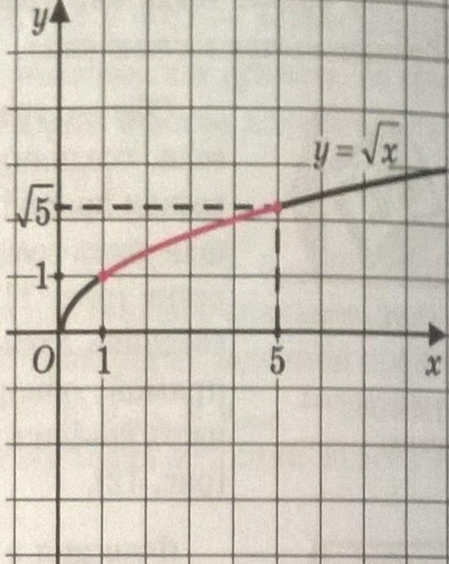


Рис. 14

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке: а) [0; 4]; б) [1; 5].

Решение. а) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке [0; 4] (рис. 13). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается при $x = 4$).

Впрочем, можно было и не опираться на графическую иллюстрацию: функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на [0; 4], значит, $y_{\text{наим}} = 4$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб}} = 2$ (достигается при $x = 4$).

б) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке [1; 5] (рис. 14). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 1$ (достигается при $x = 1$), а $y_{\text{наиб}} = \sqrt{5}$ (достигается при $x = 5$).

Ответ: а) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 2$; б) $y_{\text{наим}} = 1$, $y_{\text{наиб}} = \sqrt{5}$.

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y = -\sqrt{x}$.

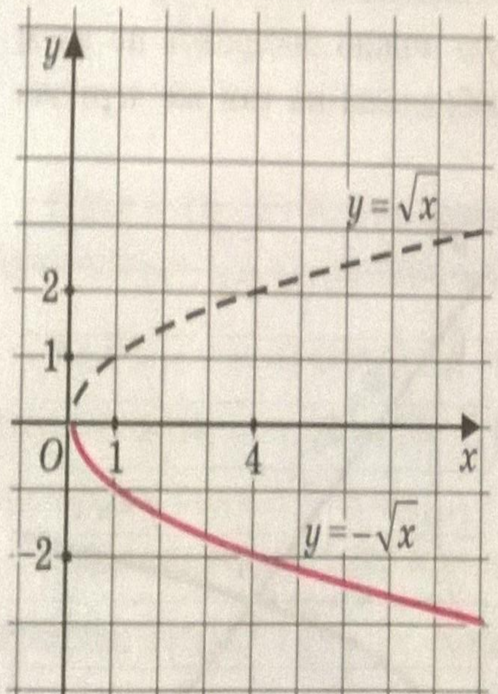


Рис. 16

Решение. В курсе алгебры 7-го класса мы говорили о том, что график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x. Воспользовавшись этим, построим график функции $y = \sqrt{x}$ и отобразим его симметрично относительно оси x (рис. 16). Это и будет график функции $y = -\sqrt{x}$.

Перечислим свойства функции $y = -\sqrt{x}$ (по графику):

1. Область определения функции — луч $[0; +\infty)$.
2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x > 0$.
3. Функция убывает на луче $[0; +\infty)$.
4. $y_{\text{наиб}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наим}}$ не существует.
5. Функция непрерывна на луче $[0; +\infty)$.
6. Область значений функции — луч $(-\infty; 0]$.
7. Функция выпукла вниз.

13.2. Используя график функции $y = \sqrt{x}$, найдите:

а) значения y при $x = 0;\ 1;\ 2\frac{1}{4}$;

б) значения x, если $y = 2;\ 2{,}5;\ 4$;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[1;\ 9]$;

г) при каких значениях x график функции расположен выше прямой $y = 2$, ниже прямой $y = 2$.

13.3. Постройте график функции $y = -\sqrt{x}$.
С помощью графика найдите:

а) значения y при $x = 1;\ 2\frac{1}{4};\ 9$;

б) значения x, если $y = 0;\ -2;\ -4$;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[2;\ 4]$;

г) при каких значениях x график функции расположен выше прямой $y = -2$, ниже прямой $y = -2$.

о13.18. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\sqrt{x}, \text{ если } 1 < x \leqslant 9. \end{cases}$

а) Найдите $f(-2)$, $f(1)$, $f(4)$, $f(9)$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Перечислите свойства функции.

Свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$

Описывая свойства этой функции, мы будем опираться на ее геометрическую модель — параболу (рис. 38).

Свойство 1. Так как для любого значения x по формуле $y = kx^2$ можно вычислить соответствующее значение y, то функция определена в любой точке x (при любом значении аргумента x). Короче это записывают так: область определения функции есть $(-\infty; +\infty)$, т. е. вся числовая прямая.

Свойство 2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x \neq 0$. Это видно и по графику функции (он весь расположен выше оси x), но можно обосновать и без помощи графика: если $x \neq 0$, то $kx^2 > 0$ как произведение двух положительных чисел k и x^2.

Свойство 3. $y = kx^2$ — непрерывная функция.

Свойство 4. $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наиб}$ не существует.

Свойство 5. Функция $y = kx^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$.

Процесс перечисления свойств функции мы называем *чтением графика*. Этот процесс будет постепенно становиться все насыщеннее и интереснее — по мере изучения новых свойств функций. Добавим еще одно новое свойство.

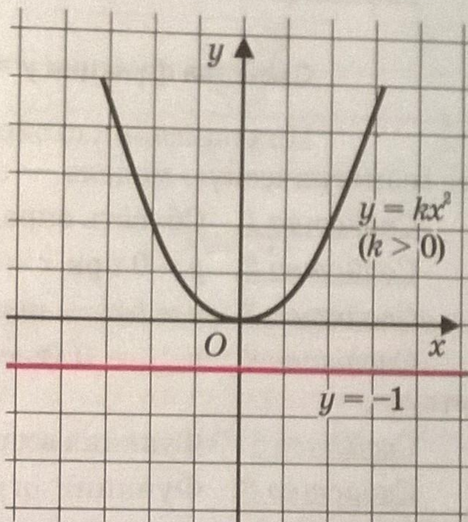


Рис. 38

Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной снизу*, если все значения функции больше некоторого числа. Геометрически это означает, что график функции расположен *выше* некоторой прямой, параллельной оси x.

А теперь посмотрите: график функции $y = kx^2$ расположен выше прямой $y = -1$ (или $y = -2$, это неважно) — она проведена на рис. 38. Значит, $y = kx^2$ $(k > 0)$ — ограниченная снизу функция.

ограниченность функции снизу

ограниченность функции сверху

Наряду с функциями, ограниченными снизу, рассматривают и функции, ограниченные сверху. Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной сверху*, если все значения функции меньше некоторого числа. Геометрически это означает, что график функции расположен *ниже* некоторой прямой, параллельной оси x.

Имеется ли такая прямая для параболы $y = kx^2$, где $k > 0$? Нет. Это значит, что функция не является ограниченной сверху.

Итак, мы получили еще одно свойство, добавим его к тем пяти, что указаны выше.

Свойство 6. Функция $y = kx^2$ $(k > 0)$ ограничена снизу и не ограничена сверху.

