

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

ВЫПОЛНИЛИ СТУДЕНТКИ ГРУППЫ **9УК-21**

КАПУСТЯНСКАЯ Я.П. ЯКОВЛЕВА А.И.

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ ДОЛГОВА Т.В.

СОДЕРЖАНИЕ

- Основные понятия
- Уравнения прямой по точке и вектору нормали
- Уравнение прямой проходящей через две точки
- Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту
- Уравнение прямой по точке и направленному вектору
- Уравнение прямой в отрезках
- Нормальное уравнение прямой
- Угол между прямыми на плоскости
- Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой
- Расстояние от точки до прямой
- Выводы
- Кратка теория

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение.

Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0$$

*причем постоянные A , B не равны нулю одновременно.

Его называют **общим уравнением**. В зависимости от значений постоянных A, B и C возможны следующие частные случаи:

- $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – проходит через начало координат (рис.1)
- $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ { $B y + C = 0$ }- параллельна оси Ox (рис.2,а)
- $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ { $A x + C = 0$ } – параллельна оси Oy (рис.2,б)
- $B = C = 0, A \neq 0$ – совпадает с осью Oy (рис.3,а)
- $A = C = 0, B \neq 0$ – совпадает с осью Ox (рис.3,б)

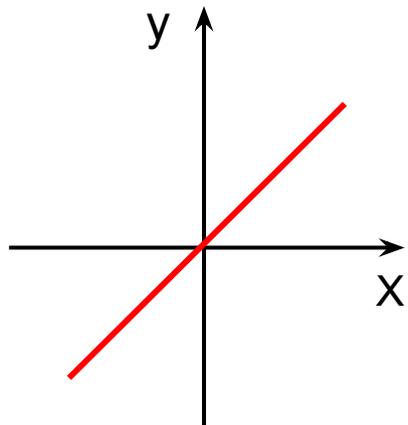


Рис.1

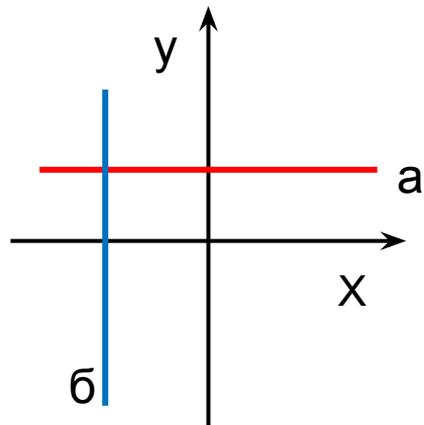


Рис.2

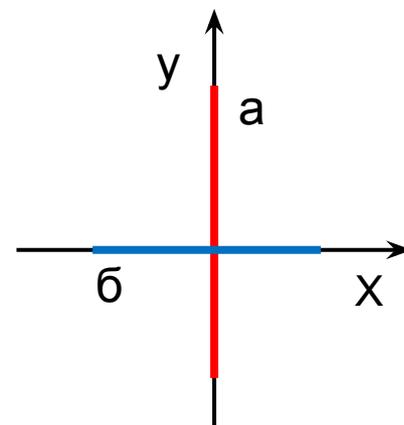


Рис.3

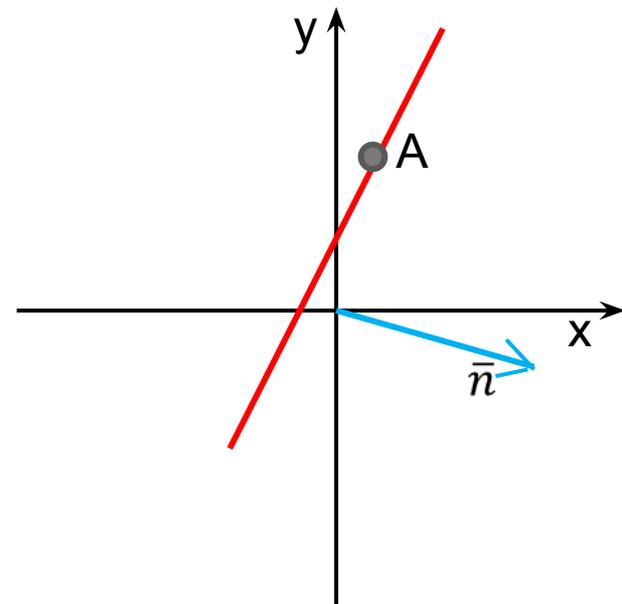
Уравнение прямой на плоскости может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И ВЕКТОРУ НОРМАЛИ

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с координатами $\{A, B\}$ перпендикулярен прямой $Ax + By + C = 0$.

