

# Система сходящихся сил

Занятие №1

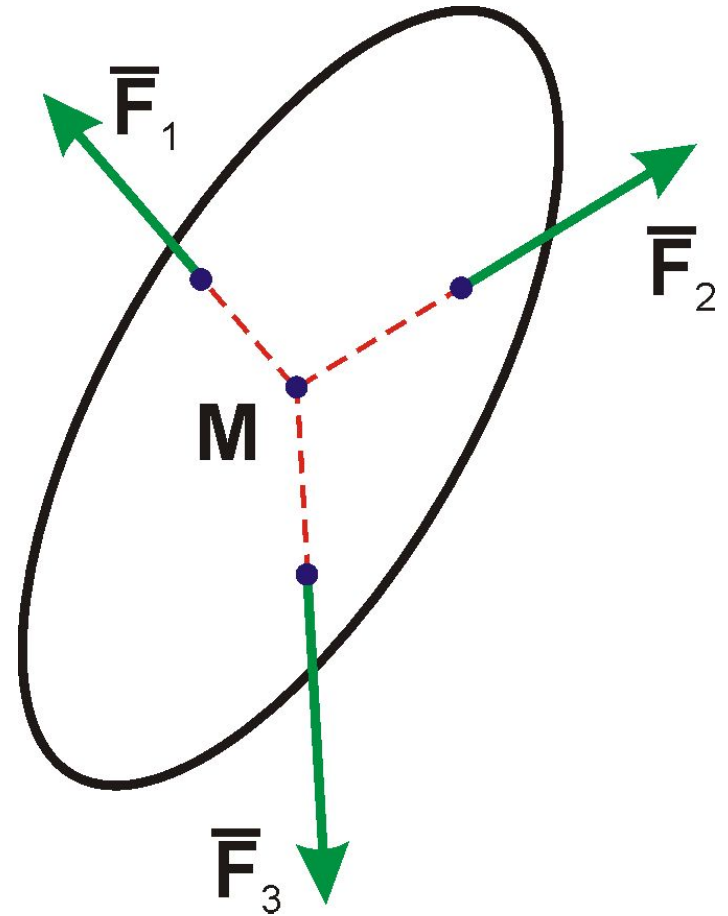
# Основные понятия статики

- Совокупность сил, приложенных к какой-либо механической системе, называется системой сил.
- Две равные по модулю силы, приложенные в какой-либо одной точке тела и направленные в противоположные стороны, дают равнодействующую, равную нулю. Поэтому такая система сил называется эквивалентной нулю.
- Аксиома 1. Система двух равных по модулю сил, приложенных в двух точках абсолютно твердого тела и направленных по соединяющей эти точки прямой в противоположные стороны, находится в равновесии.
- Аксиома 2. Действие какой-либо системы сил не нарушится, если в ней прибавить или от нее отнять систему сил, эквивалентную нулю.

## Аксиома отвердевания:

- *Равновесие любой механической системы не нарушается от наложения новых связей, в частности, оно не нарушается при внезапном превращении системы в абсолютно твердое тело.*

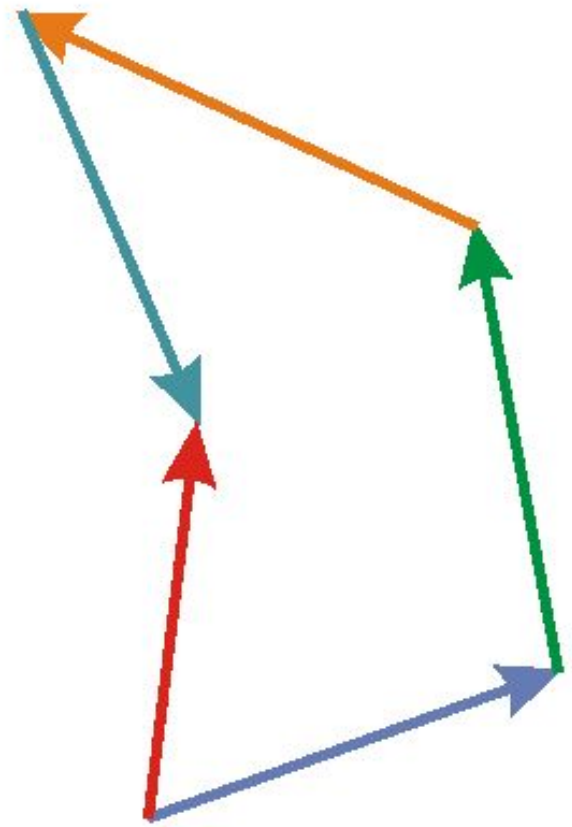
- Одной из простейших систем сил является система, все силы которой приложены в одной точке.
- Такая система сил имеет равнодействующую, равную геометрической сумме сил.
- К этому же случаю сводится и всякая система т.н. сходящихся сил, т.е. сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.



Система может быть заменена равнодействующей:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

- Простейший способ нахождения векторной суммы – сложение векторов по правилу многоугольника
- Полученная таким образом ломаная линия в случае сложения сил называется силовым многоугольником.
- Сумма представляет собой вектор, начало которого находится в начале первого вектора, а конец – в конце последнего.



- Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

- При равновесии системы сходящихся сил **силовой многоугольник должен быть замкнутым.**

- В проекциях на оси координат условие равновесия дает три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n Z_i = 0$$

- Если сходящиеся силы расположены в одной плоскости, то число уравнений равновесия сокращается до двух.
- Задачи статики, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, называются статически определенными. В противном случае задачи являются статически неопределимыми и для их решения необходимо привлекать дополнительные соотношения
- Для того, чтобы задачи на равновесие тел, находящихся под действием сходящихся сил, были статически определенными, число неизвестных в общем случае не должно превышать трех, а когда силы лежат в одной плоскости - двух.