В главе 2 мы ввели в обиход еще два свойства функций — область значений и выпуклость. Отметим их в качестве седьмого и восьмого свойств рассматриваемой функции.

Свойство 7. Область значений функции $y = kx^2$ $(k > 0)$ — луч $[0; +\infty)$.

Свойство 8. Функция выпукла вниз.

Свойства функции $y = kx^2$ при $k < 0$

При описании свойств этой функции мы опираемся на ее геометрическую модель — параболу (рис. 39).

Свойство 1. Область определения функции — $(-\infty; +\infty)$.

Свойство 2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x \neq 0$.

Свойство 3. $y = kx^2$ — непрерывная функция.

Свойство 4. $y_{наиб} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наим}$ не существует.

Свойство 5. Функция возрастает при $x \leqslant 0$, убывает при $x \geqslant 0$.

Свойство 6. Функция ограничена сверху и не ограничена снизу.

Дадим пояснения последнему свойству: имеется прямая, параллельная оси x (например, $y = 1$, она проведена на рис. 39), такая, что вся парабола лежит ниже этой прямой; это значит, что функция ограничена сверху. С другой стороны, нельзя провести такую прямую, параллельную оси x, чтобы вся парабола была расположена выше этой прямой; это значит, что функция не ограничена снизу.

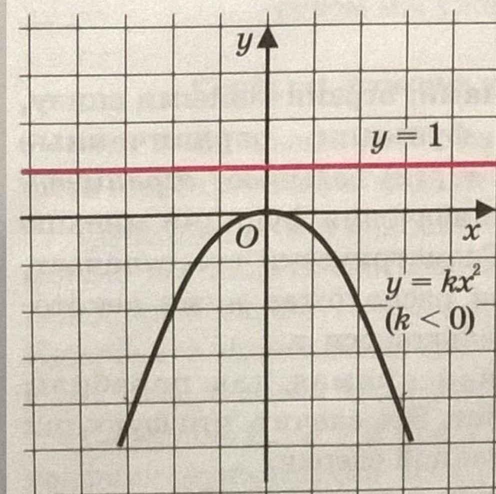


Рис. 39

Свойство 7. Область значений функции — луч $(-\infty; 0]$.

Свойство 8. Функция выпукла вверх.

Пример 4. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2, & \text{если } -4 \leqslant x \leqslant 0; \\ x + 1, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ 2x^2, & \text{если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Требуется:

а) вычислить $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f(2)$, $f(3)$;

б) построить график функции;

в) с помощью графика перечислить свойства функции.

Решение. а) Значение $x = -4$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant 0$, следовательно, $f(-4)$ надо вычислять по первой строке задания функции: $f(x) = -0{,}5x^2$; значит,

$$f(-4) = -0{,}5 \cdot (-4)^2 = -8.$$

Аналогично находим:

$$f(-2) = -0{,}5 \cdot (-2)^2 = -2;$$
$$f(0) = -0{,}5 \cdot 0^2 = 0.$$

Значение $x = \frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 1$, поэтому $f\left(\frac{1}{2}\right)$ надо вычислять по второй строке задания функции: $f(x) = x + 1$; значит,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5.$$

Значение $x = \sqrt{2}$ удовлетворяет условию $1 < x \leqslant 2$, т. е. $f(\sqrt{2})$ надо вычислять по третьей строке задания функции: $f(x) = 2x^2$; значит,

$$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4.$$

Аналогично получим:

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Значение $x = 3$ не удовлетворяет ни одному из трех условий задания функции, а потому $f(3)$ в данном случае вычислить нельзя, точка $x = 3$ не принадлежит области определения функции. Задание, состоящее в том, чтобы вычислить $f(3)$, некорректно.

б) Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим параболу $y = -0{,}5x^2$ и выделим ее часть на отрезке $[-4; 0]$ (рис. 44). Затем построим прямую $y = x + 1$ и выделим ее часть на полуинтервале $(0; 1]$ (рис. 45). Далее построим параболу $y = 2x^2$ и выделим ее часть на полуинтервале $(1; 2]$ (рис. 46). Наконец, все три «кусочка» изобразим в одной системе координат; получим график функции $y = f(x)$ (рис. 47).

в) Перечислим свойства функции или, как мы условились говорить, прочитаем график.

1. Область определения функции — отрезок $[-4; 2]$.
2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $0 < x \leqslant 2$; $y < 0$ при $-4 \leqslant x < 0$.
3. Функция претерпевает разрыв при $x = 0$.

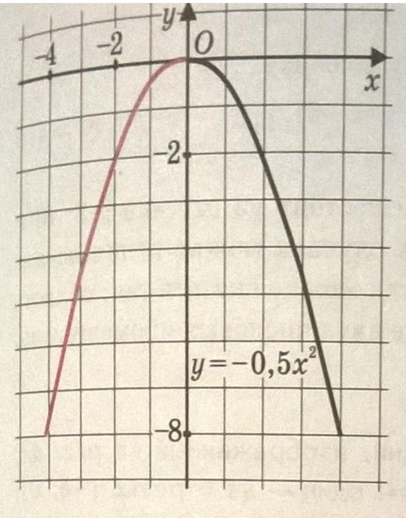


Рис. 44

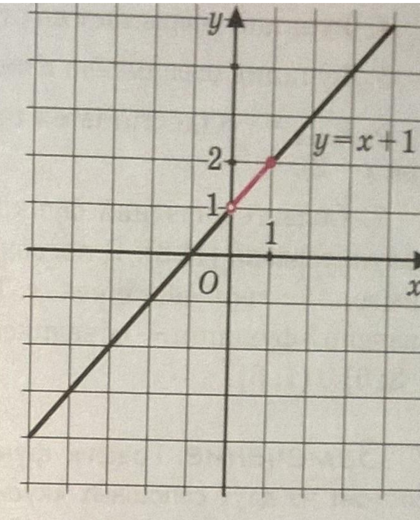


Рис. 45

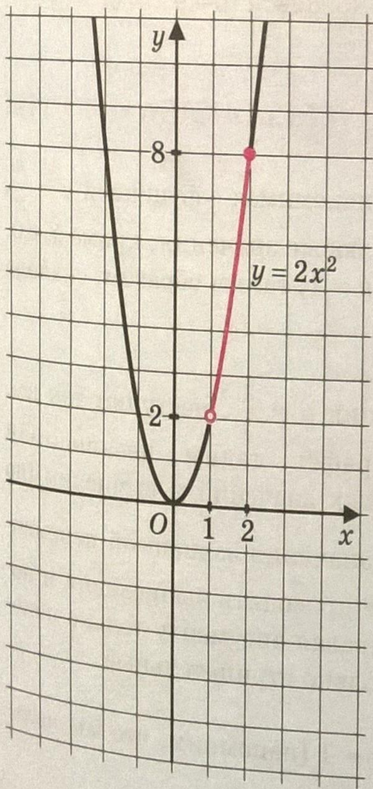


Рис. 46

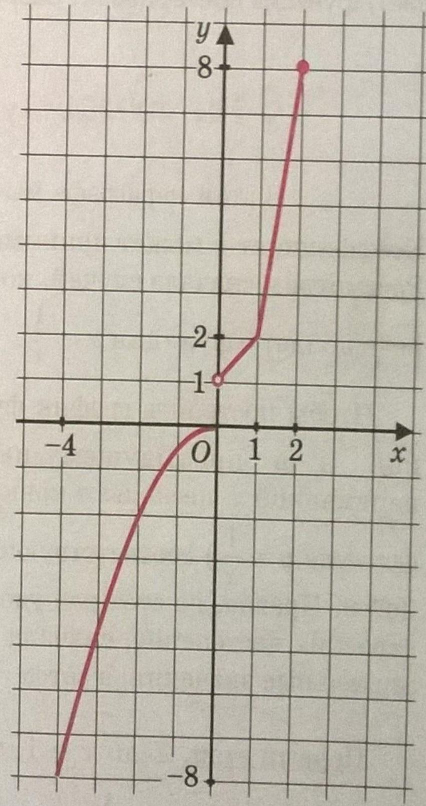


Рис. 47

4. Функция возрастает на отрезке [−4; 2].