Пример . Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ перпендикулярно вектору $n\{3, -1\}$.

Решение. Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение: $3x - y + C = 0$. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A . Получаем: $3 - 2 + C = 0$, следовательно, $C = -1$. Окончательно получим: $3x - y - 1 = 0$.



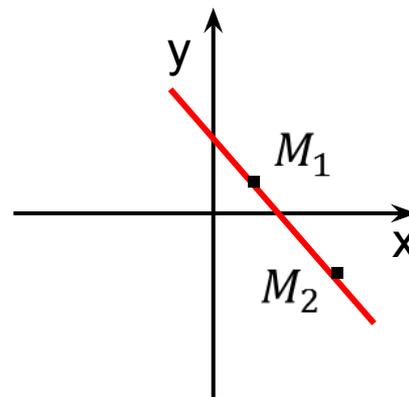
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель. Данное уравнение прямой м.б. записано:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$



Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом**

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ

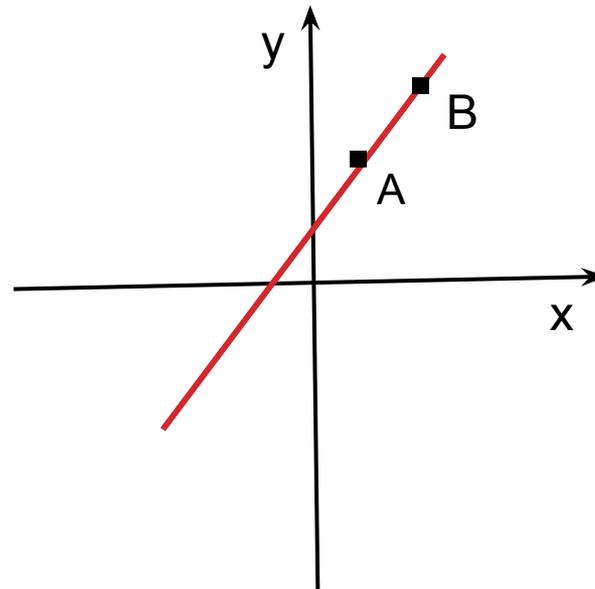
Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Решение. Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1} (x - 1)$$

$$y - 2 = x - 1$$

$$x - y + 1 = 0$$



УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И УГЛОВОМУ КОЭФФИЦИЕНТУ

Если общее уравнение прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$ привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

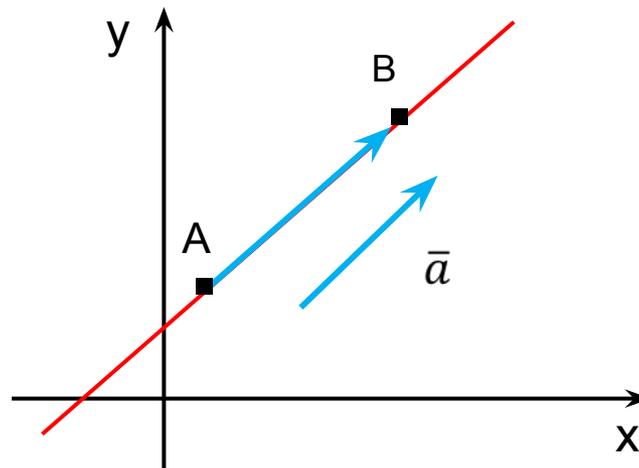
и обозначить $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{C}{B} = b$; т. е. $y = kx + b$, то полученное уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** .

