Лекция 4. Бинарные отношения

1. Прямое произведение множеств

Пусть a,b – два произвольных объекта.

Упорядоченная пара: (a,b).

Если $a \neq b$, то $(a,b) \neq (b,a)$.

Упорядоченная последовательность *n* объектов: $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Прямое (декартово) произведение множеств $A \times B$ – это множество упорядоченных пар элементов из этих множеств:

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Если $A \neq B$, то $B \neq A$.

Прямое произведение *n* множеств:

$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$

$A \times A \times \ldots A = A^n$

1. Прямое произведение множеств

Утверждение. $|A|=m,\ |B|=n \Rightarrow |A\times B|=m\times n$

Доказательство:

Выбрать первый элемент пары – *m* способов;
выбрать первый элемент пары – *n* способов;
по правилу умножения всего $m\times n$ способов.

2. Бинарные отношения

Пусть A,B – произвольные множества.

Бинарное отношение ρ из множества A в множество B – это всякое подмножество прямого произведения $A \times B$.

$\rho \subseteq A \times B$

Если $A=B$, то говорят о бинарном отношении на множестве A.

Форма записи: префиксная $(a,b) \in \rho$

инфиксная $a\rho b$

***n*-арное отношение** – подмножество прямого произведения

n множеств: $\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$.

График бинарного отношения – множество точек плоскости, координаты которых (a,b) образуют упорядоченные пары этого отношения.

2. Бинарные отношения

- Область определения: $\rho_A = \{a \in A \mid (\exists b \in B):(a,b) \in \rho\}$

Область значений: $\rho_B = \{b \in B \mid (\exists\ b \in B):(a,b) \in \rho\}$

Обратное к ρ отношение : $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ $\rho^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$

Дополнение: $\bar{\rho} \subseteq A \times B$ $\bar{\rho} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin \rho\}$

Тождественное отношение: $I \subseteq A^2$ $I = \{(a,a) \mid a \in A\}$

Композиция отношений: $\rho_1 \subseteq A \times C,\ \rho_2 \subseteq C \times B$

$\rho_1 \circ \rho_2 = \{(a,b) \mid (a \in A, b \in B)\ \&\ (\exists c \in C$: $(a,c) \in \rho_1\ \&\ (c,b) \in \rho_2)$.

Если $\rho \subseteq A \times A$, то $\rho \circ \rho = \rho^2$, $\rho \circ \rho \circ \rho = \rho^3$ и т.д.

2. Бинарные отношения

Утверждение. $\rho_1 \subseteq A\times C,\ \rho_2 \subseteq C\times B \Rightarrow (\rho_1\circ\rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1}\circ\rho_1^{-1}$

Доказательство:

$(a,b)\in(\rho_1\circ\rho_2)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b,a)\in\rho_1\circ\rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \exists\, c\in C\colon (b,c)\in\rho_1\ \&\ (c,a)\in\rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (c,b)\in\rho_2^{-1}\ \&\ (a,c)\in\rho_1^{-1}$

2. Бинарные отношения

Утверждение. $\rho_1 \subseteq A\times C$, $\rho_2 = \subseteq C\times B \Rightarrow (\rho_1\circ\rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1}\circ\rho_1^{-1}$

Доказательство:

$(a,b)\in(\rho_1\circ\rho_2)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (b,a)\in\rho_1\circ\rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, c\in C\colon (b,c)\in\rho_1 \;\&\; (c,a)\in\rho_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,c)\in\rho_1^{-1} \;\&\; (c,b)\in\rho_2^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,b)\in\rho_2^{-1}\circ\rho_1^{-1}$.

2. Бинарные отношения

Утверждение. $\rho_1 \subseteq A{\times}C,\ \rho_2 \subseteq C{\times}B \Rightarrow (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} = \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$

Доказательство:

$(a,b) \in (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b,a) \in \rho_1 \circ \rho_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, c \in C\colon (b,c) \in \rho_1 \ \&\ (c,a) \in \rho_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,c) \in \rho_1^{-1} \ \&\ (c,b) \in \rho_2^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,b) \in \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$.

2. Бинарные отношения

Пусть $\rho \subseteq A \times A$.

Рефлексивное отношение:

$(\forall a \in A)$: $(a,a) \in \rho$.

Антирефлексивное отношение:

$(\forall a \in A)$: $(a,a) \notin \rho$.

Симметричное отношение:

$(\forall a,b \in A,\ a \neq b)$: $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$.