5. Функция ограничена и снизу и сверху.

6. $y_{наим} = -8$ (достигается при $x = -4$), $y_{наиб} = 8$ (достигается при $x = 2$).

7. Область значений функции состоит из отрезка [−8; 0] и полуинтервала (1; 8]. В подобных случаях можно использовать символ ∪ – *знак объединения*. Тогда можно сказать так: область значений функции — объединение двух числовых промежутков: $[-8; 0] \cup (1; 8]$.

17.11. Задайте число k так, чтобы график функции $y = kx^2$ был расположен:
а) в первой и второй четвертях;
б) в третьей и четвертой четвертях.

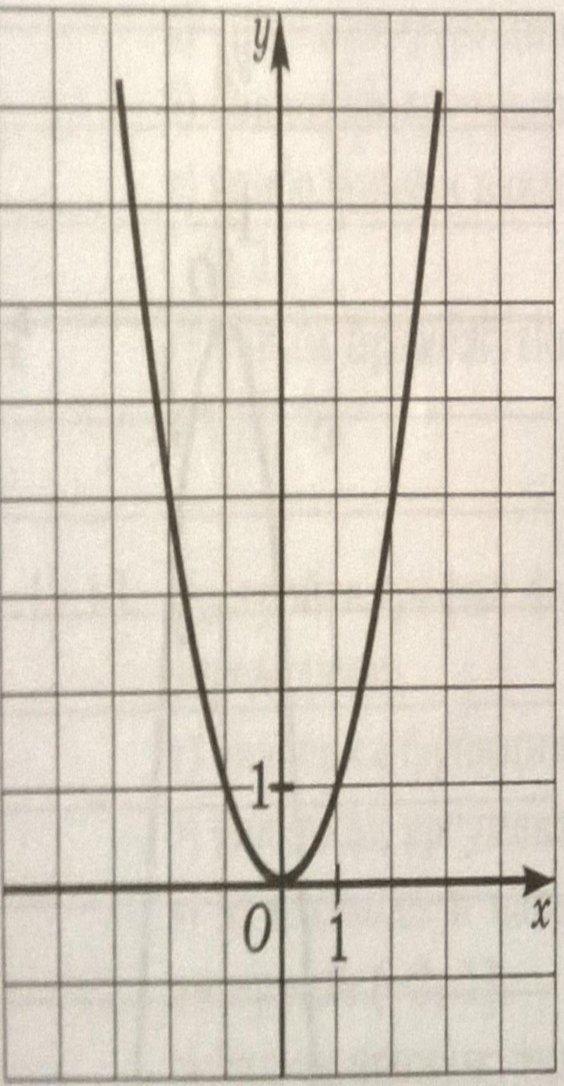
17.12. Постройте график функции $y = 2x^2$. С помощью графика определите:
а) значения функции при $x = 0; 1; -2$;
б) значения аргумента, если $y = 0; 2; 8$;
в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке [−2; 1];
г) каким промежуткам принадлежит переменная x, если $y \in [2; 8]$.

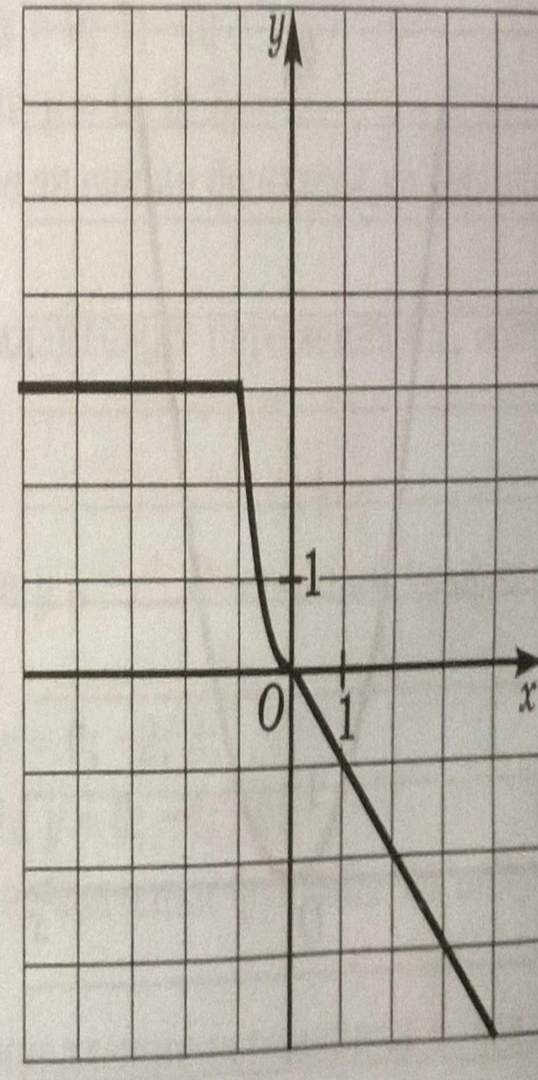
17.13. Постройте график функции $y = -x^2$. С помощью графика определите:
а) значения функции при $x = 0; -2; 3$;
б) значения аргумента, если $y = 0; -4; -9$;
в) наибольшее и наименьшее значения функции на полуинтервале (−3; 1];
г) каким промежуткам принадлежит переменная x, если $y \in [-4; -1)$.

17.20. Выясните, является ли ограниченной сверху функция, график которой изображен на заданном рисунке, и если да, то найдите наибольшее значение функции:

а) рис. 16; в) рис. 18;

б) рис. 17; г) рис. 19.





