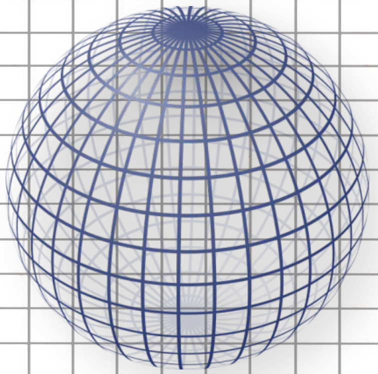
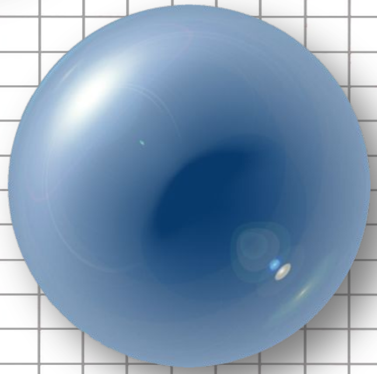
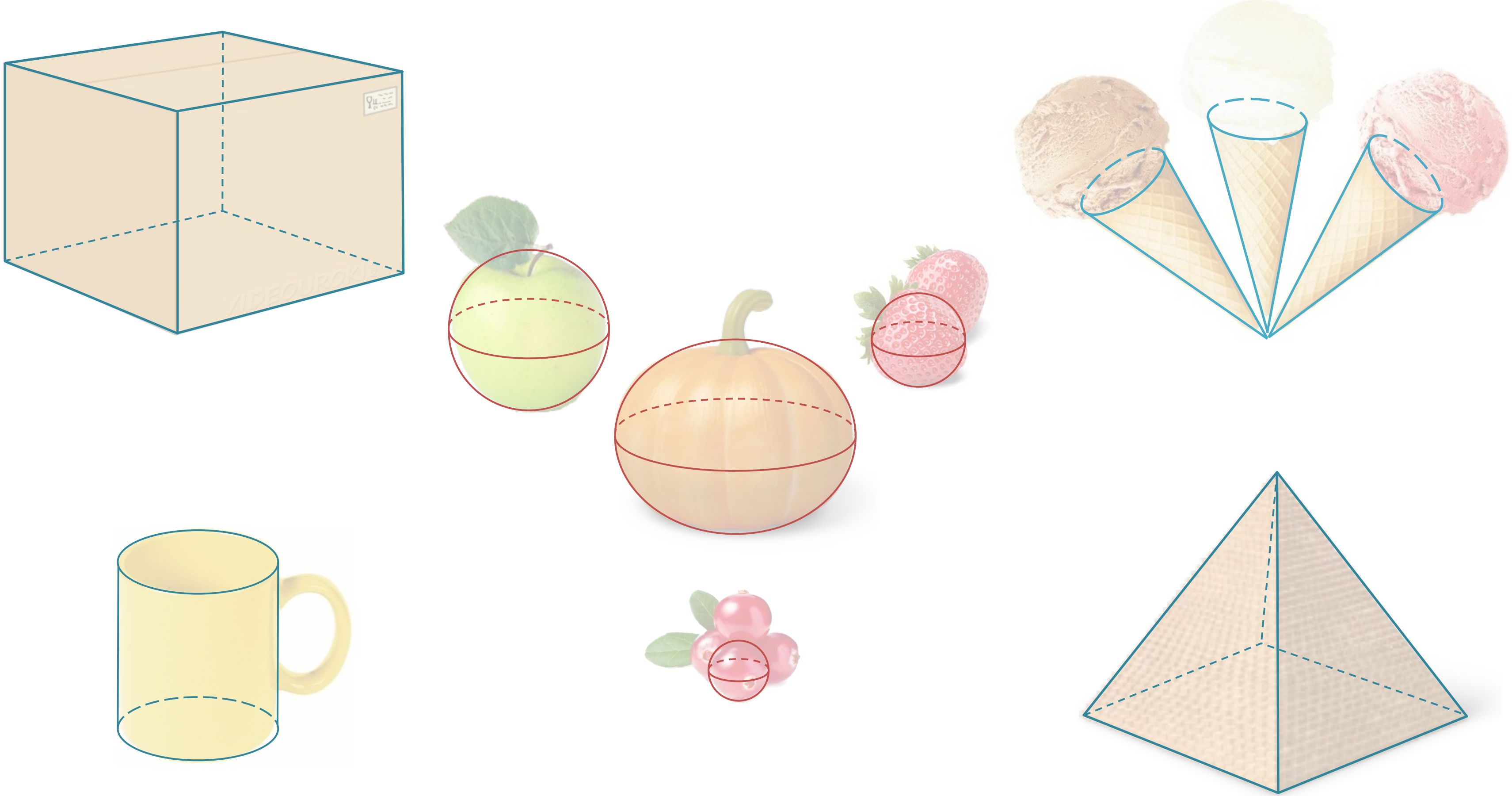
Сфера и шар. Уравнение сферы