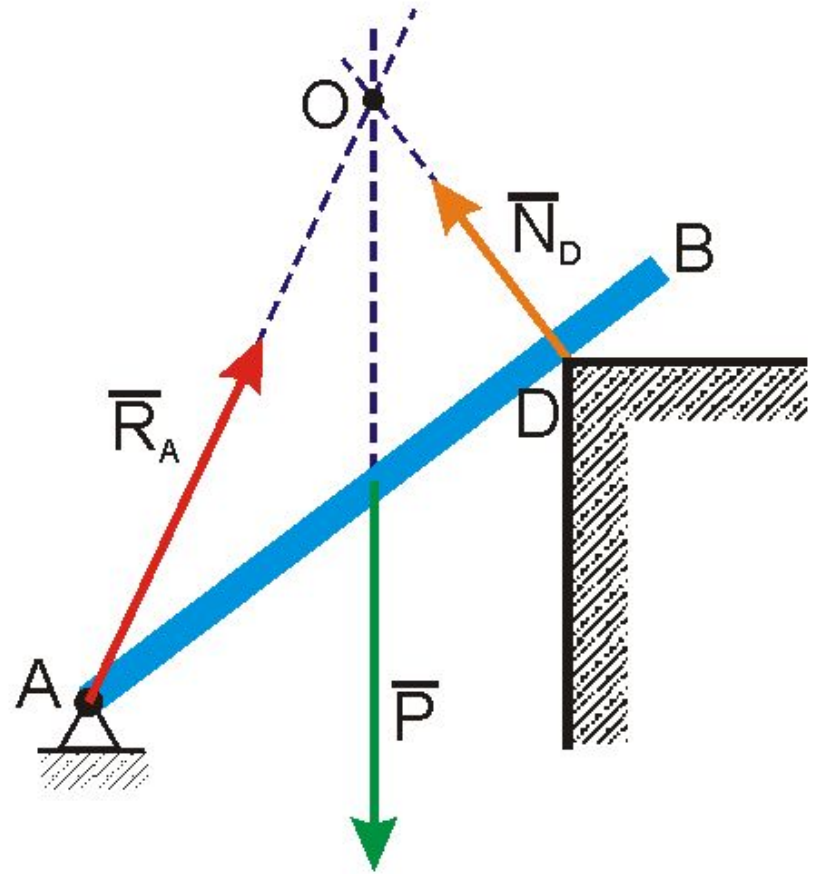
• Для решения задач крайне полезной оказывается теорема о трех силах:

*Если под действием трех сил, лежащих в одной плоскости, твердое тело находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

• Данная теорема часто используется в случаях, когда какое-либо тело находится под действием плоской системы трех сил, и надо найти направление одной из них.

# Пример

- Однородный брус АВ весом  $P$ .  
Конец А закреплен шарниром, в точке D подставлен уступ.
- Брус находится под действием трех сил:
- силы тяжести  $P$ , приложенной в его центре и направленной вертикально вниз
- реакции опоры D  $N_D$ , направленной перпендикулярно брусу
- реакции шарнира  $R_A$



Чтобы найти направление реакции  $R_A$ , строят точку пересечения сил  $P$  и  $N_D$  – это точка O.

На основании теоремы о трех силах, вектор  $R_A$  должен лежать на прямой AO.

# Порядок решения задач на равновесие плоской системы сходящихся сил

- изобразить все силы, действующие на тело, включая реакции опор и связей;
- если число сил равно трем – изобразить их в виде замкнутого треугольника, из которого чисто геометрическими соображениями найти неизвестные величины;
- если число сил больше трех – составить систему уравнений равновесия (через проекции сил) и решить ее. При этом систему координат следует выбирать таким образом, чтобы получившаяся система была как можно проще.