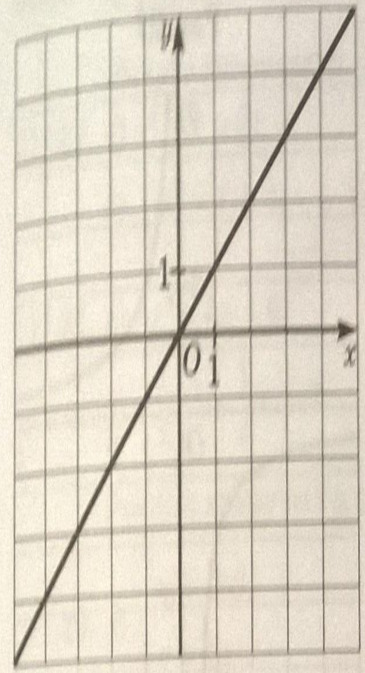


Рис. 16

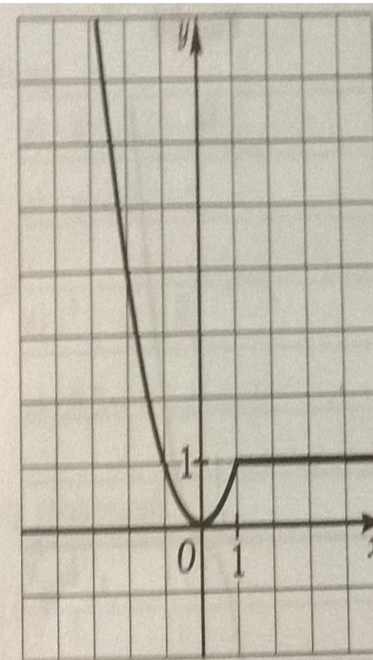


Рис. 17

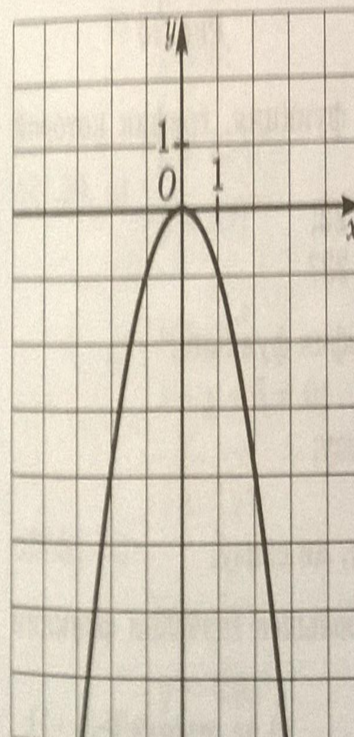


Рис. 18

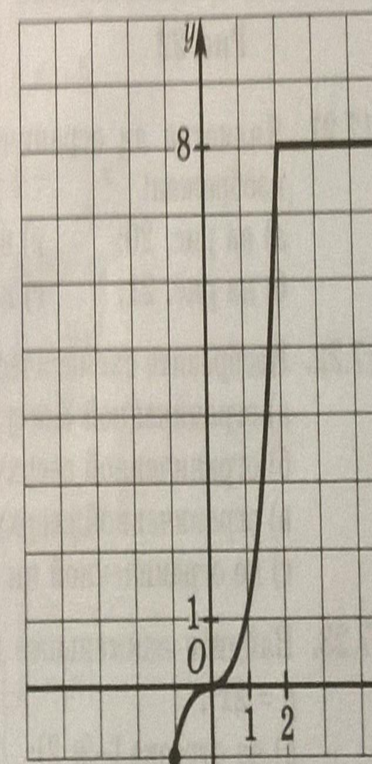


Рис. 19

17.22. Изобразите схематически график функции:

а) ограниченной снизу;

б) ограниченной сверху и снизу;

в) ограниченной сверху;

г) не ограниченной ни сверху, ни снизу.

17.23. Найдите наименьшее и наибольшее значения функ $y = 2x^2$:

а) на отрезке $[-2; 2]$;

б) на полуинтервале $(-3; 1]$;

в) на отрезке $[-3; -1$

г) на луче $[1; +\infty)$.

о17.43. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -3x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$

а) Найдите $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$.

б) Постройте график функции $y = f(x)$.

в) Перечислите свойства функции.

о17.44. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0; \\ 3x + 2, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите:

а) $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$;

б) значения x, при которых $f(x) = 2$, $f(x) = 0$, $f(x) = 8$.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$

Описывая свойства этой функции, мы будем опираться на ее геометрическую модель — гиперболу (см. рис. 58).

Свойство 1. Область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x = 0$.

Свойство 2. $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

Свойство 3. Функция убывает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Доказательство этого утверждения будет дано в § 32.

Свойство 4. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

Свойство 5. Ни наименьшего, ни наибольшего значений у функции нет.

Свойство 6. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и претерпевает разрыв в точке $x = 0$.

Свойство 7. Область значений функции — объединение двух открытых лучей: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$

Описывая свойства этой функции, мы будем опираться на ее геометрическую модель — гиперболу (см. рис. 59).

Свойство 1. Область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x = 0$.

Свойство 2. $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

Свойство 3. Функция возрастает на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Доказательство этого утверждения будет дано в § 32.

Свойство 4. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

Свойство 5. Ни наименьшего, ни наибольшего значений у функции нет.

Свойство 6. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и претерпевает разрыв в точке $x = 0$.

Свойство 7. Область значений функции — объединение двух открытых лучей: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\dfrac{1}{x}, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Сначала построим параболу $y = -x^2$ и выделим ее часть на отрезке $[-2; 1]$ (рис. 61). Затем построим гиперболу $y = -\dfrac{1}{x}$ и выделим ее часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (рис. 62).

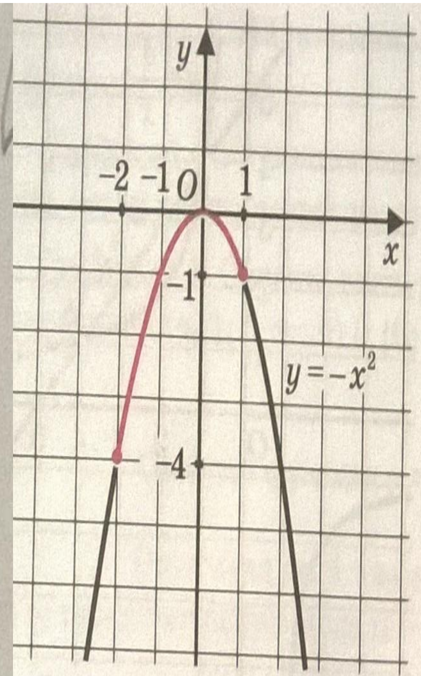


Рис. 61

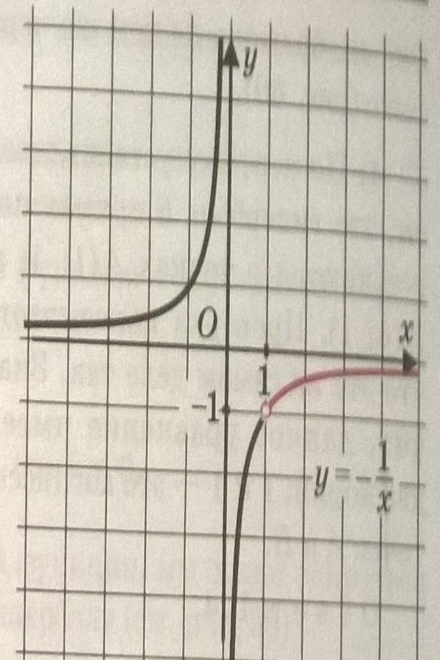


Рис. 62

Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — получим график функции $y = f(x)$ (рис. 63).