Сегодня на уроке:

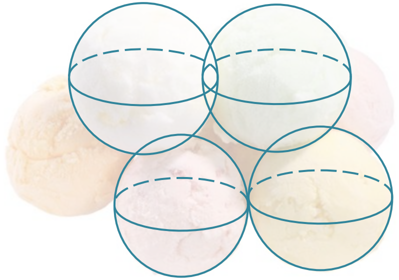




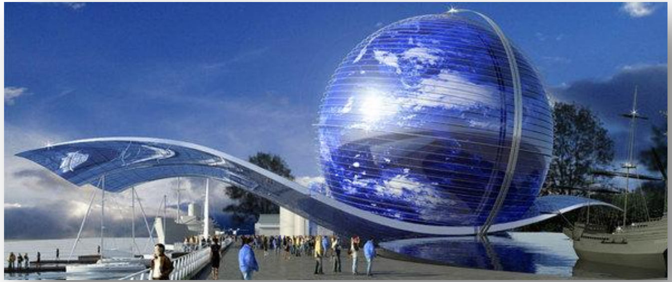
- ✔ Сфера и шар
- ✔ Определения сферы и шара
- ✔ Элементы сферы и шара
- ✓ *Уравнение сферы радиуса R с центром $C\,(x, y, z)$*

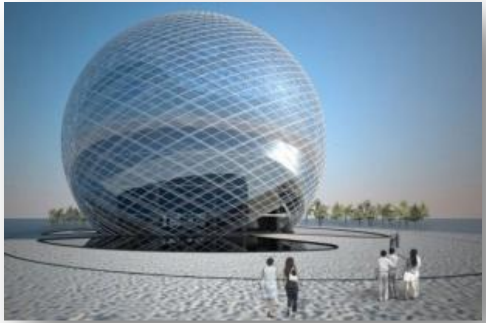


Шар – это геометрическое тело.



Шар



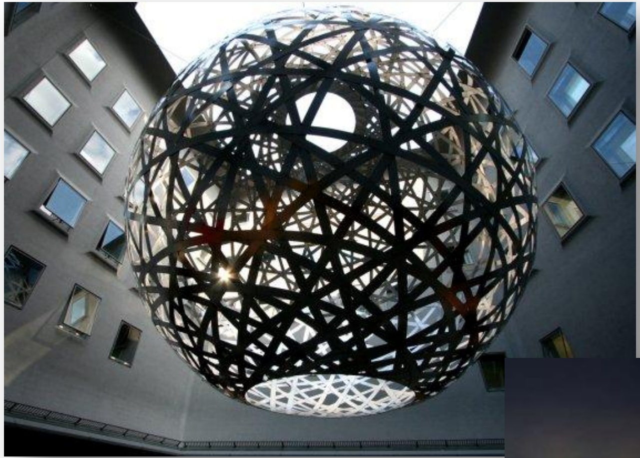


Шар

Поверхность шара называют сферой.