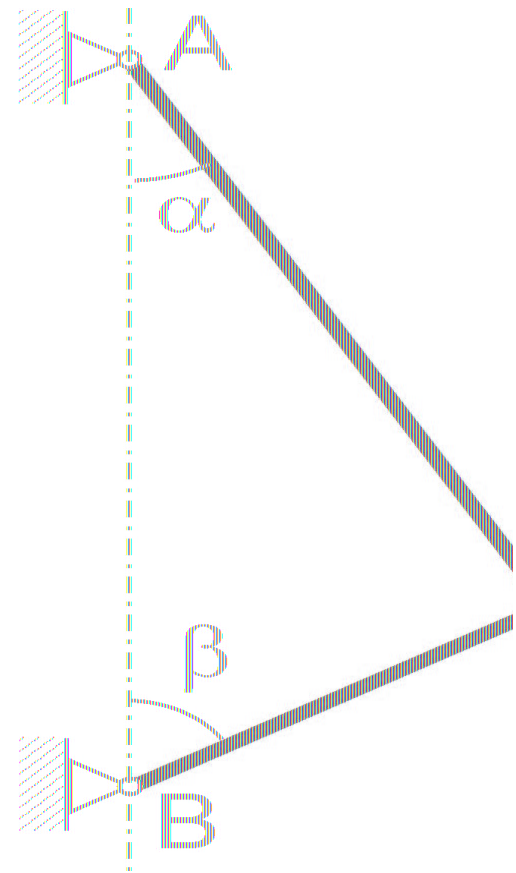


# **Примеры решения задач**

# Задача №1

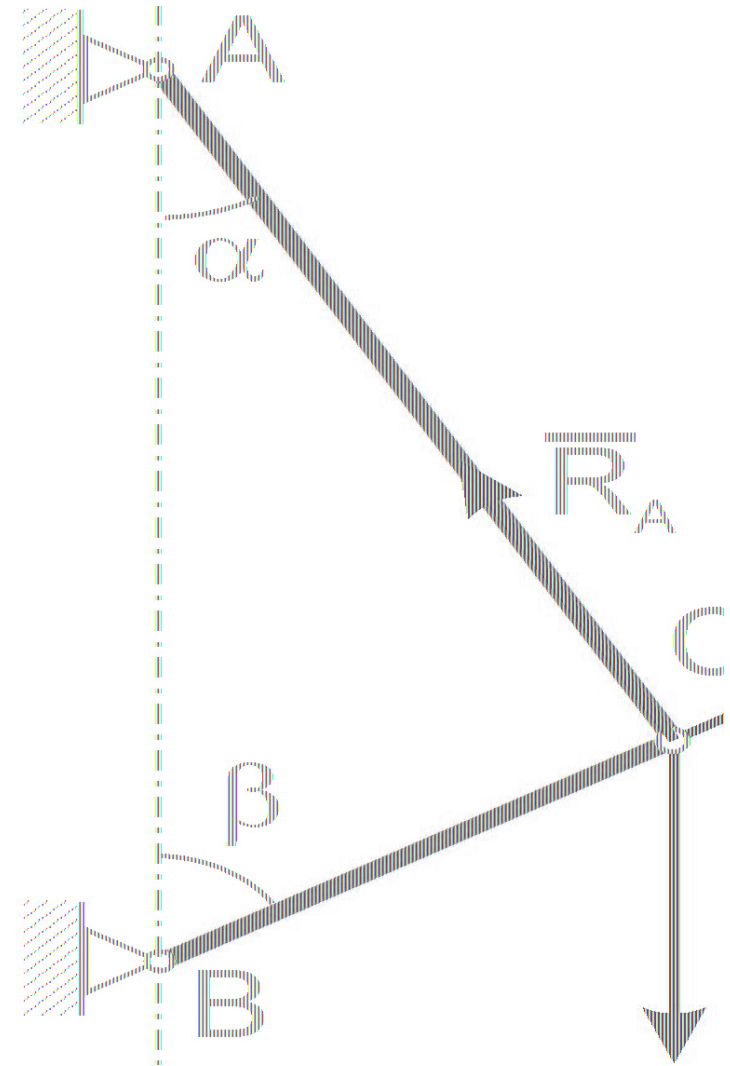
*Стержни  $AC$  и  $BC$  соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт  $C$  действует вертикальная сила  $P = 1000 \text{ Н}$ .*

*Определить реакции этих стержней на шарнирный болт  $C$  если углы, составляемые стержнями со стеной, равны:  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$*

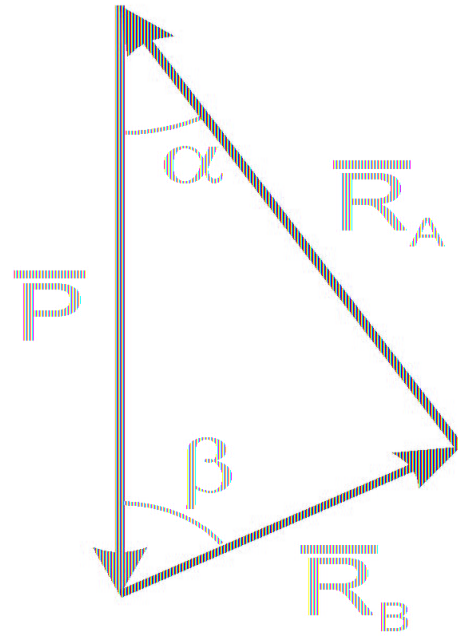
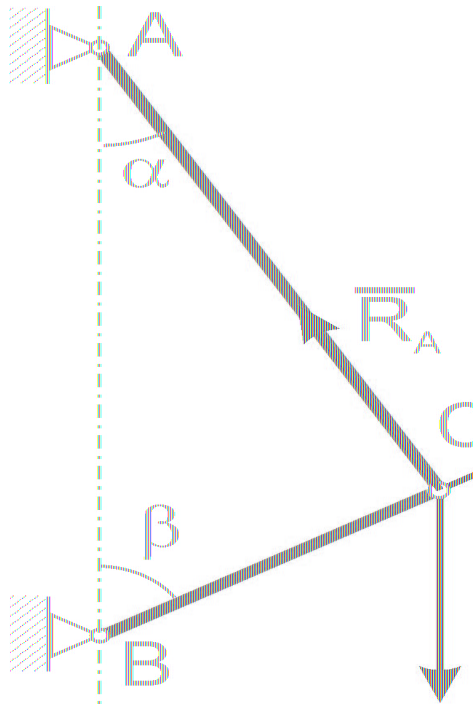


## Силы, действующие на шарнир С:

- сила  $P$ , приложенная в точке С и направленная вертикально вниз,
- реакция стержня ВС  $R_B$ , направленная вдоль стержня и не дающая точке С приблизиться к стене
- реакция стержня АС  $R_A$ , направленная вдоль стержня и не дающая точке С опуститься вниз.



После определения направления сил строится силовой треугольник с соблюдением углов между силами.