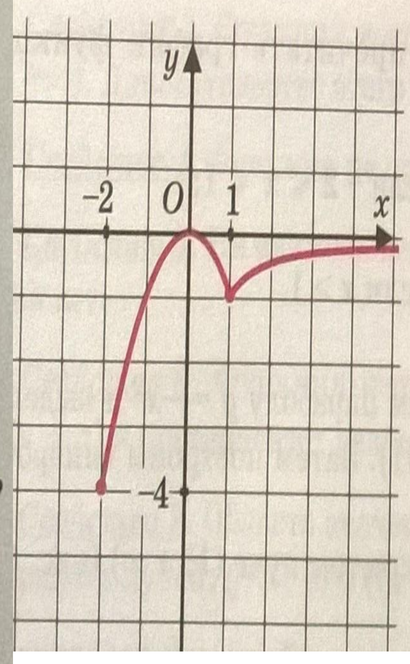
Перечислим свойства функции $y = f(x)$, т. е. прочитаем график.

1. Область определения функции — луч $[-2; +\infty)$.

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $-2 \leqslant x < 0$ и при $x > 0$.

3. Функция возрастает на отрезке $[-2; 0]$ и на луче $[1; +\infty)$, убывает на отрезке $[0; 1]$.

4. Функция ограничена и снизу и сверху.



5. $y_{\text{наим}} = -4$ (достигается при $x = -2$), $y_{\text{наиб}} = 0$ (достигается при $x = 0$).

6. Функция непрерывна в заданной области определения.

7. Область значений функции — отрезок $[-4; 0]$.

8. Функция выпукла вверх на отрезке $[-2; 1]$ и на луче $[1; +\infty)$.

18.4. Задайте число k так, чтобы график функции $y = \frac{k}{x}$ был расположен:

а) в первой и третьей четвертях;

б) во второй и четвертой четвертях.

18.5. Постройте график функции $y = \frac{2}{x}$. С помощью графика найдите:

а) значения y при $x = 1; -2; 4$;

б) значения x, если $y = -1; 2; -4$;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$;

г) какому промежутку принадлежит переменная x, если $y \in [-2; -1]$.

о18.25. Постройте график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, \text{ если } x \leqslant -1; \\ -\frac{1}{2}x^2, \text{ если } -1 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите:

а) $f(-4)$, $f(-1)$, $f(1)$;

б) при каких значениях x $f(x) = -2$, $f(x) = 0$, $f(x) = -\frac{1}{2}$.

Постройте график функции и укажите, где она убывает, где возрастает:

19.7. а) $y = 2(x + 1)^2$; в) $y = 3(x - 5)^2$;
б) $y = -(x - 3)^2$; г) $y = -4(x + 2)^2$.

19.8. а) $y = \frac{2}{x + 5}$; б) $y = -\frac{1}{x - 2}$; в) $y = \frac{3}{x - 1}$; г) $y = -\frac{4}{x + 4}$.

19.9. а) $y = \sqrt{x - 3}$; б) $y = -\sqrt{x + 4}$; в) $y = \sqrt{x - 1}$; г) $y = -\sqrt{x - 2}$.

19.10. а) $y = |x + 3|$; в) $y = |x - 2|$;
б) $y = -|x - 4|$; г) $y = -|x + 1|$.

о19.11. Напишите уравнение параболы $y = a(x + l)^2$, изображенной:
а) на рис. 24; в) на рис. 26;
б) на рис. 25; г) на рис. 27.

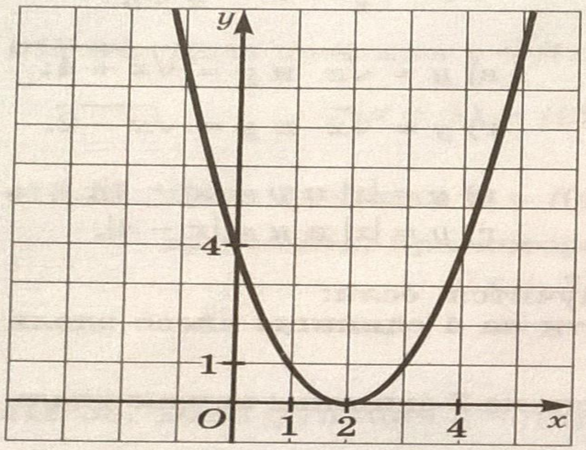


Рис. 24

$y = -2(x+1)^2$

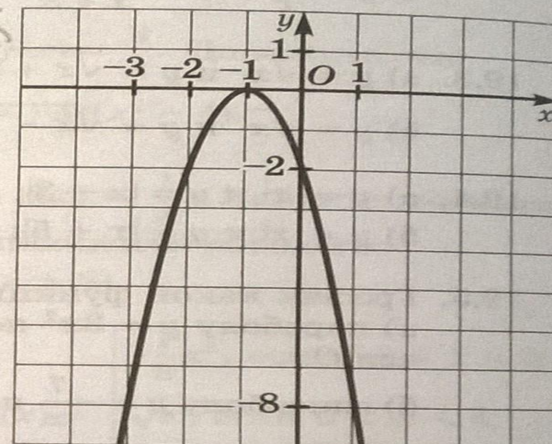


Рис. 25

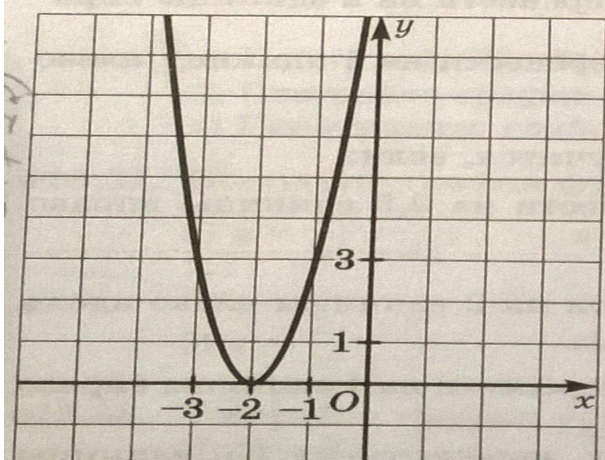


Рис. 26

$y = -\frac{1}{2}(x-4)^2$

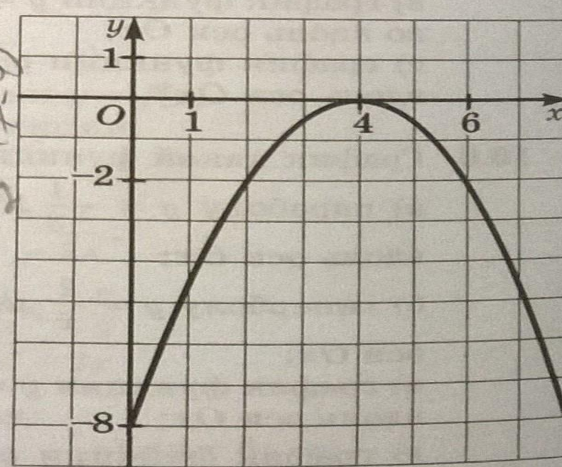


Рис. 27

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2, \text{ если } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 < x \leqslant 4; \\ \frac{8}{x}, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

а) Найдите $f(-3)$, $f(1)$, $f(\sqrt{33} - 1)$.
б) Постройте график функции $y = f(x)$.
в) Перечислите свойства функции.

