# Лекция 4. Бинарные отношения

# 1. Прямое произведение множеств

Пусть $a,b$ – два произвольных объекта.

**Упорядоченная пара**: $(a,b)$.

Если $a \neq b$, то $(a,b) \neq (b,a)$.

**Упорядоченная последовательность $n$ объектов**: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

**Прямое (декартово) произведение множеств $A \times B$** – это множество упорядоченных пар элементов из этих множеств:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Если $A \neq B$, то $B \neq A$.

**Прямое произведение $n$ множеств:**

$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$

$A \times A \times \ldots A = A^n$

# 1. Прямое произведение множеств

**Утверждение.** $|A|=m,\ |B|=n \Rightarrow |A\times B|=m\times n$

**Доказательство:**

Выбрать первый элемент пары – *m* способов;
выбрать первый элемент пары – *n* способов;
по правилу умножения  всего $m\times n$ способов.

# 2. Бинарные отношения

Пусть $A,B$ – произвольные множества.

**Бинарное отношение** ρ из множества $A$ в множество $B$ – это всякое подмножество прямого произведения $A\times B$.

$\rho \subseteq A\times B$

Если $A=B$, то говорят о бинарном отношении на множестве $A$.

Форма записи: префиксная $(a,b) \in \rho$

инфиксная $a\rho b$

***n*-арное отношение** – подмножество прямого произведения

$n$ множеств: $\rho \subseteq A_1\times A_2\times\ldots A_n$.

**График бинарного отношения** – множество точек плоскости, координаты которых $(a,b)$ образуют упорядоченные пары этого отношения.

# 2. Бинарные отношения

- Область определения: $\rho_A = \{a \in A \mid (\exists b \in B):(a,b) \in \rho\}$

Область значений: $\rho_B = \{b \in B \mid (\exists\ b \in B):(a,b) \in \rho\}$

Обратное к ρ отношение : $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ $\quad \rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$

Дополнение: $\bar{\rho} \subseteq A \times B$ $\quad \bar{\rho} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin \rho\}$

Тождественное отношение: $I \subseteq A^2$ $\quad I = \{(a,a) \mid a \in A\}$

Композиция отношений: $\rho_1 \subseteq A \times C,\ \rho_2 \subseteq C \times B$

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(a,b) \mid (a \in A, b \in B)\ \&\ (\exists c \in C\text{: } (a,\mathrm{c}) \in \rho_1\ \&\ (c,\mathrm{b}) \in \rho_2)$.

Если $\rho \subseteq A \times A$, то $\rho \circ \rho = \rho^2$, $\rho \circ \rho \circ \rho = \rho^3$ и т.д.

# 2. Бинарные отношения

**Утверждение.** $\rho_1 \subseteq A\times C,\ \rho_2 \subseteq C\times B \Rightarrow (\rho_1\circ\rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1}\circ\rho_1^{-1}$

**Доказательство:**

$(a,b)\in(\rho_1\circ\rho_2)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b,a)\in\rho_1\circ\rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \exists\, c\in C\!:\ (b,c)\in\rho_1\ \&\ (c,a)\in\rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (c,b)\in\rho_2^{-1}\ \&\ (a,c)\in\rho_1^{-1}$

# 2. Бинарные отношения

**Утверждение.** $\rho_1 \subseteq A\times C$, $\rho_2 = \subseteq C\times B \Rightarrow (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$

**Доказательство:**

$(a,b) \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b,a) \in \rho_1 \circ \rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in C$: $(b,c) \in \rho_1$ & $(c,a) \in \rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,c) \in \rho_1^{-1}$ & $(c,b) \in \rho_2^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b) \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

# 2. Бинарные отношения

**Утверждение.** $\rho_1 \subseteq A \times C,\ \rho_2 \subseteq C \times B \Rightarrow (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$

**Доказательство:**

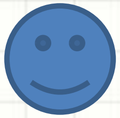
$(a,b) \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b,a) \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in C$: $(b,c) \in \rho_1\ \&\ (c,a) \in \rho_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,c) \in \rho_1^{-1}\ \&\ (c,b) \in \rho_2^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,b) \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.



# 2. Бинарные отношения

Пусть $\rho \subseteq A \times A$.

Рефлексивное отношение:

$(\forall a \in A)$: $(a,a) \in \rho$.

Антирефлексивное отношение:

$(\forall a \in A)$: $(a,a) \notin \rho$.

Симметричное отношение:

$(\forall a,b \in A,\ a \neq b)$: $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$.

Антисимметричное отношение:

$(\forall a,b \in A)$: $((a,b) \in \rho,\ (b,a) \in \rho \Rightarrow a = b)$.