Сфера

Сфера

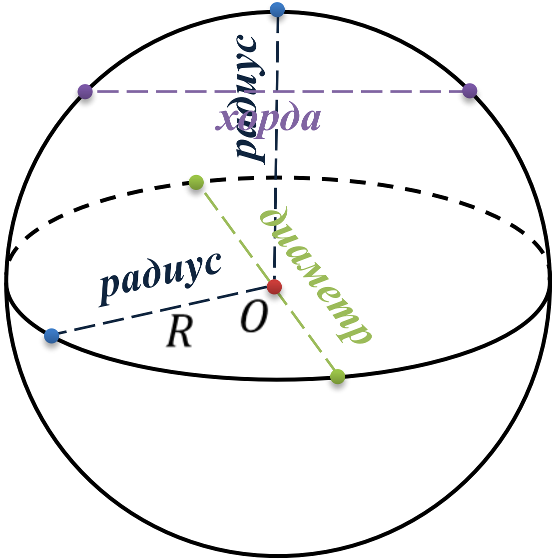


Шар и сфера

сфера

шар

Определение. ***Сферой*** называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.



Основные элементы сферы:

Данная точка называется ***центром*** сферы.

Данное расстояние – ***радиусом*** сферы.

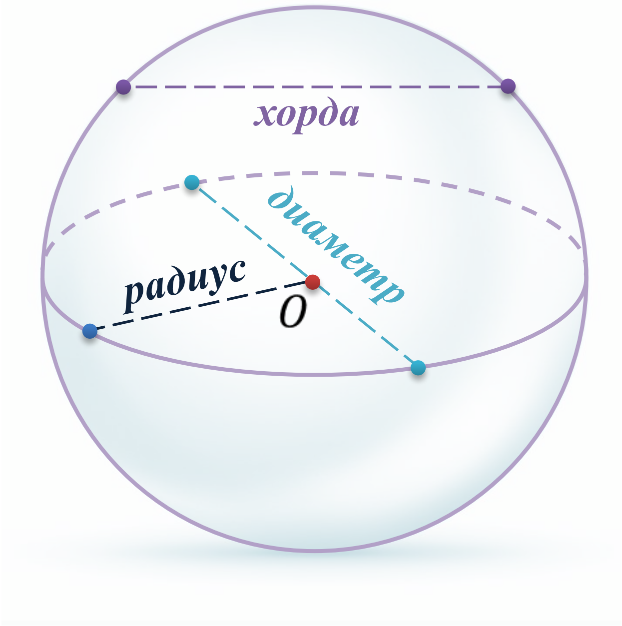
Любой отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо ее точкой, также называется ***радиусом*** сферы.

Хордой сферы называется отрезок, соединяющий две точки сферы.

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется ***диаметром*** сферы.

$$\boldsymbol{D = 2R}$$

Определение. ***Шар*** – это совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше заданного.



Основные элементы шара:

Отрезок, соединяющий любую точку сферы с центром шара, называется ***радиусом*** шара.

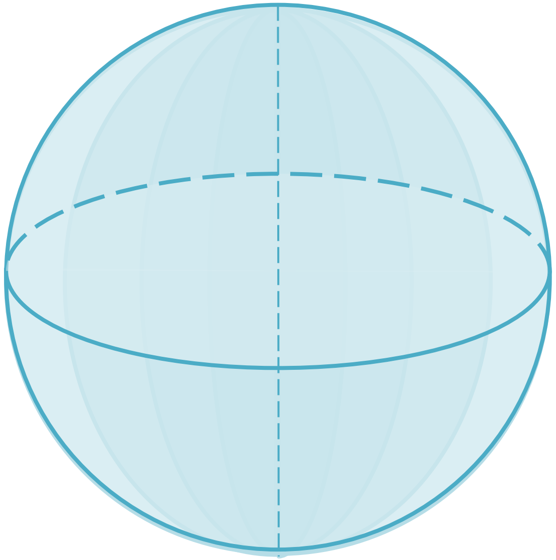
Отрезок, соединяющий две точки сферы называется ***хордой*** шара.