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ ВЕКТОРУ

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a} \{a_1; a_2\}$, компоненты которого удовлетворяют условию $A a_1 + B a_2 = 0$ называется направляющим вектором прямой

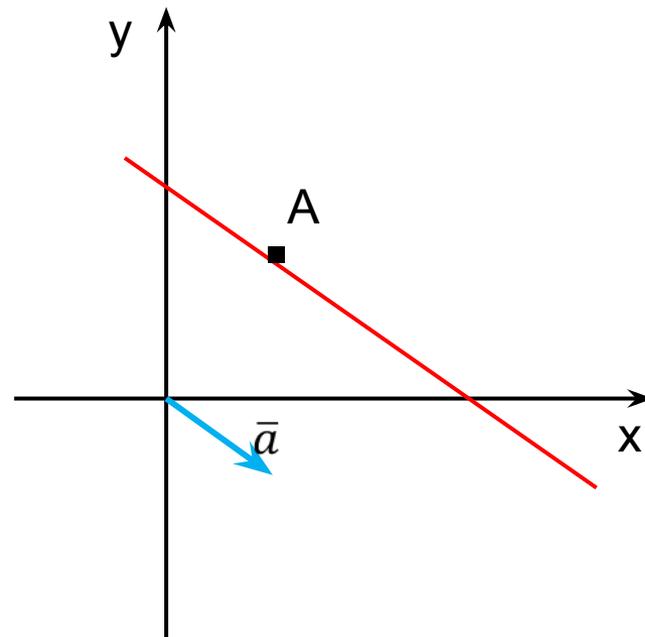
$$Ax + By + C = 0.$$



УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ ВЕКТОРУ

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, 2)$ с направляющим вектором $\{1, -1\}$.

Решение. Будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:
 $1 * A + (-1) * B = 0$, т.е. $A = B$.
Тогда получим вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C / A = 0$. при $x = 1, y = 2$ получаем $C / A = -3$, т.е. искомое:
 $x + y - 3 = 0$



УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Если в общем уравнении $Ax + By + C = 0$ $C \neq 0$, то, разделив на $-C$, получим:

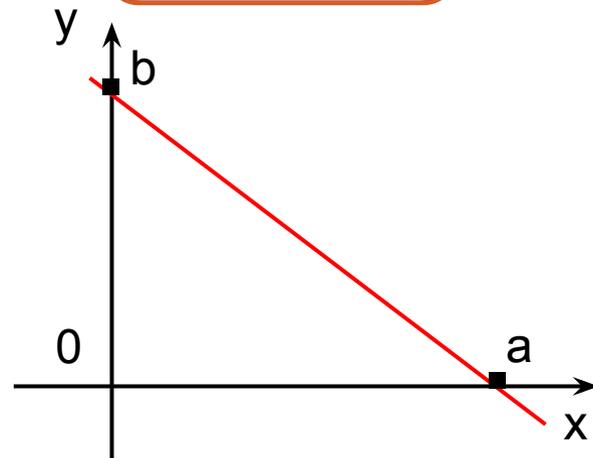
$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

, где

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B}$$



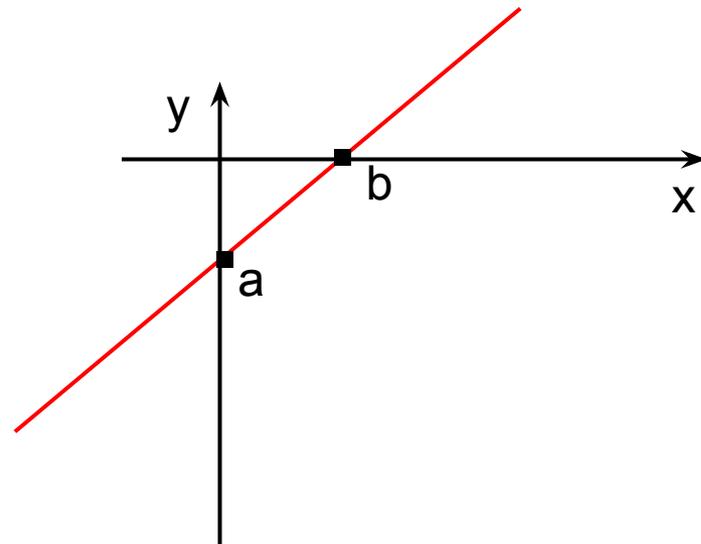
Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox , а b – координатой точки пересечения с осью Oy .

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Пример . Задано общее уравнение $x - y + 1 = 0$.
Найти его в виде уравнение прямой в отрезках.