Транзитивное отношение:

$(\forall a,b,c \in A)$: $((a,b) \in \rho,\ (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho\ )$.

Полное отношение:

$(\forall a,b,c \in A)$: $(\forall a,b \in A,\ a \neq b)$: $(a,b) \in \rho$ или $(b,a) \in \rho$.

# 3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Отношение $\rho \subseteq A \times A$:

1) рефлексивно $\Leftrightarrow I \subseteq \rho$;
2) симметрично $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;
3) транзитивно $\Leftrightarrow \rho \circ \rho \subseteq \rho$;
4) антирефлексивно $\Leftrightarrow \rho \cap I = \varnothing$;
5) антисимметрично $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq I$;
6) полно $\Leftrightarrow \rho \cup \rho^{-1} \cup I = U$.

# 3. Теорема о свойствах бинарного отношения

**Утверждение 1.** $\rho \subseteq A\times A$ рефлексивно $\Leftrightarrow I \subseteq \rho$.

**Доказательство:**

$\rho$ рефлексивно $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, a\in A)$: $(a, a) \in \rho \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I \subseteq \rho$.

# 3. Теорема о свойствах бинарного отношения

**Утверждение 2.** $\rho \subseteq A\times A$ симметрично $\Leftrightarrow$ $\rho = \rho^{-1}$.

**Доказательство:**

$\rho$ симметрично $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $[(\forall\, a,b\in A,\ a\neq b)$: $(a,b)\in\rho \Leftrightarrow (b,a)\in\rho\,]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a,b)\in\rho^{-1}$ и $(b,a)\in\rho^{-1}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a,b)\in\rho^{-1}$ и $(a,b)\in\rho$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho \subseteq \rho^{-1}$ и $\rho^{-1} \subseteq \rho$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho = \rho^{-1}$.

# 3. Теорема о свойствах бинарного отношения

**Утверждение 3.** $\rho \subseteq A\times A$ транзитивно $\Leftrightarrow$ $\rho\circ\rho \subseteq \rho$.

**Доказательство:**

А) $\rho$ транзитивно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $[(\forall\, a,b,c\in A)$: $(a,b)\in\rho$ и $(b,c)\in\rho \Rightarrow (a,c)\in\rho\,]$ $\Rightarrow$ $\rho\circ\rho \subseteq \rho$.

$(a,c)\in\rho\circ\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists\, b$: $(a,b)\in\rho$ и $(b,c)\in\rho \Rightarrow (a,c)\in\rho$

Б) $\rho\circ\rho \subseteq \rho$.

Пусть $(a,b)\in\rho$ и $(b,c)\in\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,c)\in\rho\circ\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\rho$ транзитивно.

# 3. Теорема о свойствах бинарного отношения

**Утверждение 4.** $\rho \subseteq A \times A$ антирефлексивно $\Leftrightarrow$ $\rho \cap I = \varnothing$.

**Доказательство:**

$\rho$ антирефлексивно $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(\forall a \in A)$: $(a, a) \notin \rho$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho \cap I = \varnothing$.

# 3. Теорема о свойствах бинарного отношения

**Утверждение 5.** $\rho \subseteq A\times A$ антисимметрично $\Leftrightarrow$ $\rho\cap\rho^{-1}\subseteq I$.

**Доказательство:**

$\rho$ антисимметрично $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $[(\forall a,b\in A)$: $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho \Rightarrow a=b]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $[(a\neq b$ и $(a,b)\in\rho) \Leftrightarrow (a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho^{-1}]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho\cap\rho^{-1}\subseteq I$.

# 3. Теорема о свойствах бинарного отношения

**Утверждение 6.** $\rho \subseteq A\times A$ полно $\Leftrightarrow \rho \cup \rho^{-1} \cup I = U$.

**Доказательство:**

$\rho$ полно $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall a,b \in A, a \neq b)$: $(a,b) \in \rho$ или $(b,a) \in \rho$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(b,a) \in \rho^{-1}$ или $(a,b) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,b) \in \rho \cup \rho^{-1}$ и $(b,a) \in \rho \cup \rho^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho \cup \rho^{-1} = \rho \cup \rho^{-1} \cup I = U$.

# 4. Замыкание отношений

Для бинарного отношения $\rho \subseteq A \times A$:

рефлексивное замыкание $\rho_r = \rho \cup I$;

симметричное замыкание $\rho_s = \rho \cup \rho^{-1}$;

транзитивное замыкание $\rho_t = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

.

При этом:

$\rho_r$ - рефлексивное бинарное отношение;

$\rho_s$ - симметричное бинарное отношение;

$\rho_t$ - транзитивное бинарное отношение.

Вопросы?