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр шара, называется ***диаметром*** шара.

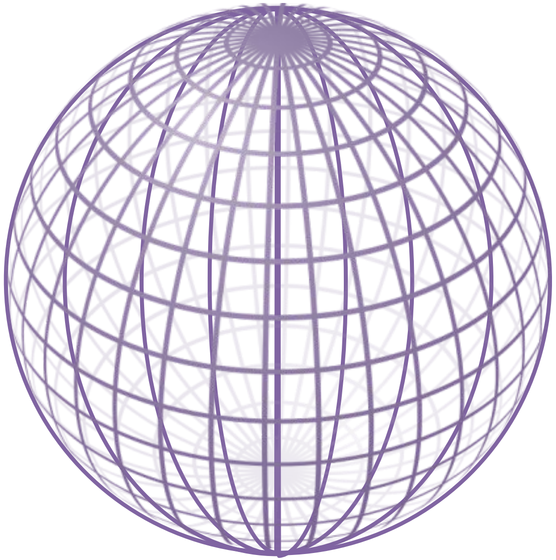
$$D = 2R$$

Все точки поверхности шара одинаково удалены от центра шара.

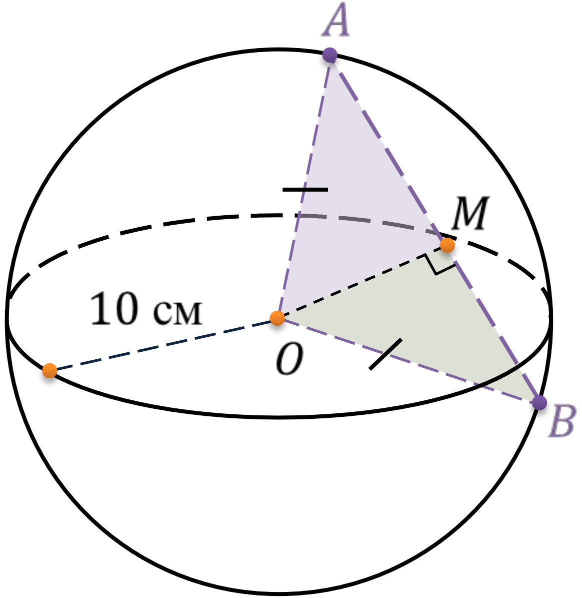
Шар может быть получен *путем вращения полукруга* вокруг его диаметра.



Сфера образуется *в результате вращения полуокружности* вокруг ее диаметра.



Задача. Отрезок AB – хорда сферы, не проходящая через центр сферы O. Вычислите расстояние от центра сферы до середины хорды AB, если радиус сферы равен 10 см, а длина хорды AB равна 16 см.



Решение.

Рассмотрим ΔAOB.

ΔAOB – равнобедренный.

$OA = OB = R = 10$ (см)

Рассмотрим ΔOBM.

ΔOBM – прямоугольный.

$MB = \frac{1}{2}AB = 8$ (см)

$OM = \sqrt{OB^2 - MB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см)

Ответ: 6 см.