20.5. График какой функции получится, если:

а) параболу $y = 2x^2$ перенести на 3 единицы вверх вдоль оси Oy;

б) гиперболу $y = \frac{9}{x}$ перенести на 1 единицу вниз вдоль оси Oy;

в) график функции $y = \sqrt{x}$ перенести на 2 единицы вниз вдоль оси Oy;

г) график функции $y = |x|$ перенести на 4 единицы вверх вдоль оси Oy?

19.22. Постройте график функции $y = 2(x - 1)^2$.

а) Найдите значения y при $x = -1; 0; 1$.

б) Найдите значения x, если $y = 2; 8; 0$.

в) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

г) Напишите уравнение оси симметрии параболы.

○20.11. Напишите уравнение параболы $y = ax^2 + m$, изображенной:

а) на рис. 40; в) на рис. 42;
б) на рис. 41; г) на рис. 43.

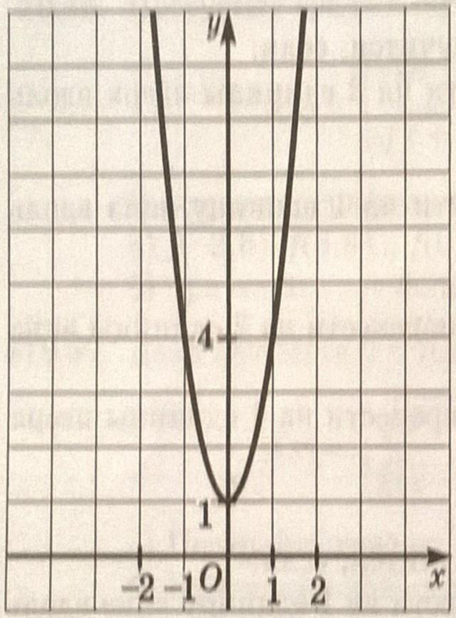


Рис. 40

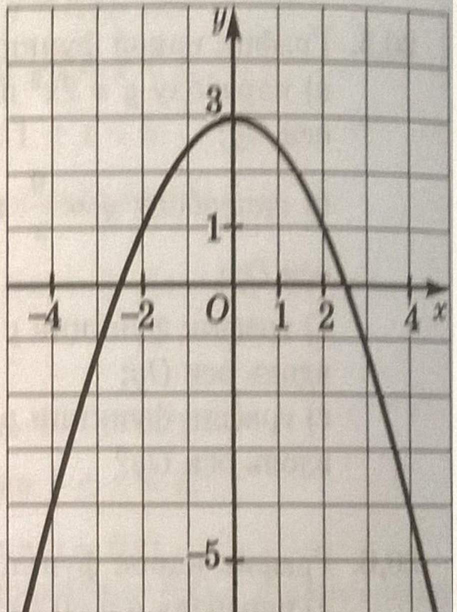


Рис. 41

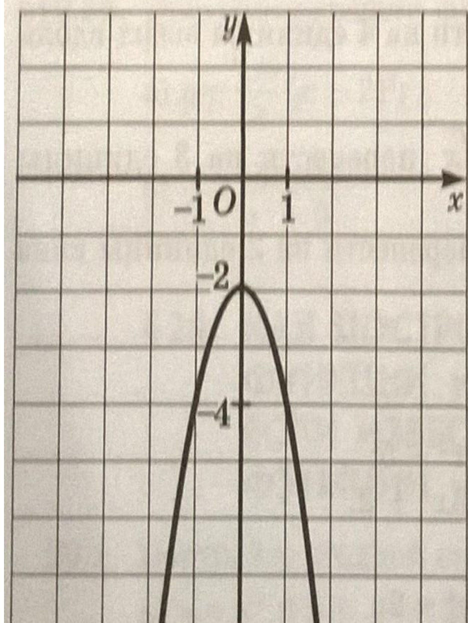


Рис. 42

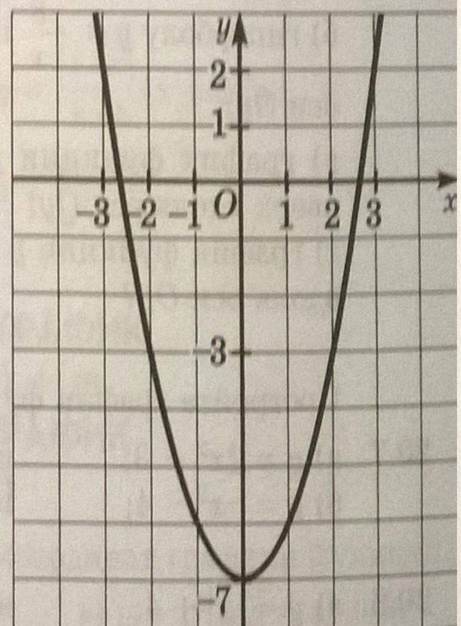


Рис. 43

○20.12. Напишите уравнение гиперболы $y = \frac{k}{x} + m$, изображенной:

а) на рис. 44; б) на рис. 45; в) на рис. 46; г) на рис. 47.