Сначала строится вектор известной силы (в этой задаче –  $\mathbf{P}$ )

Через конец вектора  $\mathbf{P}$  проводится пунктирная линия, параллельная любой из неизвестных сил (в данном случае –  $\mathbf{R}_B$ )

Через начало вектора  $\mathbf{P}$  проводится пунктирная линия, параллельная оставшейся из неизвестных сил (в данном случае –  $\mathbf{R}_A$ )

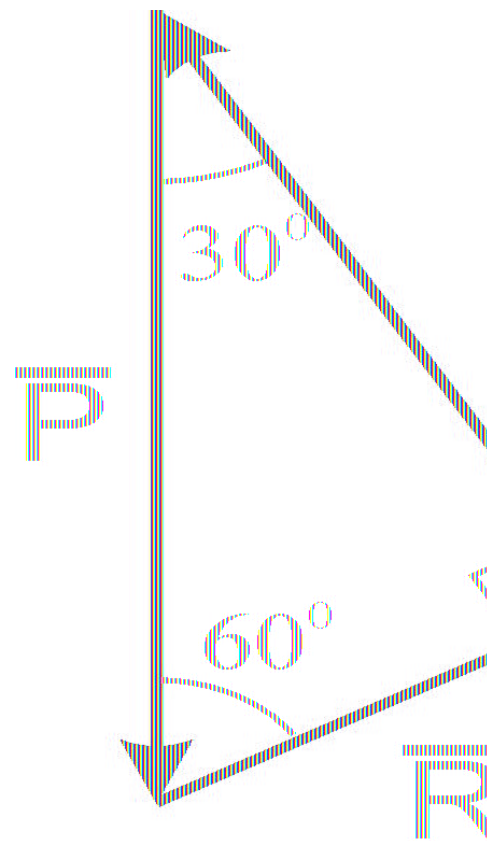
Пунктирные стороны получившегося треугольника заменяются векторами неизвестных сил

Из-за значений углов треугольник  
получился прямоугольным.

Поэтому

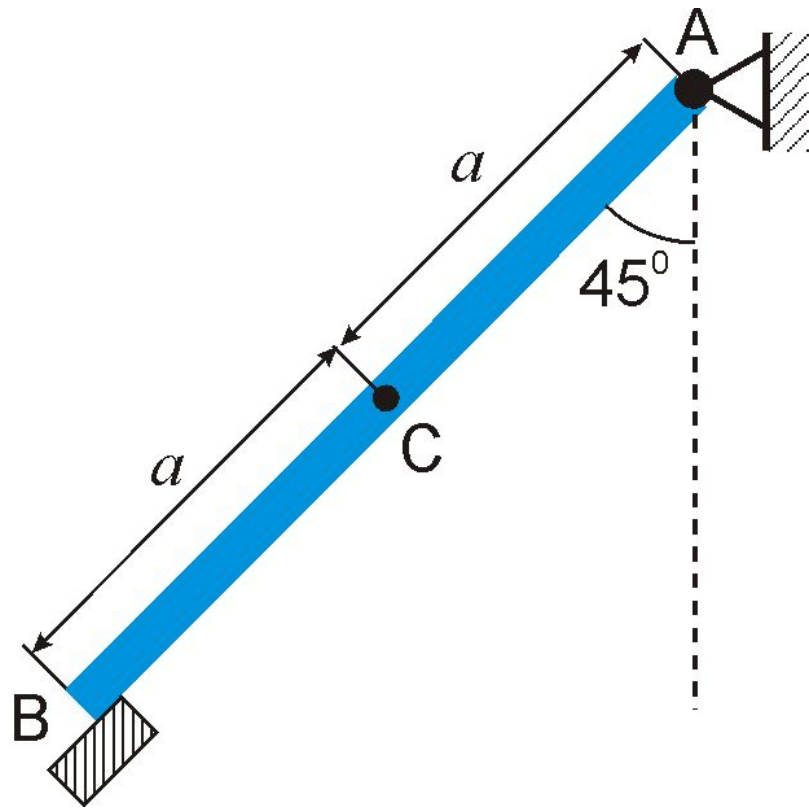
$$R_B = \frac{P}{2} = 500 \text{ Н}$$

$$R_A = P \frac{\sqrt{3}}{2} = 866 \text{ Н}$$



## Задача №2

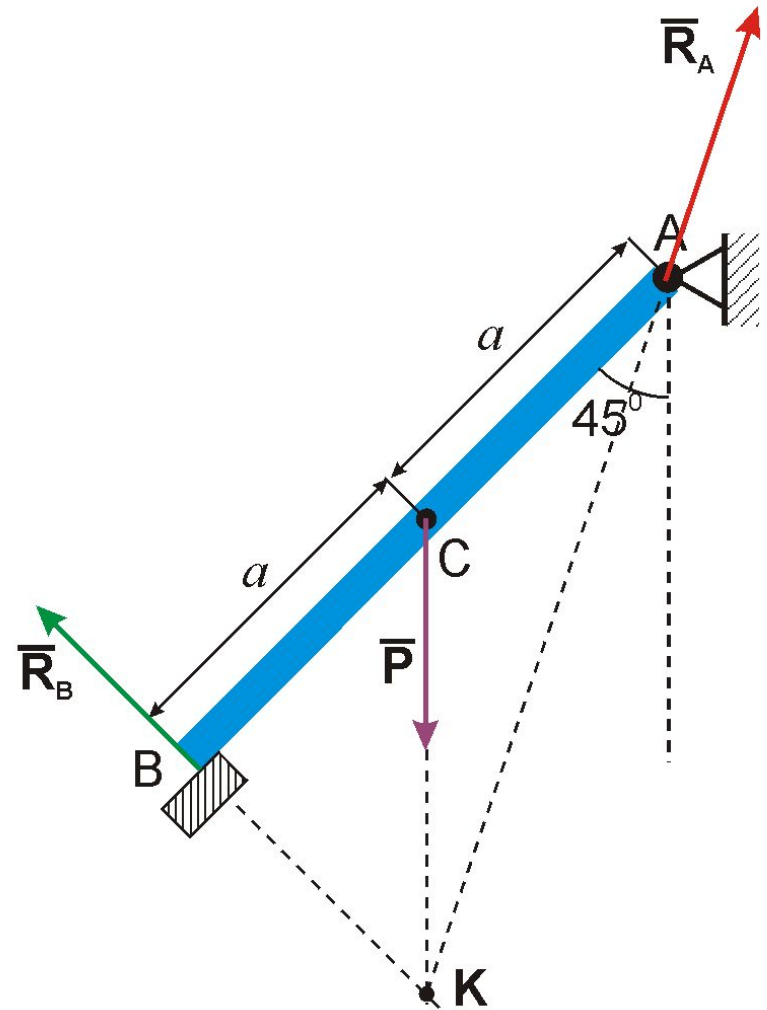
Оконная рама  $AB$ , изображенная в разрезе, может вращаться вокруг горизонтальной оси шарнира  $A$  и своим нижним краем  $B$  свободно опирается на уступ паза. Найти реакции опор, если дано, что вес рамы, равный  $89\text{ Н}$ , приложен к середине  $C$  рамы, и угол между рамой и вертикалью равен  $45^\circ$