Решение.

$$C = 1, \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$



НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Если уравнение прямой на плоскости $Ax + By + C = 0$ умножить на число

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

, которое называется

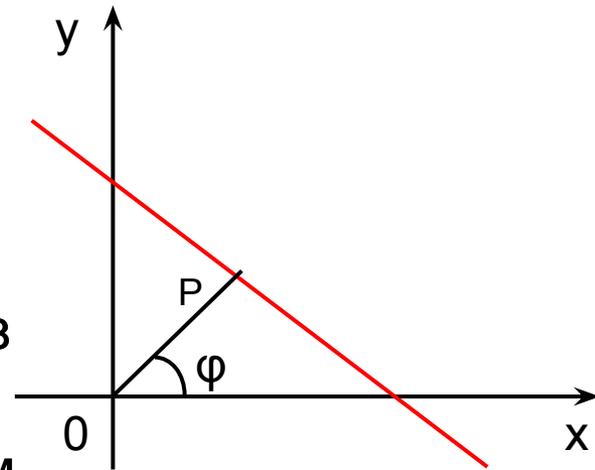
нормирующим множителем,

то получим

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 -$$

нормальное уравнение. Знак \pm нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы $\mu * C < 0$. p –

длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox .



НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Пример . Дано $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой линии.

Решение.

$$\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$$

уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$

уравнение прямой с угловым коэффициентом:
(делим на 5)

$$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$$

нормальное уравнение прямой: $\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{1}{13}$ $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0$;

$\cos \varphi = 12/13$; $\sin \varphi = -5/13$; $p = 5$.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить в отрезках, например, параллельные осям или проходящие через начало координат.

НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Найти её, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2

Решение. Искомое уравнение имеет вид: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $ab/2 = 8;$

$ab=16; a=4, a=-4. a = -4 < 0$ не подходит по условию задачи

Итого: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ или $x + y - 4 = 0.$

НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Пример. Какая прямая проходит через точку $A(-2, -3)$ и начало координат.

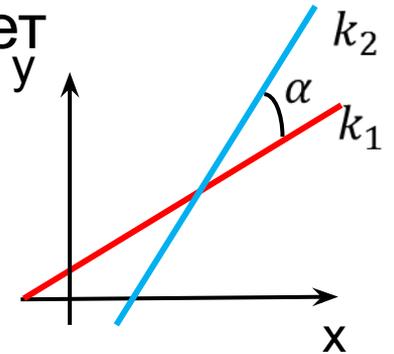
Решение. Имеем: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x - 2y = 0.$$

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ НА ПЛОСКОСТИ

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между ними будет определяться как

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$



Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$.

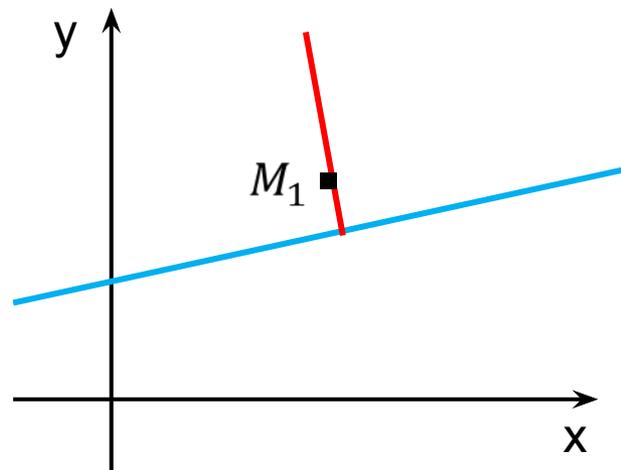
Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Теорема. $Ax + By + C = 0$ и $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то они совпадают. Координаты точки пересечения находятся как решение системы этих уравнений.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ДАННУЮ ТОЧКУ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ДАННОЙ ПРЯМОЙ

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1(x_1, y_1)$ и перпендикулярная к $y = kx + b$ имеет вид:

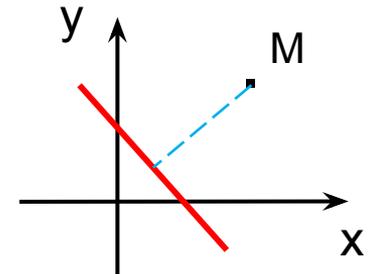
$$y - y_1 = -\frac{1}{k}(x - x_1)$$



РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Теорема. Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то расстояние до $Ax + By + C = 0$ определяется как

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1 :

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (1)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Второе уравнение системы – это линия, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой. Преобразовать первое к виду:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0,$$

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в (1), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Теорема доказана.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Пример. Определить угол между: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

Решение. $k_1 = -3$; $k_2 = 2$; $\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 - (-3)2} \right| = 1$; $\varphi = \pi / 4$.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Пример. Показать, что $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Решение. Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1 * k_2 = -1$, следовательно, они перпендикулярны.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Пример. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти высоту, проведенной из вершины C .