Уравнение с тремя переменными x, y, z называется ***уравнением поверхности F***, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности F и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к ненулевому вектору $\vec{n}\{a, b, c\}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

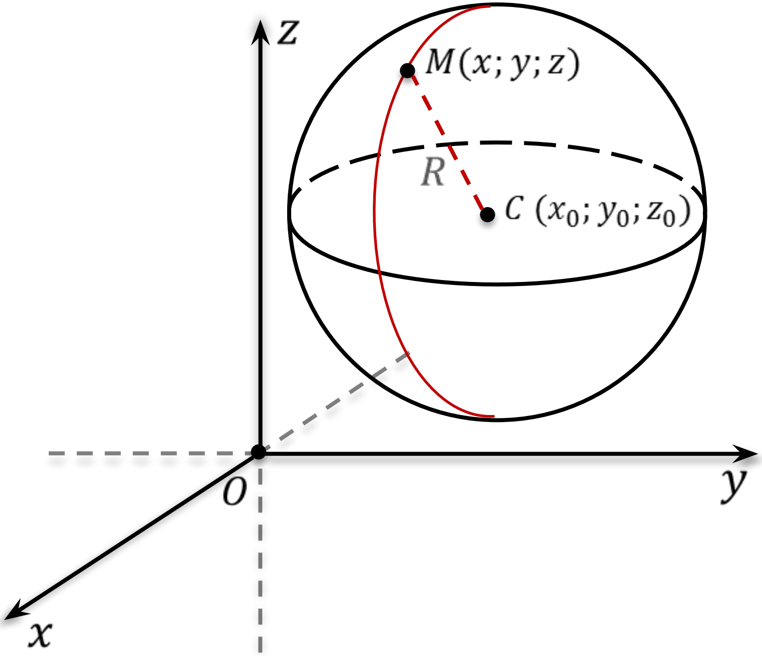
$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

Выведем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C\ (x_0; y_0; z_0)$.

Расстояние от произвольной точки $M(x; y; z)$ до точки $C(x_0; y_0; z_0)$ вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$



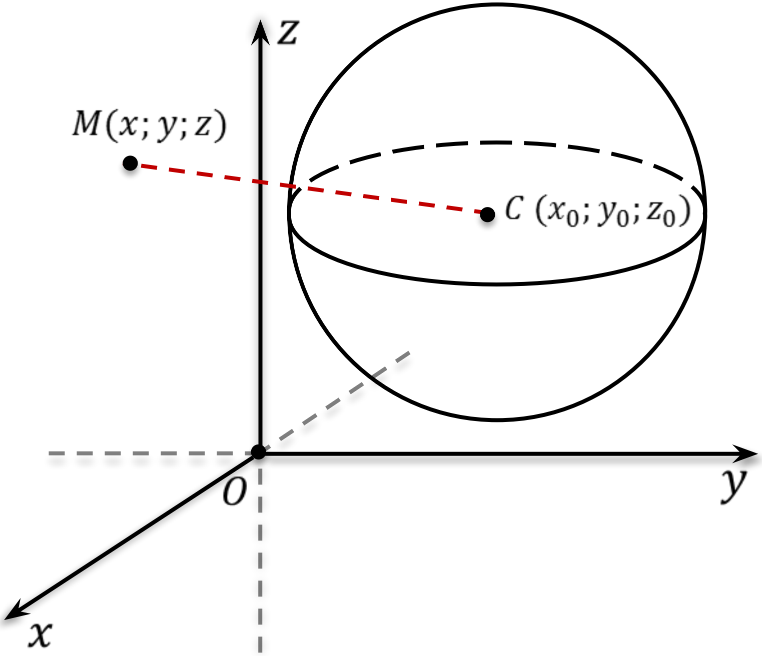
Если точка M лежит на данной сфере, то расстояние $MC = R$, или $MC^2 = R^2$, т.е. координаты точки M *удовлетворяют уравнению*:

$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}$$

Выведем уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C\ (x_0; y_0; z_0)$.