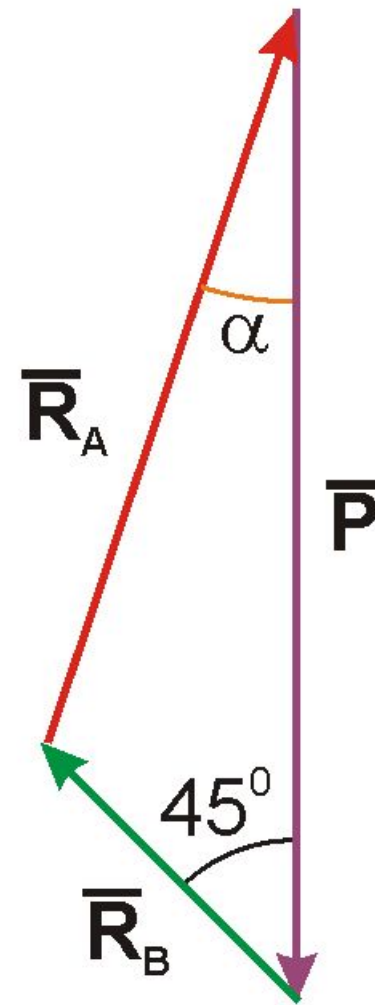
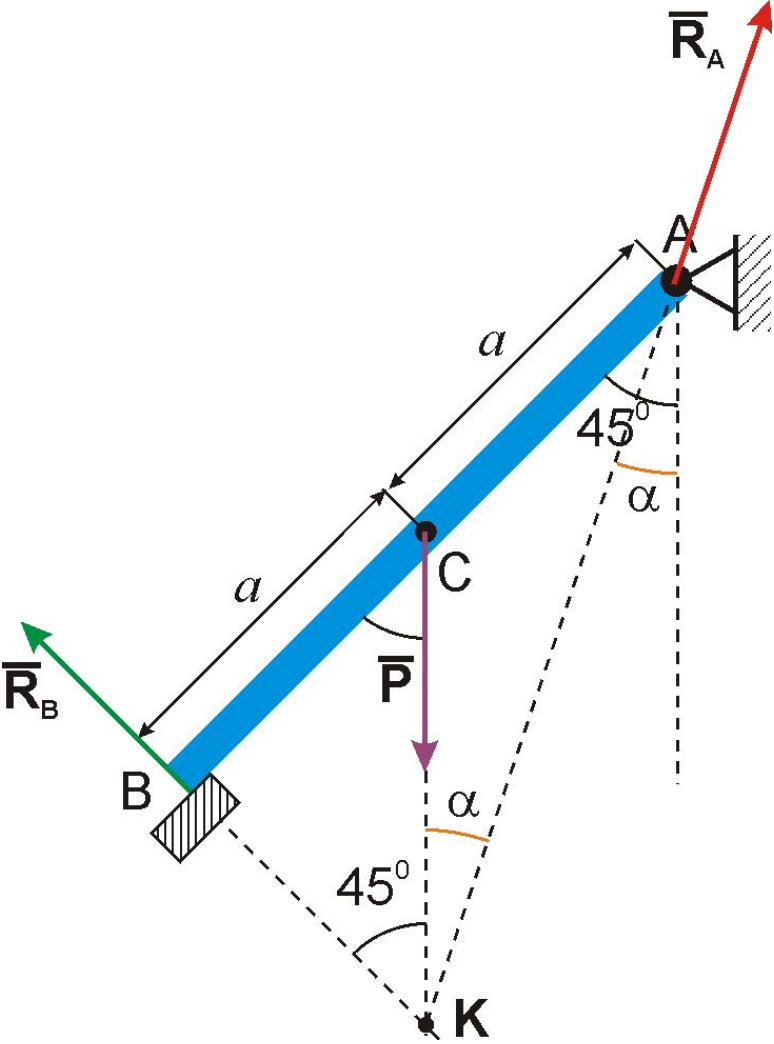


Силы, действующие на раму:

- вес рамы  $\mathbf{P}$ , приложенный в точку  $C$  и направленный вертикально вниз,
- реакция уступа  $B$   $\mathbf{R}_B$ , направленная вверх перпендикулярно раме  $AB$ ,
- реакция шарнира  $A$   $\mathbf{R}_A$ , направленная вверх по направлению, которое необходимо определить.