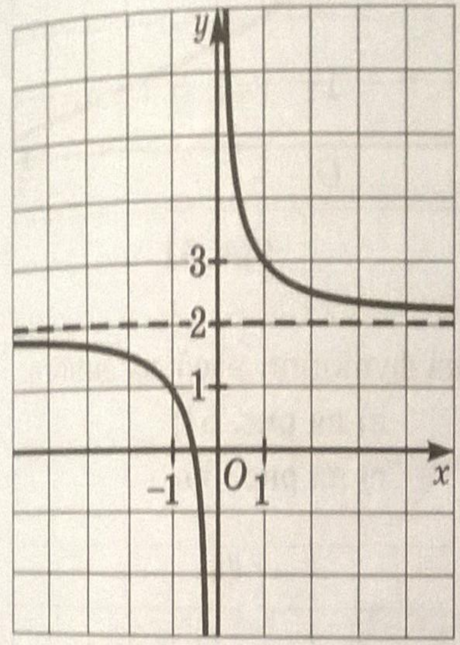


Рис. 44

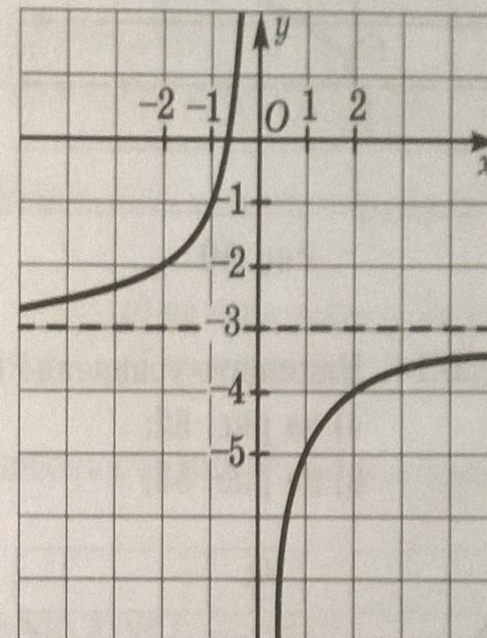


Рис. 45

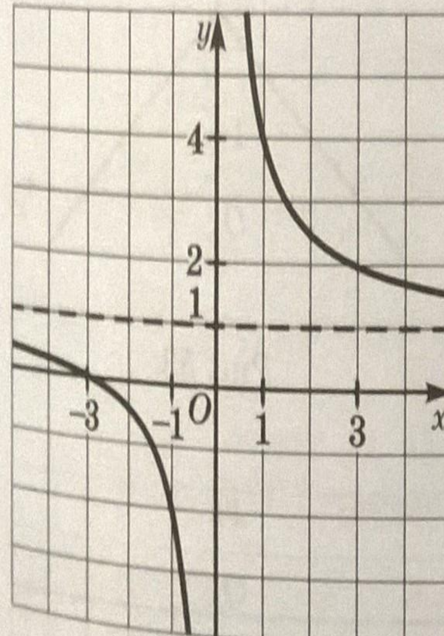


Рис. 46

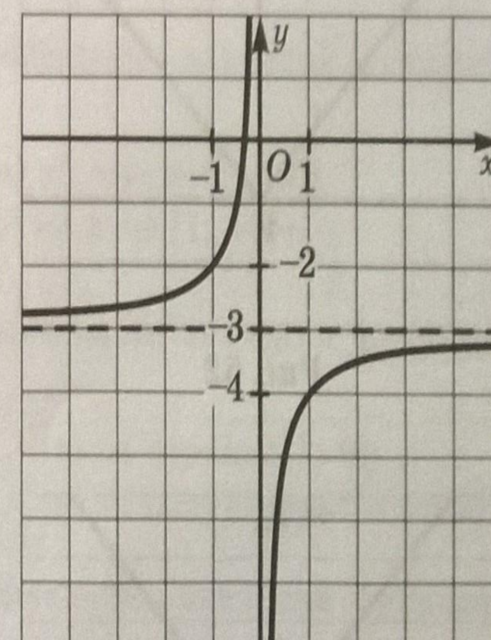


Рис. 47

○20.24. Используя график функции $y = -x^2 + 9$, найдите:

а) значение функции при $x = -3;\ 0;\ 1$;

б) значения аргумента, если $y = 9;\ y = 5;\ y = 0$;

в) наибольшее значение функции;

г) значения аргумента, при которых $y > 0$, $y < 0$.

○20.25. Используя график функции $y = -\sqrt{x} + 2$, найдите:

а) значение функции при $x = 0;\ 1;\ 9$;

б) значение аргумента, если $y = 1;\ y = 0;\ y = -2$;

в) множество значений функции;

г) значения аргумента, при которых $y > 0$, $y < 0$.

○20.26. Используя график функции $y = \sqrt{x} - 1$, найдите:

а) значение функции при $x = 0;\ 1;\ 4$;

б) значение аргумента, если $y = -1;\ y = 0;\ y = 1$;

в) множество значений функции;

г) значения аргумента, при которых $y < 0$, $y > 0$.

○20.27. Используя график функции $y = \dfrac{4}{x} + 2$, найдите:

а) значение функции при $x = -4;\ -2;\ 1$;

б) значение аргумента, если $y = 3;\ 0;\ -2$;

в) значения аргумента, при которых $y < 0$, $y > 0$;

г) уравнения асимптот графика функции.

○21.12. Напишите уравнение параболы $y = a(x + l)^2 + m$, изображенной:

а) на рис. 56; в) на рис. 58;

б) на рис. 57; г) на рис. 59.

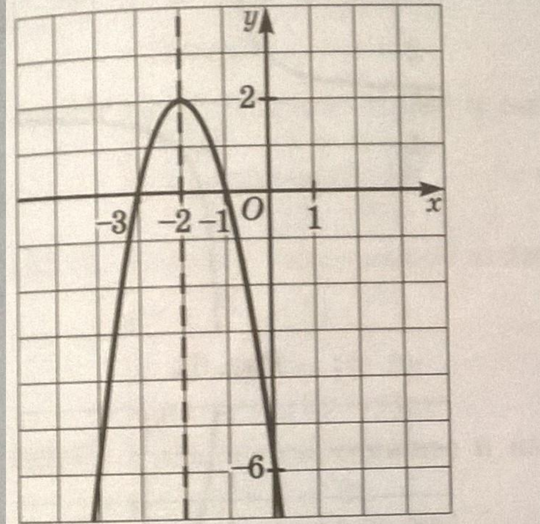


Рис. 56

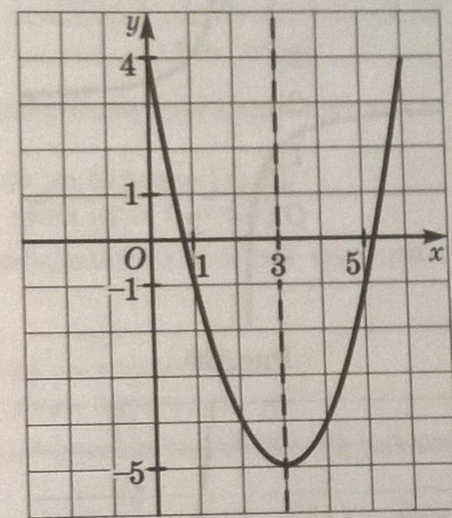


Рис. 57

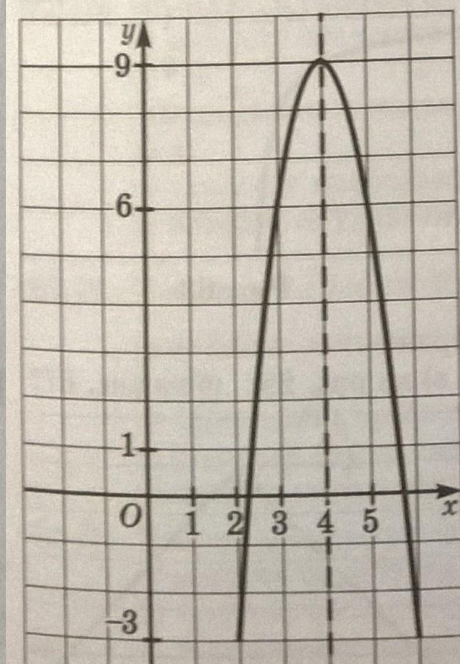


Рис. 58

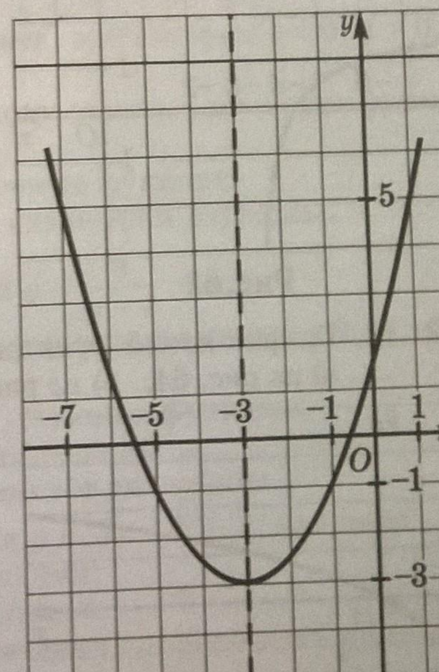


Рис. 59

Пример 2. Не выполняя построения графика функции $y = -3x^2 - 6x + 1$, ответить на следующие вопросы:

а) какая прямая служит осью параболы?