Решение. Находим сторону AB : $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$;

$$4x = 6y - 6; 2x - 3y + 3 = 0; y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомая высота имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$. $k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит

через точку C , то ее координаты удовлетворяют

данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$.

Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

ВЫВОДЫ

- ✓ Любое линейное уравнение является уравнением прямой.
- ✓ Любая прямая задается уравнением первого порядка.
- ✓ По линейному уравнению можно определить взаимное расположение прямых.

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

где $\vec{n}\{A; B\} \perp l$

$$A^2 + B^2 \neq 0$$

$$-C = \vec{n} \cdot \overline{OM}, M \in l$$

Частные случаи:

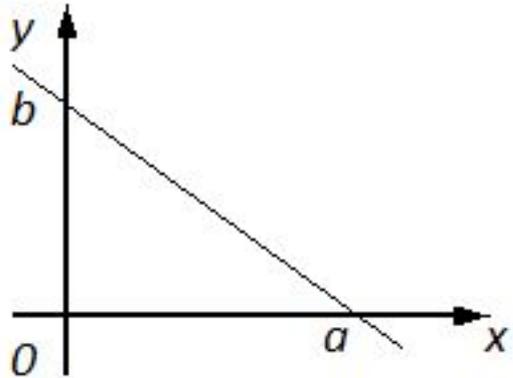
$$1) A = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B} \Rightarrow l \parallel Ox$$

$$2) B = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A} \Rightarrow l \parallel Oy$$

$$3) X = 0 \Rightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow (0; 0) \in l$$

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

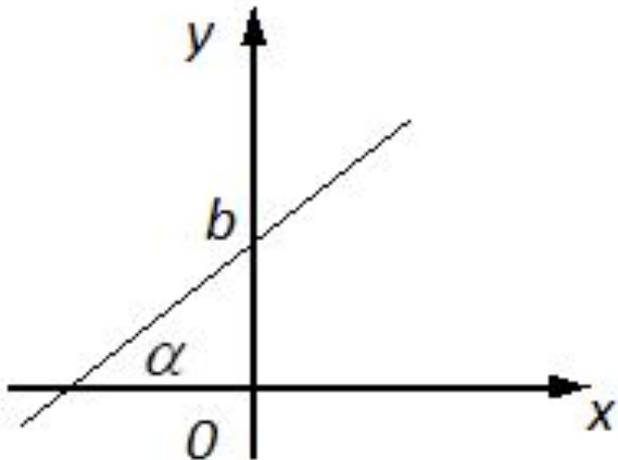
Уравнение прямой «в отрезках»



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

(A, B, C ≠ 0 в общем уравнении прямой)

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



$$y = kx + b, \text{ где } k = \operatorname{tg} \alpha$$

Частные случаи:

1) $(0; 0) \in l \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = kx$

2) $l \parallel Ox \Rightarrow \alpha = 0, k = \operatorname{tg} 0 = 0 \Rightarrow y = b$

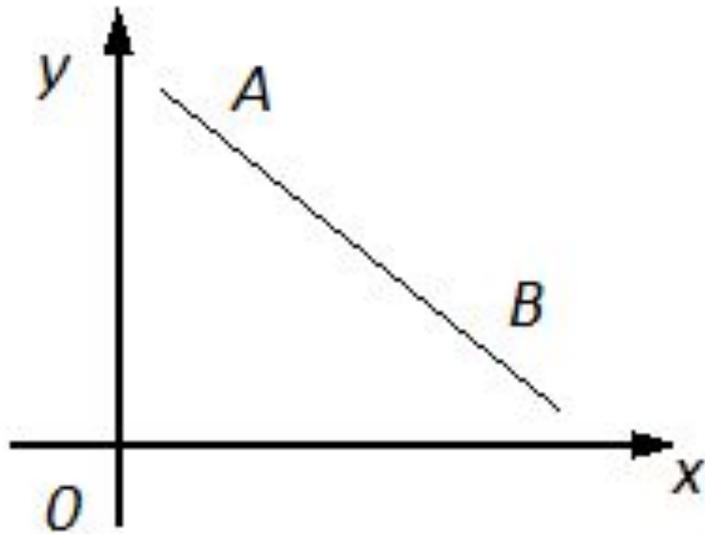
3) $l \parallel Oy \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \text{ не } \exists \Rightarrow y = a$