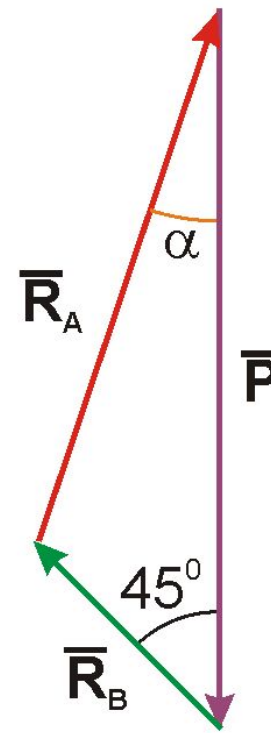
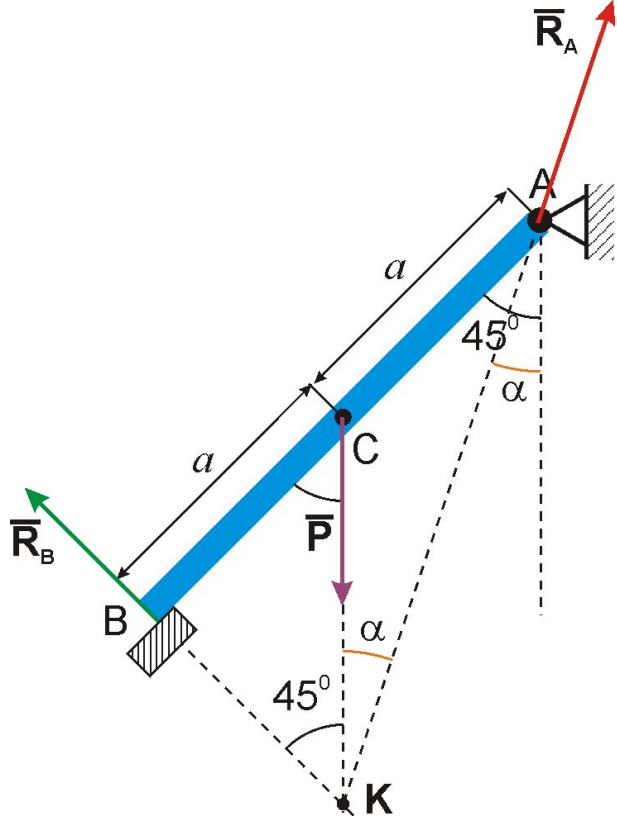
Для определения направления реакции шарнира  $A$  используется теорема о трех силах, согласно которой линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке





- После определения направления сил строится силовой треугольник с соблюдением углов между силами.





- Угол  $\alpha$  определяется из  $\Delta ACK$  по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{CK}{\sin \angle CAK}$$

- Из рисунка видно:

$$AC = a; CK = a\sqrt{2}; \angle CAK = 45^\circ - \alpha$$

- После подстановки в теорему синусов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin(45^\circ - \alpha)}$$

откуда

$$\sqrt{2} \cdot \sin \alpha = \sin(45^\circ - \alpha)$$

## Решение уравнения

$$\sqrt{2} \sin \alpha = \sin(45^\circ - \alpha)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha = \cos \alpha - \sin \alpha$$

$$3 \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}; \quad \alpha \approx 18,5^\circ$$

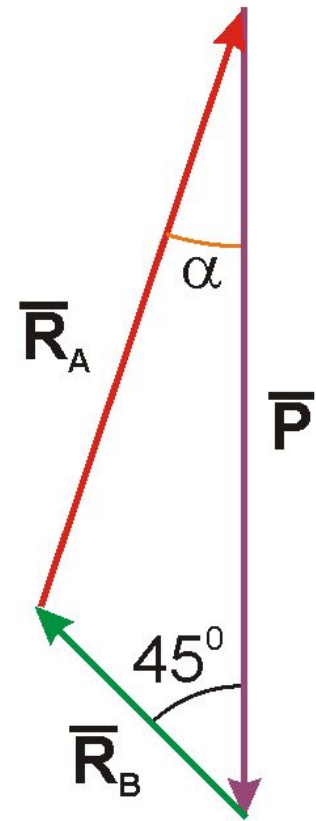
# Применяем теорему синусов к силовому треугольнику:

$$\frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{R_B}{\sin 18,5^\circ} = \frac{P}{\sin 116,5^\circ}$$