б) Каковы координаты вершины параболы?

в) Куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы?

Решение.

а) Здесь $a = -3$, $b = -6$. Составим уравнение оси параболы: $x = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x = -1$.

б) Абсцисса x_0 вершины параболы нам уже известна: $x_0 = -1$. Ординату y_0 найдем по формуле $y_0 = f(x_0)$, где $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$. Имеем:

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = -3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 4.$$

Итак, вершиной параболы служит точка $(-1; 4)$.

в) Парабола $y = -3x^2 - 6x + 1$ получается параллельным переносом параболы $y = -3x^2$. Ветви параболы $y = -3x^2$ направлены вниз (поскольку коэффициент при x^2 отрицателен), значит, и у параболы $y = -3x^2 - 6x + 1$ ветви направлены вниз.

22.4. Не выполняя построения, ответьте на вопрос, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы:

а) $y = 3x^2 - 7x + 1$;

б) $y = -5x^2 + 2x + 0{,}5$;

в) $y = -7x^2 + x - 2$;

г) $y = 6x^2 + 9x + 1$.

○22.28. а) Найдите значение коэффициента c, если известно, что график функции $y = x^2 + 4x + c$ пересекает ось ординат в точке $A(0; 2)$.

б) Найдите значение коэффициента c, если известно, что график функции $y = x^2 + 4x + c$ пересекает ось ординат в точке $B(0; 4)$.

○22.29. а) Найдите значение коэффициента a, если известно, что график функции $y = ax^2 + 4x + 5$ пересекает ось абсцисс в точке $M(-10; 0)$.

б) Найдите значение коэффициента a, если известно, что график функции $y = ax^2 + 4x - 8$ пересекает ось абсцисс в точке $N(4; 0)$.

○22.30. а) Найдите значение коэффициента b, если известно, что осью симметрии графика функции $y = x^2 + bx + 4$ является прямая $x = 1$.

б) Найдите значение коэффициента b, если известно, что осью симметрии графика функции $y = 2x^2 + bx - 3$ является прямая $x = -4$.

○22.19. Постройте график функции $y = -2x^2 + 4x + 6$. С помощью графика определите:

а) значение функции при $x = -2; 0; 3$;

б) значения аргумента, если $y = -10; 6; 0$;

в) наибольшее значение функции;

г) промежутки возрастания и убывания функции;

д) значения аргумента, при которых $y > 0$, $y < 0$.

8 кл, Алимов Ш.А., Колягин Ю.М.

582 Найти нули квадратичной функции:

1) $y = x^2 - x$;
2) $y = x^2 + 3$;
3) $y = 12x^2 - 17x + 6$;
4) $y = -6x^2 + 7x - 2$;
5) $y = 3x^2 - 5x + 8$;
6) $y = 2x^2 - 7x + 9$;
7) $y = 8x^2 + 8x + 2$;
8) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$;
9) $y = 2x^2 + x - 1$;
10) $y = 3x^2 + 5x - 2$.

583 Найти коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, если известны нули x_1 и x_2 этой функции:

1) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$;
2) $x_1 = -4,\ x_2 = 1$;
3) $x_1 = -1,\ x_2 = -2$;
4) $x_1 = 5,\ x_2 = -3$.

597 На одной координатной плоскости построить графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = 3x^2$;
2) $y = -x^2$ и $y = -3x^2$;
3) $y = 3x^2$ и $y = -3x^2$;
4) $y = \frac{1}{3}x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Используя графики, выяснить, какие из этих функций возрастают на промежутке $x \geqslant 0$.

598 Найти коэффициент a, если парабола $y = ax^2$ проходит через точку:

1) $A(-1; 1)$; 2) $B(2; 1)$; 3) $C(1; 1)$; 4) $D(3; -1)$.

599 С помощью графика функции $y = -2x^2$ решить неравенство:

1) $-2x^2 \leqslant -8$;
2) $-2x^2 > -18$;
3) $-2x^2 \leqslant 1$;
4) $-2x^2 \geqslant -32$.

589 (Устно.) Сравнить значения функции $y = x^2$ при:

1) $x = 2{,}5$ и $x = 3\frac{1}{3}$; 2) $x = 0{,}4$ и $x = 0{,}3$;

3) $x = -0{,}2$ и $x = -0{,}1$; 4) $x = 4{,}1$ и $x = -5{,}2$.

592 Верно ли утверждение, что функция $y = x^2$ возрастает:

1) на отрезке [1; 4]; 2) на интервале (2; 5);

3) на промежутке $x > 3$; 4) на отрезке [−3; 4]?

593 На одной координатной плоскости построить параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3$. При каких значениях x точки параболы лежат выше прямой? ниже прямой?

594 При каких x значения функции $y = x^2$:

1) больше 9; 2) не больше 25;

3) не меньше 16; 4) меньше 36?

605 Выяснить, является ли функция $y = -2x^2$ возрастающей или убывающей:

1) на отрезке [−4; −2]; 2) на интервале (3; 5);

3) на отрезке [−5; 0]; 4) на интервале (−3; 2).

611 Найти на оси Ox точку, через которую проходит ось симметрии параболы:

1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = (x + 2)^2$;

3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$; 4) $y = (x - 2)^2 + 2$;

5) $y = x^2 + x + 1$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

621 Найти координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 + 3x + 5$;

3) $y = -x^2 - 2x + 5$; 4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

622 Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y = x^2 - 3x + 5$; 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;

3) $y = -2x^2 + 6$; 4) $y = 7x^2 + 14$.

Построить график функции и по графику: 1) найти значения x, при которых значения функции положительны; отрицательны; 2) найти промежутки возрастания и убывания функции; 3) выяснить, при каком значении x функция принимает наибольшее или наименьшее значение; найти его **(624—625)**.

624 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = -x^2 + x + 2$;

3) $y = -x^2 + 6x - 9$; 4) $y = x^2 + 4x + 5$.

625 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;

3) $y = -2x^2 + 3x + 2$; 4) $y = 3x^2 - 8x + 4$;

5) $y = 4x^2 + 12x + 9$; 6) $y = -4x^2 + 4x - 1$;

7) $y = 2x^2 - 4x + 5$; 8) $y = -3x^2 - 6x - 4$.

630 Не строя график, определить, при каком значении x квадратичная функция имеет наибольшее (наименьшее) значение; найти это значение:

1) $y = x^2 - 6x + 13$; 2) $y = x^2 - 2x - 4$;
3) $y = -x^2 + 4x + 3$; 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

631 Определить знаки коэффициентов уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) ветви параболы направлены вверх, абсцисса ее вершины отрицательна, а ордината положительна;
2) ветви параболы направлены вниз, абсцисса и ордината ее вершины отрицательны.

637 Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:

1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$;
5) $y = 5x^2 + x - 1$; 6) $y = 5x^2 + 3x - 2$;
7) $y = 4x^2 - 11x + 6$; 8) $y = 3x^2 + 13x - 10$.

638 Найти координаты вершины параболы:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$;
5) $y = -2x(x + 2)$; 6) $y = (x - 2)(x + 3)$.

639 Построить график функции и по графику выяснить ее свойства:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$;