Расстояние от произвольной точки $M(x; y; z)$ до точки $C(x_0; y_0; z_0)$ вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$



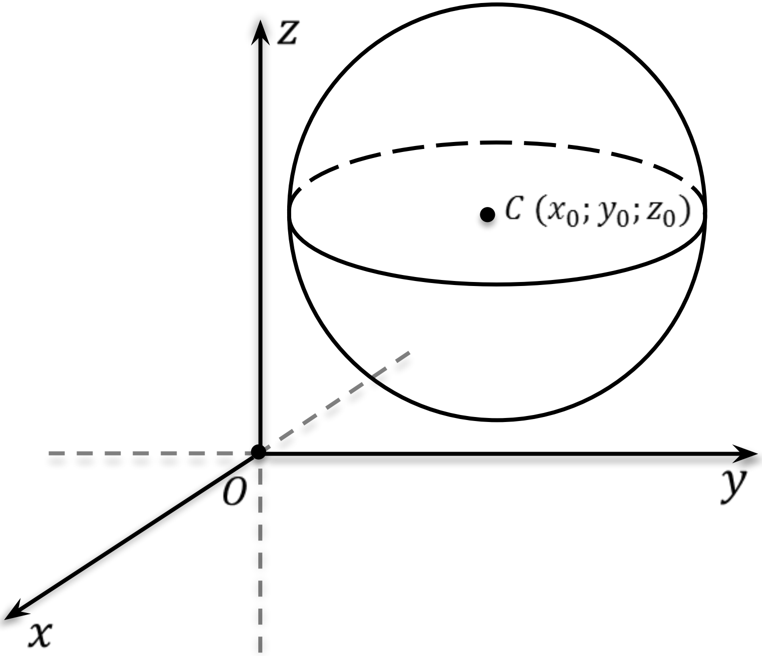
Если точка M лежит на данной сфере, то расстояние $MC = R$, или $MC^2 = R^2$, т.е. координаты точки M *удовлетворяют уравнению*:

$$\boxed{\mathbf{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}}$$

Если же точка $M(x; y; z)$ не лежит на данной сфере, то расстояние $MC \neq R$, или $MC^2 \neq R^2$, т.е. координаты точки M *не удовлетворяют уравнению сферы*.

В прямоугольной системе координат ***уравнение сферы*** радиуса R с центром в точке $C\ (x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$



Если уравнение относительно прямоугольных координат

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+E=0$$

определяет поверхность в пространстве, то ею является ***сфера***.

Задача. Напишите уравнение сферы с центром в точке $S(\mathbf{1}; \mathbf{3}; \mathbf{5})$ радиусом равным $\mathbf{4}$ см.

Решение.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)^2+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)^2=\boldsymbol{R}^2$$

$$(x-\quad)^2+(y-\quad)^2+(z-\quad)^2=\quad^2$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=16$$

Ответ: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=16.$

Задача. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: $(x - \mathbf{2})^2 + (y + \mathbf{1})^2 + z^2 = 4$.

Решение.

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0)^2 + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^2 = \boldsymbol{R}^2$$

$$C\,(x_0; y_0; z_0) = C(\quad; -1\,; 0)$$

$$R = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: $C(2; -1; 0), R = 2$.

Задача. Какую поверхность определяет уравнение $4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z+13=0$?

Решение.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)^2+(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)^2=\boldsymbol{R}^2$$

$$4x^2+4y^2+4z^2-8x+12y-16z+13=0 \ \ |:4$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+3y-4z+\frac{13}{4}=0$$

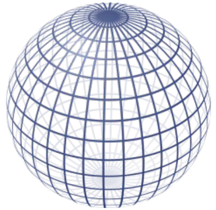
$$(x^2-2x+1)+\left(y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)+(z^2-4z+4)-1-\frac{9}{4}-4+\frac{13}{4}=0$$

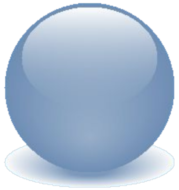
$$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=4$$

$C\ (1;-1{,}5;2)$ и $R=2$

Ответ: исходное уравнение определяет сферу с центром в точке $C\ (1;-1{,}5;2)$ и $R=2$.

Сфера и шар. Уравнение сферы





Шар – это совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше заданного.