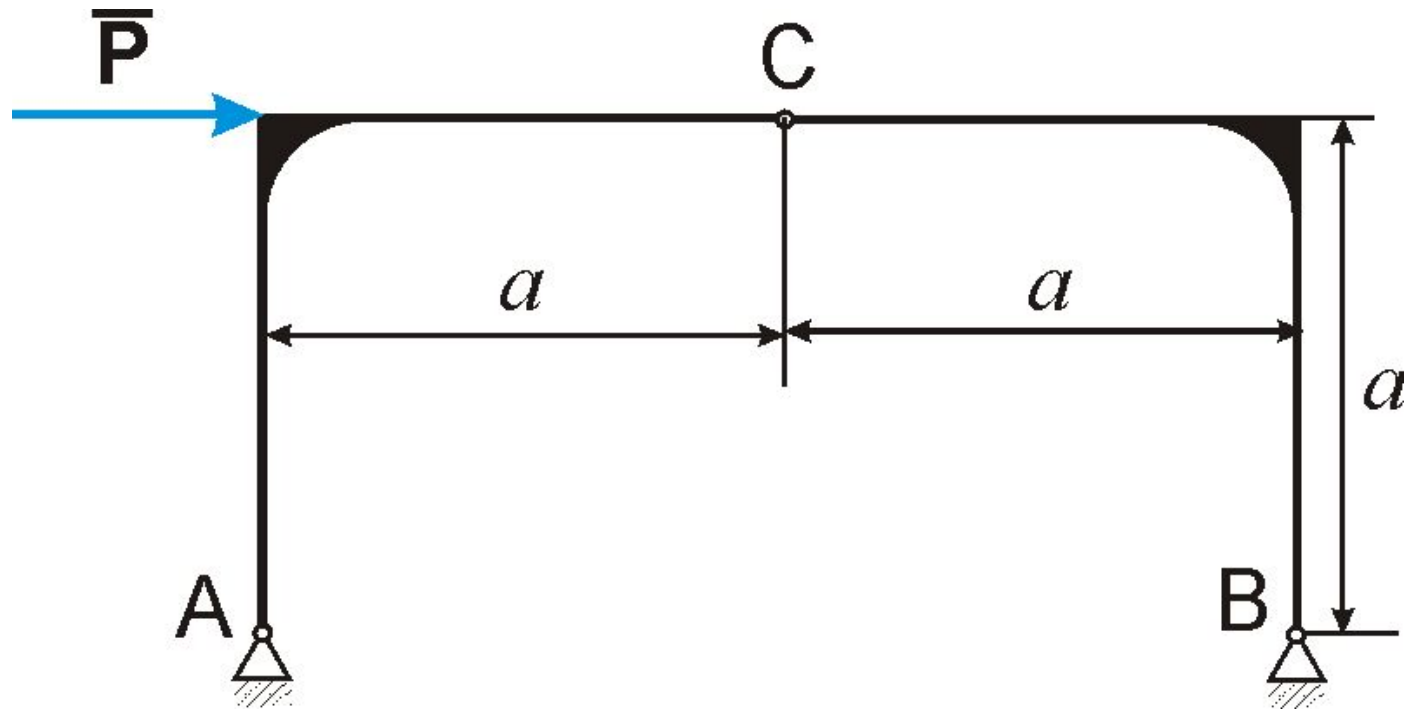
откуда

$$\frac{R_A}{\sin 45^\circ} = \frac{89}{\sin 116,5^\circ}; R_A = 89 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 116,5^\circ} \approx 70,4 \text{ Н}$$

$$\frac{R_B}{\sin 18,5^\circ} = \frac{89}{\sin 116,5^\circ}; R_B = 89 \cdot \frac{\sin 18,5^\circ}{\sin 116,5^\circ} \approx 31,5 \text{ Н}$$

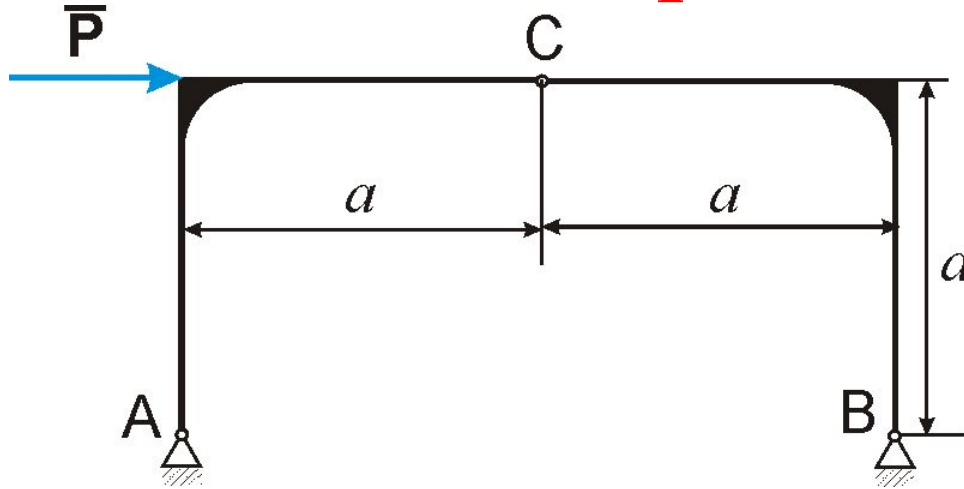


## Задача №3



*Для трехшарнирной арки, показанной на рисунке, определить реакции опор A и B, возникающие при действии горизонтальной силы  $P$ . Весом арки пренебречь.*