Антисимметричное отношение:

$(\forall a,b \in A)$: $((a,b) \in \rho,\ (b,a) \in \rho \Rightarrow a = b)$.

Транзитивное отношение:

$(\forall a,b,c \in A)$: $((a,b) \in \rho,\ (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho\ )$.

Полное отношение:

$(\forall a,b,c \in A)$: $(\forall a,b \in A,\ a \neq b)$: $(a,b) \in \rho$ или $(b,a) \in \rho$.

3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Отношение $\rho \subseteq A\times A$:

1) рефлексивно $\Leftrightarrow I \subseteq \rho$;
2) симметрично $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;
3) транзитивно $\Leftrightarrow \rho\circ\rho \subseteq \rho$;
4) антирефлексивно $\Leftrightarrow \rho\cap I = \varnothing$;
5) антисимметрично $\Leftrightarrow \rho\cap\rho^{-1}\subseteq I$;
6) полно $\Leftrightarrow \rho \cup \rho^{-1} \cup I = U$.

3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Утверждение 1. $\rho \subseteq A \times A$ рефлексивно $\Leftrightarrow I \subseteq \rho$.

Доказательство:

ρ рефлексивно $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, a \in A)$: $(a, a) \in \rho \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I \subseteq \rho$.

3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Утверждение 2. $\rho \subseteq A \times A$ симметрично $\Leftrightarrow$ $\rho = \rho^{-1}$.

Доказательство:

ρ симметрично $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $[(\forall a,b \in A,\ a \neq b)\text{: } (a,b) \in \rho \Leftrightarrow (b,a) \in \rho\,] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a,b) \in \rho^{-1}$ и $(b,a) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a,b) \in \rho^{-1}$ и $(a,b) \in \rho \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho \subseteq \rho^{-1}$ и $\rho^{-1} \subseteq \rho \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho = \rho^{-1}$.

3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Утверждение 3. $\rho \subseteq A\times A$ транзитивно $\Leftrightarrow$ $\rho\circ\rho \subseteq \rho$.

Доказательство:

А) ρ транзитивно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $[(\forall\, a,b,c \in A)$: $(a,b)\in\rho$ и $(b,c)\in\rho \Rightarrow (a,c)\in\rho\,]$ $\Rrightarrow$ $\rho\circ\rho \subseteq \rho$.

$(a,c)\in\rho\circ\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists\, b$: $(a,b)\in\rho$ и $(b,c)\in\rho \Rightarrow (a,c)\in\rho$

Б) $\rho\circ\rho \subseteq \rho$.

Пусть $(a,b)\in\rho$ и $(b,c)\in\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow (a,c)\in\rho\circ\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ρ транзитивно.

3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Утверждение 4. $\rho \subseteq A \times A$ антирефлексивно $\Leftrightarrow$ $\rho \cap I = \varnothing$.

Доказательство:

ρ антирефлексивно $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(\forall a \in A)$: $(a, a) \notin \rho$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho \cap I = \varnothing$.

3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Утверждение 5. $\rho \subseteq A\times A$ антисимметрично $\Leftrightarrow$ $\rho\cap\rho^{-1}\subseteq I$.

Доказательство:

ρ антисимметрично $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $[(\forall a,b\in A)$: $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho \Rightarrow a=b]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $[(a\neq b$ и $(a,b)\in\rho) \Leftrightarrow (a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho^{-1}]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho\cap\rho^{-1}\subseteq I$.

3. Теорема о свойствах бинарного отношения

Утверждение 6. $\rho \subseteq A \times A$ полно $\Leftrightarrow$ $\rho \cup \rho^{-1} \cup I = U$.

Доказательство:

ρ полно $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(\forall a, b \in A, a \neq b)$: $(a,b) \in \rho$ или $(b,a) \in \rho$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(b,a) \in \rho^{-1}$ или $(a,b) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(a,b) \in \rho \cup \rho^{-1}$ и $(b,a) \in \rho \cup \rho^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho \cup \rho^{-1} = \rho \cup \rho^{-1} \cup I = U$.

4. Замыкание отношений

Для бинарного отношения $\rho \subseteq A \times A$:

рефлексивное замыкание $\rho_r = \rho \cup I$;

симметричное замыкание $\rho_s = \rho \cup \rho^{-1}$;

транзитивное замыкание $\rho_t = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 \cup \ldots \cup \rho^n \cup \ldots$

.

При этом:

ρ_r - рефлексивное бинарное отношение;

ρ_s - симметричное бинарное отношение;

ρ_t - транзитивное бинарное отношение.

Вопросы?