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ с данным угловым коэффициентом (пучок прямых с центром в точке M)

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$



$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Частные случаи:

1) $x_1 = x_2 \Rightarrow l \parallel Oy \Rightarrow x = x_1$

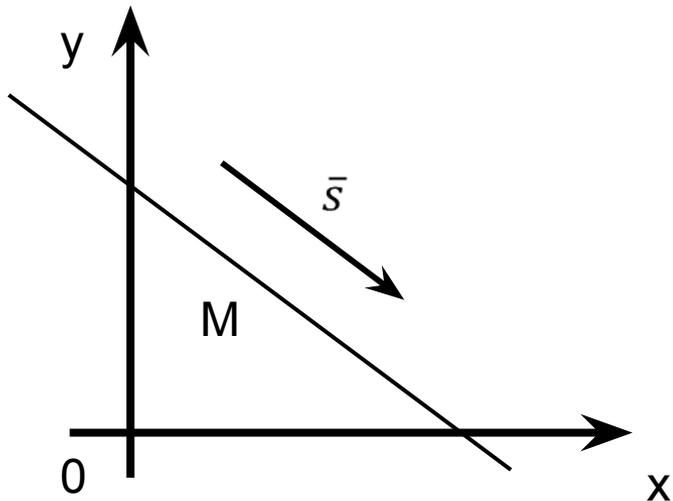
2) $y_1 = y_2 \Rightarrow l \parallel Ox \Rightarrow y = y_1$

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases}$$

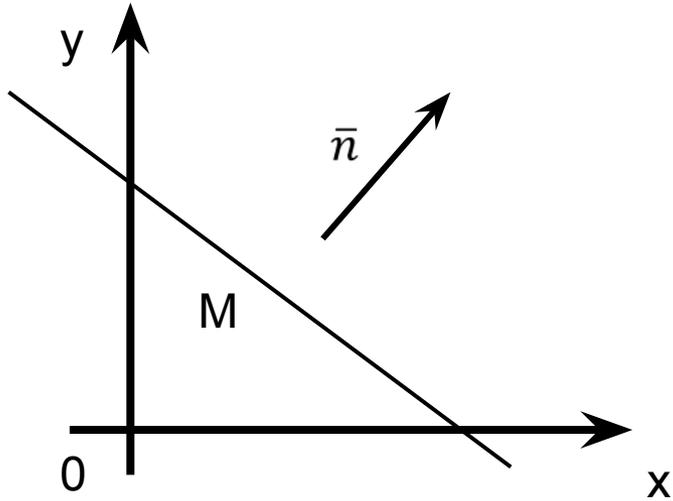
Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s}\{m; n\}$



$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\bar{n}\{A; B\}$



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

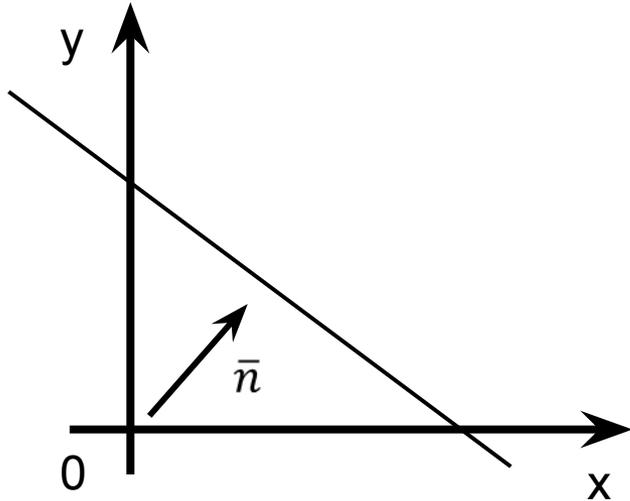
Уравнение прямой в нормальном виде

$$Ax + By = p,$$

где $A^2 + B^2 = 1$,

$p \geq 0$ - расстояние от начала координат до прямой,

$\vec{n}\{A; B\}$ - единичный нормальный вектор, направленный от начала координат в сторону прямой (или в любую сторону, если прямая проходит через начало координат)



Для перехода от общего уравнения к нормальному необходимо умножить общее уравнение

на нормирующий множитель $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

знак которого противоположен знаку коэффициента C из общего уравнения.

Спасибо за внимание