# Общий метод решения подобных задач



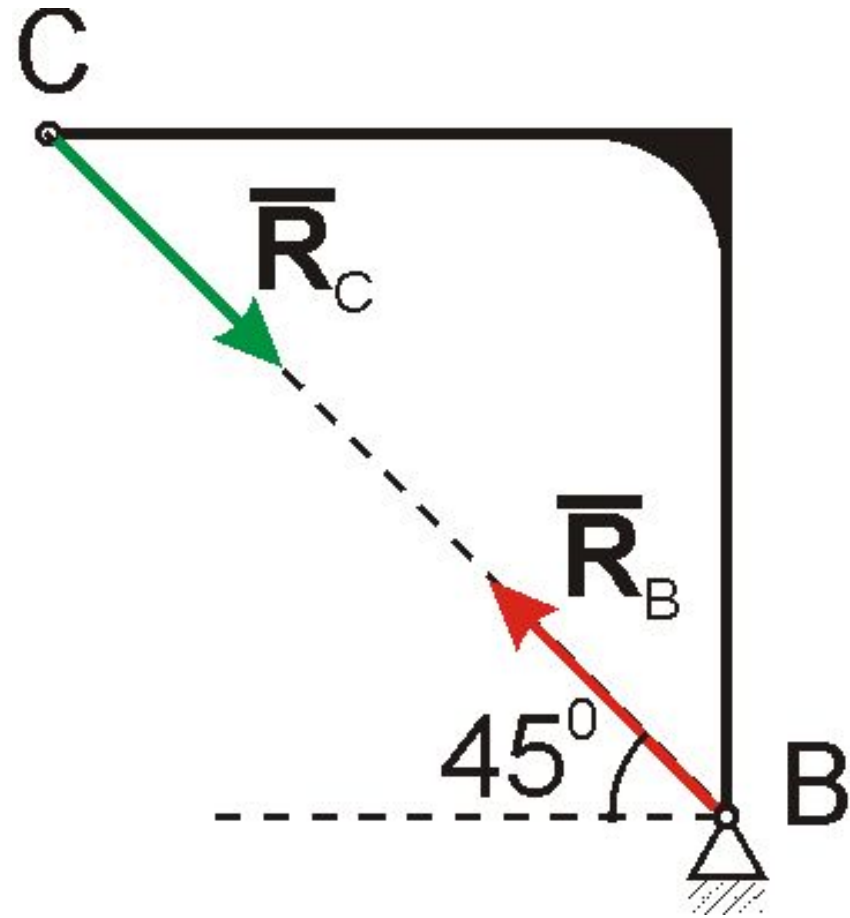
- Систему тел разделяют на отдельные элементы (тела) и для каждого составляют уравнения равновесия. При этом влияние тел друг на друга учитывают через силы, действующие в местах разделения системы.

- В рассматриваемой задаче арка разделяется на две полуарки: левая AC и правая BC.
- На левую часть действуют три силы: горизонтальная сила  $P$ , реакция шарнира A и сила, с которой на эту часть действует полуарка BC.
- На правую часть (полуарку BC) действуют всего две силы: сила реакции в шарнире B и сила, с которой на нее действует левая полуарка AC.

- На основании первой аксиомы силы, действующие на правую полуарку, должны быть направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и равны друг другу

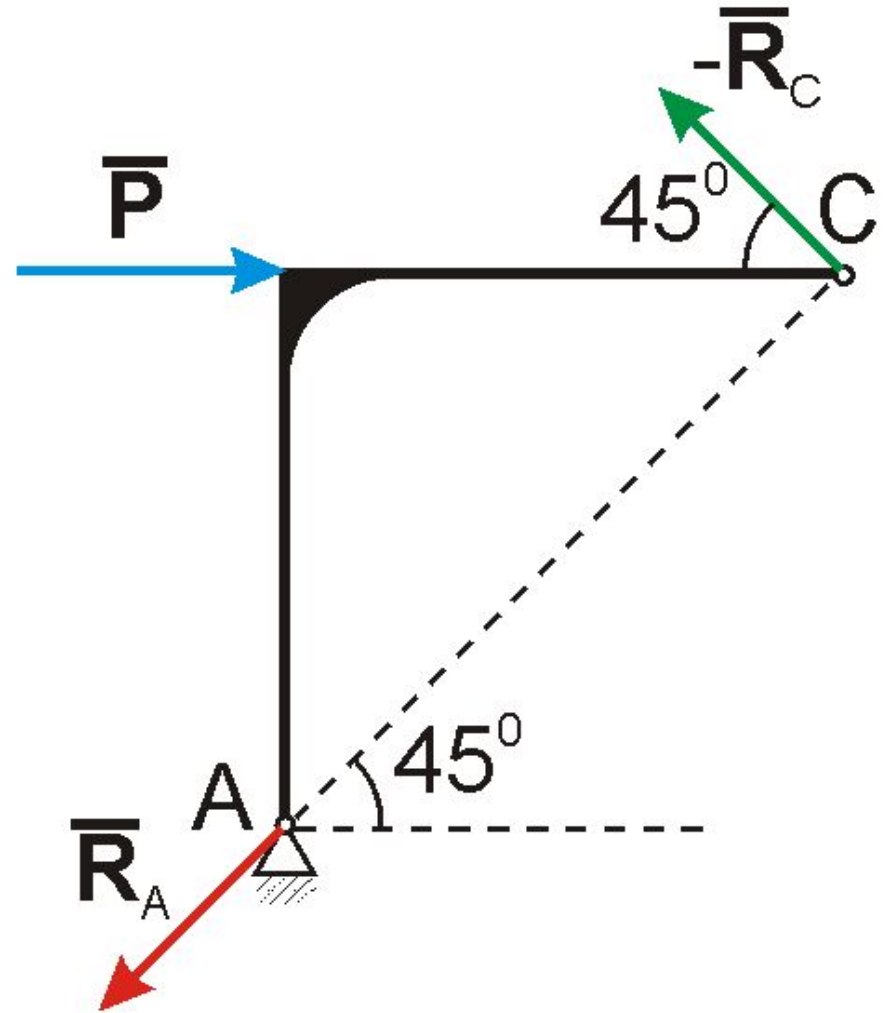
- $R_C = R_B$ ;

- Угол, под которым они направлены к горизонту, равен  $45^\circ$ .



# Силы, действующие на левую полуарку

- Сила  $\bar{P}$
- Сила со стороны правой полуарки
- Согласно третьему закону Ньютона, эта сила равна по модулю и противоположна по направлению силе  $\mathbf{R}_C$
- Сила  $\mathbf{R}_A$
- Направление силы  $\mathbf{R}_A$  определяется по теореме о трех силах.



- Для определения величин сил составляется силовой треугольник

- Из него видно, что

$$R_A = R_C = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

- Возвращаясь к правой полуарке, определяем  $R_B$ :

$$R_B = R_C = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

