

Отображения (Функции)

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Фомичев В. М. Дискретная математика и криптология.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

Отображение (функция)

Отображением, или функцией $f: X \rightarrow Y$ называется такое подмножество множества $X \times Y$, что для любых пар $(x', y') \in f$, $(x'', y'') \in f$ из условия $y' \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$. То есть каждому элементу из множества X сопоставлено не более одного элемента множества Y . Если каждому элементу множества X сопоставлен элемент из Y , то функция называется полностью определённой, иначе – частично определённой.

Для пары (x, y) :

x – аргумент функции, или прообраз y ,

y – значение функции, или образ x .

$D(f)$ - область определения функции (domain) – множество всех прообразов элементов множества Y .

$E(f)$ - область значений функции (range) – множество всех образов элементов множества X .

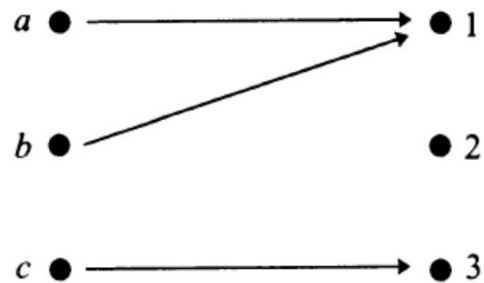
Инъекция, сюръекция, биекция

Если при отображении $f: X \rightarrow Y$ область значений $E(f)$ совпадает с множеством Y , то отображение называется сюръективным (отображением "на").

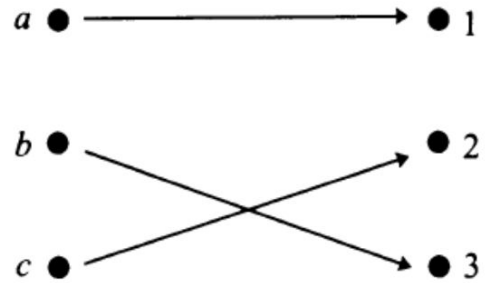
Если при отображении $f: X \rightarrow Y$ различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y ($x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$), то отображение называется инъективным (отображением "в").

Если отображение одновременно инъективно и сюръективно, то его называют биективным.

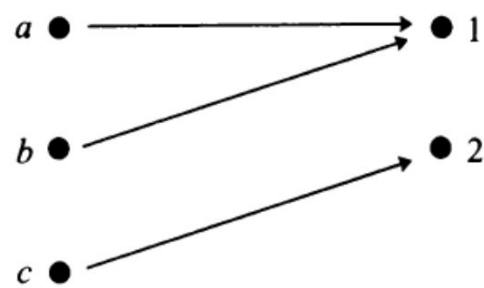
(a)



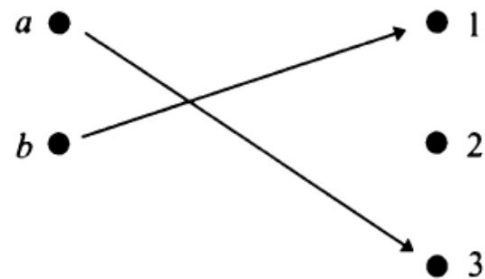
(б)



(в)



(г)



Пример

Обратная функция

Если отношение $f^{-1}: Y \rightarrow X$, является отображением (функцией), то она называется обратной функцией, а функция f – обратимой.

ТЕОРЕМА. Если функция $f: X \rightarrow Y$ является биекцией, то обратное отношение f^{-1} является функцией из Y в X , причём биективной.

ТЕОРЕМА. Если $f: X \rightarrow Y$ — биекция, то

a) $f(f^{-1}(y)) = y$ для $\forall y \in Y$;

b) $f^{-1}(f(x)) = x$ для $\forall x \in X$.

Композиция функций

Если заданы функции $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$, то их композицией также является функция $g \circ f: X \rightarrow Z$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Бесконечные множества

Конечные и бесконечные множества

КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, количество элементов которого конечно.
- Множество, мощность которого равна мощности множества $\{x \mid 1 \leq x \leq n, n \in \mathbb{N}\}$.

БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, не являющееся конечным.
- Множество, мощность которого не меньше мощности множества натуральных чисел.
- Множество, для которого существует биекция с некоторым его собственным подмножеством.

Равномощность множеств

Множества A и B называются равномощными, если существует биективное (взаимно-однозначное) отображение множества A на множество B .

Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности (обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности).

Бесконечные множества

СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

- Бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.
- Множество, для которого можно задать биекцию с множеством натуральных чисел.
- Бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Мощность множества обозначается \aleph_0 .

НЕСЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

КОНТИНУАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (КОНТИНУУМ)

- Бесконечное множество, превосходящее по мощности счётное.
- Множество, для которого можно установить биекцию с множеством действительных чисел.
- Бесконечное множество, мощность которого эквивалентна мощности множества действительных чисел.

Континуумом также называется мощность данного множества $c = 2^{\aleph_0}$

Мощность множества

- Класс эквивалентности по отношению равномощности.

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

Специальные функции

Перестановка – биективная функция на некотором множестве ($f: A \rightarrow A$).

Функционал – отображение между множеством функций и множеством чисел (функционал качества).

Оператор – отображение между двумя множествами функций.

Бинарная операция

Бинарной операцией на множестве S называется функция $f: S \times S \rightarrow S$.

Бинарная операция обладает свойством замкнутости: $a, b \in A \Rightarrow f(a, b) \in S$.

Универсальная алгебра

Универсальной алгеброй \mathcal{A} называется некоторое множество S , называемое *носителем* алгебры, с определённым на нём множеством операций F – *сигнатурой* данной алгебры ($\mathcal{A} = (S, F)$).

Универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из единственной бинарной операции называется *группоидом*.

Полугруппа

Множество S с введённой на нём ассоциативной бинарной операцией (группоид) $(a * b) * c = a * (b * c)$ называется *полугруппой* $(S, *)$.

Если для $\forall a, b \in S$ выполняется свойство коммутативности: $a * b = b * a$, то полугруппа называется *абелевой*, или *коммутативной*.

Полугруппа, содержащая нейтральный элемент ($\exists e \in S: a * e = e * a = a$), называется *моноидом* (S^1) .

Группа

Если для полугруппы выполнены условия:

- 1) ассоциативности: $(a * b) * c = a * (b * c)$,
- 2) наличие нейтрального элемента: $\exists e \in S: \forall a \in S (e * a = a * e = a)$,
- 3) наличие обратного элемента: $\forall a \in S \Rightarrow \exists a^{-1} \in S: (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$,

то она называется *группой*.

Если выполняется условие коммутативности, то группа называется абелевой.

Пример 1

Сигнатура: $\mathcal{B}(M), M = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Бинарная операция: \cup

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: \emptyset

Обратный элемент:

Пример 2

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2 .

Бинарная операция: \cdot

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Обратный элемент:

Пример 3

Сигнатура: $S = \{i, -i, 1, -1\}$.

Бинарная операция: \cdot

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: **1**

Обратный элемент:

Пример 4

Сигнатура: \mathbb{N}

Бинарная операция: a^b

Ассоциативность: \otimes

Коммутативность: \otimes

Нейтральный элемент: \otimes

Обратный элемент: \otimes

Пример 5

Сигнатура: \mathbb{Z}

Бинарная операция: $+$

Ассоциативность:

Коммутативность:

Нейтральный элемент: 0

Обратный элемент:

Операции коммутативной группы

	АДДИТИВНАЯ	МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ
Обозначение операции:	$+ \quad (a + b)$	$\cdot \quad (a \cdot b, ab)$
Нейтральный элемент:	$0 \quad (a + 0 = 0 + a = a)$	$1 \quad (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
Противоположный элемент:	$-a \quad (-a + a = a + (-a) = 0)$	$a^{-1} \quad (a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1)$

Кольцо

Кольцом называется множество S с введёнными на нём аддитивной (+) и мультипликативной (\cdot) бинарными операциями и выполняющимися условиями:

- 1) Относительно операции + множество является абелевой группой,
- 2) Операция \cdot коммутативна ($a \cdot b = b \cdot a$),
- 3) Выполняются законы дистрибутивности:

$$\forall a, b, c \in S \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Пример 1

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2 .

Бинарные операции: $+$, \cdot

Ассоциативность $+$: \checkmark

Коммутативность $+$: \checkmark

Нейтральный элемент, относительно $+$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Обратный элемент, относительно $+$: $-\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$

Дистрибутивность:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Поле

Если кольцо имеет мультипликативный нейтральный элемент (единицу), оно называется *кольцом с единицей*.

Если операция умножения коммутативна, кольцо называется *коммутативным*.

Коммутативное кольцо называется *полем*, если его ненулевые элементы образуют группу, относительно операции умножения.

Примеры

- 1) Множество рациональных чисел \mathbb{Q} с операциями $+$, \cdot .
- 2) Множество вещественных чисел \mathbb{R} с операциями $+$, \cdot .
- 3) Множество $\mathbb{B}^2 = \{0,1\}$ с операциями \oplus , \wedge .