Отображения (Функции)

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Фомичев В. М. Дискретная математика и криптология.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

Отображение (функция)

Отображением, или функцией $f\colon X \to Y$ называется такое подмножество множества $X \times Y$, что для любых пар $(x', y') \in f$, $(x'', y'') \in f$ из условия $y' \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$. То есть каждому элементу из множества X сопоставлено не более одного элемента множества Y. Если каждому элементу множества X сопоставлен элемент из Y, то функция называется полностью определённой, иначе – частично определённой.

Для пары (x, y):

x – аргумент функции, или праобраз y,

y – значение функции, или образ x.

$D(f)$ - область определения функции (domain) – множество всех праобразов элементов множества Y.

$E(f)$ - область значений функции (range) – множество всех образов элементов множества X.

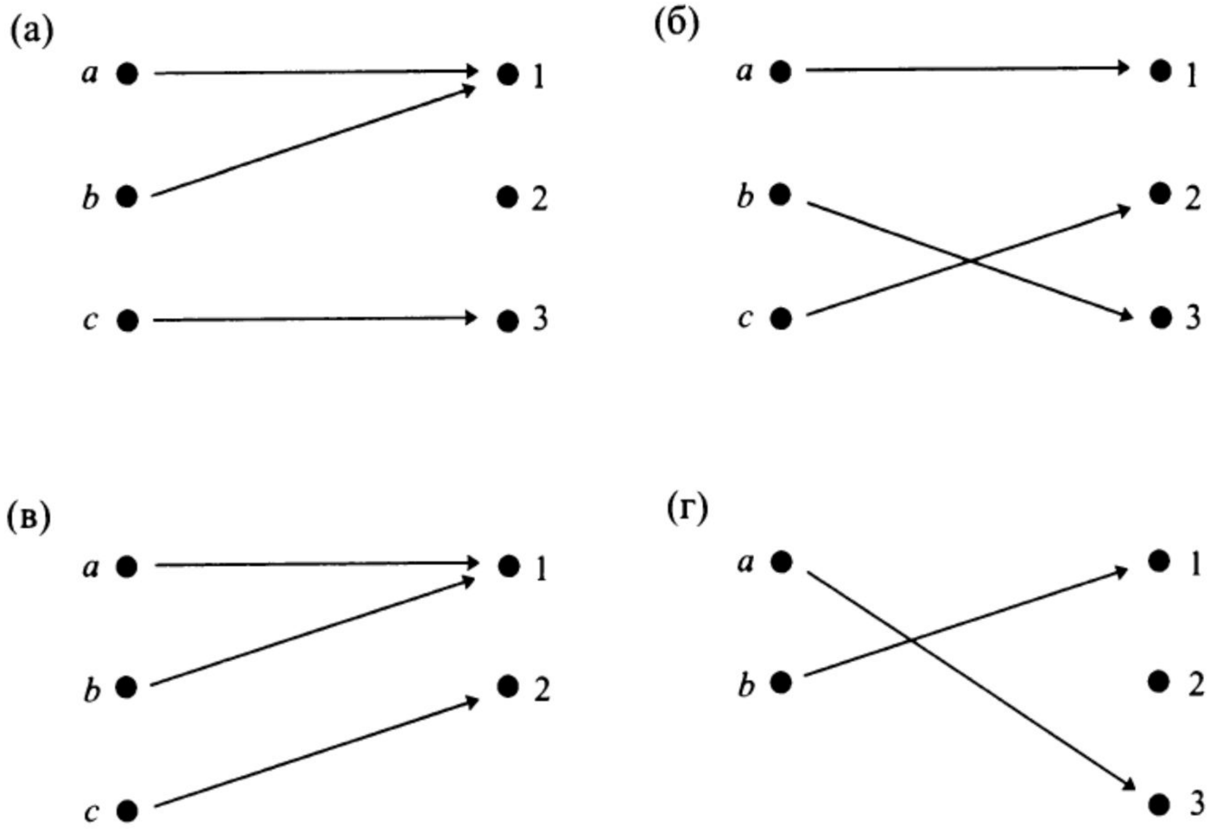
Инъекция, сюръекция, биекция

Если при отображении $f: X \to Y$ область значений $E(f)$ совпадает с множеством Y, то отображение называется сюръективным (отображением "на").

Если при отображении $f: X \to Y$ различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y $\left(x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')\right)$, то отображение называется инъективным (отображением "в").

Если отображение одновременно инъективно и сюръективно, то его называют биективным.

Пример



Обратная функция

Если отношение $f^{-1}: Y \to X$, является отображением (функцией), то она называется обратной функцией, а функция f – обратимой.

ТЕОРЕМА. Если функция $f: X \to Y$ является биекцией, то обратное отношение f^{-1} является функцией из Y в X, причём биективной.

ТЕОРЕМА. Если $f: X \to Y$ — биекция, то

a) $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ для $\forall y \in Y$;

b) $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ для $\forall x \in \mathrm{X}$.

Композиция функций

Если заданы функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то их композицией также является функция $g \circ f: X \to Z$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Бесконечные множества

Конечные и бесконечные множества

КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, количество элементов которого конечно.
- Множество, мощность которого равна мощности множества $\{x \mid 1 \le x \le n, n \in \mathbb{N}\}$.

БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, не являющееся конечным.
- Множество, мощность которого не меньше мощности множества натуральных чисел.
- Множество, для которого существует биекция с некоторым его собственным подмножеством.

