Homework

Каретка прибора прошла путь S следующим образом: первую половину она двигалась с постоянной скоростью $v = 12$м/с, вторую - с постоянным отрицательным ускорением, так что в конце пути остановилась. Найдите среднюю скорость движения Каретки.

Решение:

Средняя скорость равна $\bar{v} = S/t$, где t - время прохождения всего пути, $t = t_1 + t_2$, t_1 и t_2 - время, за которое каретка прошла соответственно первую и вторую половины пути

$t_1 = S/(2v)$.

Ускорение, с которым каретка прошла вторую половину пути, отрицательно:

$a = -v/t_2$,

и путь

$\frac{S}{2} = vt_2 + \frac{at_2^2}{2} = vt_2 - \frac{vt_2}{2} = \frac{vt_2}{2}$

Отсюда $t_2 = S/v$, и средняя скорость: $\bar{v}$и $= 2v/3 = 8$м/с.

Две автомашины едут по взаимно перпендикулярным дорогам с постоянными, одинаковыми по величине скоростями. В некоторый момент времени машины находились на расстояниях $l_1 = 1$км *и* $l_2 = 3$км *от перекрестка. Найдите минимальное расстояние между машинами.*

Направим оси координат вдоль каждой из дорог в сторону движения машин. Поскольку в условии задачи не оговорено, приближаются машины к перекрестку или удаляются от него, то координаты x_0 и y_0 положения машин в настоящий момент времени t = 0 могут иметь как положительные, так и отрицательные значения, т. е. $x_0 = \pm 3$км и $y_0 = \pm 1$км. Координаты машин x и y в произвольный момент времени t > 0 определяются формулами

$x(t) = x_0 + vt, y(t) = y_0 + vt$. (1)

Для расстояния $l(t)$ между машинами можно написать:

$l(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. (2)

Заменяя в (2) x(t) и y(t) правыми частями (1) и возводя затем обе части равенства (2) в квадрат, после простых преобразований получаем

$2v^2t^2 + 2vt(x_0 + y_0) + x_0^2 + y_0^2 - l^2 = 0$. (3)

Решая это уравнение относительно t, находим два значения t_1 и t_2, отвечающие одному и тому же значению l:

$t_{1,2} = -\frac{x_0+y_0}{v}\ pm \frac{1}{2v}\sqrt{(x_0 + y_0)^2 - 2(x_0^2 + y_0^2 - l^2}$. (4)

Машины дважды находятся друг от друга на одинаковом расстоянии l: сначала в процессе сближения, затем в процессе удаления.

Именно поэтому уравнение (3) имеет два решения. При $l = l_{min}$ подкоренное выражение в (4) обращается в ноль, т. е.

$(x_0 + y_0)^2 = 2(x_0^2 + y_0^2 - l_{min})$, (5)

и уравнение (3) имеет уже единственное решение

$t_1 = t_2 = -\frac{x_0+y_0}{2v}$. (6)

Из (5) для l_{min} находим

$l_{min} = \frac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}$

Из (6) ясно, что $t = t_1 = t_2 > 0$ только в том случае, когда $x_0 < 0$ т. е. когда $x_0 = -3$км. При этом y_0 может иметь как положительные так и отрицательное значения. Если $y_0 = -1$км, то $l_{min} = \sqrt{2}$км если $y_0 = 1$км, то $l_{min} = 2\sqrt{2}$км. Если $x_0 = 3$км, то, независимо от того, положительно y_0 или отрицательно, l минимально в начальный момент $t = 0$. В данном случае расчет дает для l_{min}, следующие значение: $l_{min} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{10}$км.

Задача 5. (*Всеросс., 2012, РЭ, 9*) Чебурашка и Крокодил Гена решили устроить забег по лестнице в доме Дружбы. Выяснилось, что Чебурашка успевает три раза добежать до четвёртого этажа и вернуться на первый этаж за время, пока Гена поднимается на шестнадцатый этаж.

На какой этаж успеет подняться Чебурашка, пока Гена будет бегать с первого этажа на шестой и обратно? Считайте, что Чебурашка и Гена бегают вверх-вниз с постоянными скоростями.

На 13-й

Задача 10. (*«Росатом», 2013, 7–10*) Самолет, совершающий рейс Москва — Нью-Йорк, вылетает в 8:00 по московскому времени и прибывает в 13:00 по нью-йоркскому. Обратный рейс отправляется в 3:00 по нью-йоркскому и прибывает в 22:00 по московскому времени. Определите разницу времени между Москвой и Нью-Йорком.

7 часов

Задача 14. (*«Росатом», 2020, 8–10*) Три машины одновременно выехали из города A в город B и ехали по одной дороге с постоянными скоростями. Скорость первой машины была v, второй — $\frac{2v}{3}$. Известно, что первая машина приехала в город B, когда часы показывали t часов, вторая — когда часы показывали $t+1$ часов, третья — когда часы показывали $t+2$ часов. Найти скорость третьей машины.

$$\boxed{v_3 = \frac{v}{2}}$$