Равномощность множеств

Множества A и B называются равномощными, если существует биективное (взаимно-однозначное) отображение множества A на множество B.

Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности (обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности).

Бесконечные множества

СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

- Бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.
- Множество, для которого можно задать биекцию с множеством натуральных чисел.
- Бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Мощность множества обозначается $\aleph_0$.

НЕСЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

КОНТИНУАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (КОНТИНУУМ)

- Бесконечное множество, превосходящее по мощности счётное.
- Множество, для которого можно установить биекцию с множеством действительных чисел.
- Бесконечное множество, мощность которого эквивалентна мощности множества действительных чисел.

Континуумом также называется мощность данного множества $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

Мощность множества

- Класс эквивалентности по отношению равномощности.

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

Специальные функции

Перестановка – биективная функция на некотором множестве ($f: A \to A$).

Функционал – отображение между множеством функций и множеством чисел (функционал качества).

Оператор – отображение между двумя множествами функций.

Бинарная операция

Бинарной операцией на множестве S называется функция $f: S \times S \to S$.

Бинарная операция обладает свойством замкнутости: $a, b \in A \Rightarrow f(a, b) \in S$.

Универсальная алгебра

Универсальной алгеброй $\mathcal{g}$ называется некоторое множество S, называемое *носителем* алгебры, с определённым на нём множеством операций F – *сигнатурой* данной алгебры ($\mathcal{g} = (S, F)$).

Универсальная алгебра, сигнатура которой состоит из единственной бинарной операции называется *группоидом.*

Полугруппа

Множество S с введённой на нём ассоциативной бинарной операцией (группоид) $(a * b) * c = a * (b * c)$ называется *полугруппой* (S,∗).

Если для $\forall a, b \in S$ выполняется свойство коммутативности: $a * b = b * a$, то полугруппа называется *абелевой*, или *коммутативной*.

Полугруппа, содержащая нейтральный элемент ($\exists e \in S$: $a * e = e * a = a$), называется *моноидом* (S^1).

Группа

Если для полугруппы выполнены условия:

1) ассоциативности: $(a * b) * c = a * (b * c)$,
2) наличие нейтрального элемента: $\exists e \in S : \forall a \in S \ (e * a = a * e = a)$,
3) наличие обратного элемента: $\forall a \in S \Rightarrow \exists a^{-1} \in S : (a * a^{-1} = a^{-1} * a = e)$,

то она называется *группой*.

Если выполняется условие коммутативности, то группа называется абелевой.

Пример 1

Сигнатура: $\mathcal{B}(M), M = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Бинарная операция: $\cup$

Ассоциативность: ✓

Коммутативность: ✓

Нейтральный элемент: $\emptyset$

Обратный элемент: ✗

Пример 2

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2.

Бинарная операция: $\cdot$

Ассоциативность: ✓

Коммутативность: ✗

Нейтральный элемент: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Обратный элемент: ✓

Пример 3

Сигнатура: $S = \{i, -i, 1, -1\}$.

Бинарная операция: $\cdot$

Ассоциативность: $\checkmark$

Коммутативность: $\checkmark$

Нейтральный элемент: 1

Обратный элемент: $\checkmark$

Пример 4

Сигнатура: $\mathbb{N}$

Бинарная операция: a^b

Ассоциативность: $\otimes$

Коммутативность: $\otimes$

Нейтральный элемент: $\otimes$

Обратный элемент: $\otimes$

Пример 5

Сигнатура: $\mathbb{Z}$

Бинарная операция: $+$

Ассоциативность: ✓

Коммутативность: ✓

Нейтральный элемент: 0

Обратный элемент: ✓

Операции коммутативной группы

	АДДИТИВНАЯ	МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ
Обозначение операции:	$+ \quad (a+b)$	$\cdot \quad (a \cdot b,\ ab)$
Нейтральный элемент:	$0 \quad (a+0=0+a=a)$	$1 \quad (a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
Противоположный элемент:	$-a\ (-a+a=a+(-a)=0)$	$a^{-1}\ (a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1)$

Кольцо

Кольцом называется множество S с введёнными на нём аддитивной $(+)$ и мультипликативной $(\cdot)$ бинарными операциями и выполняющимися условиями:

1) Относительно операции $+$ множество является абелевой группой,
2) Операция $\cdot$ коммутативна $(a \cdot b = b \cdot a)$,
3) Выполняются законы дистрибутивности:
$$\forall a, b, c \in S \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Пример 1

Сигнатура: Множество матриц действительных чисел размерности 2×2.

Бинарные операции: $+, \cdot$

Ассоциативность $+$: ✓

Коммутативность $+$: ✓

Нейтральный элемент, относительно $+$: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Обратный элемент, относительно $+$: $-\left[\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}\right.$

Дистрибутивность:

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Поле

Если кольцо имеет мультипликативный нейтральный элемент (единицу), оно называется *кольцом с единицей*.

Если операция умножения коммутативна, кольцо называется *коммутативным*.

Коммутативное кольцо называется *полем,* если его ненулевые элементы образуют группу, относительно операции умножения.

Примеры

1) Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с операциями $+, \cdot$.
2) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с операциями $+, \cdot$.
3) Множество $\mathbb{B}^2 = \{0,1\}$ с операциями $\oplus, \wedge$.