Тема: Линейные звенья второго порядка

Учебная цель: изучить линейные звенья второго порядка

Вопросы:

1. Колебательные звенья.
2. Консервативные звенья.
3. Апериодические звенья второго порядка.

Перечень литературы:

1. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического регулирования.

ВВЕДЕНИЕ

В зависимости от порядка д.у., которым описывается работа элемента САУ, различают звенья первого, второго и более высоких порядков.

Порядком звена называется неотрицательное целое число, равное порядку старшей производной в д.у., которым описывается работа этого звена.

На прошлой лекции были рассмотрены линейные стационарные звенья первого порядка, т.е. такие, которые описываются д.у. первого порядка.

Сегодня на лекции мы рассмотрим линейные звенья второго порядка, которые находят широкое применение в САУ.

Линейным статистическим звеном второго порядка называется звено, описываемое уравнением вида:

$$T^2 u''(t) + 2\xi T u'(t) + u(t) = kx(t) \qquad (1)$$

Или в операторной форме

$$\left(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1\right) u = kx$$

где $T^2; 2\xi T; 1; k$ – коэффициенты, показывающие время наблюдения звена (коэффициенты времени наблюдения звена);

ξ – коэффициент демпфирования (отображения, затухания).

В общем случае от коэффициента ξ зависит поведение звена 2-го порядка.

1. $0 < \xi < 1$ - колебательное звено;
2. $\xi > 1$ - апериодическое звено 2-го порядка;
3. $\xi = 0$ - консервативное звено.

Если уравнение (1) имеет несколько иной вид, то его приводят к стандартному виду.

Пример:

$12u''(t) + 14u'(t) + 2u(t) = 3x(t); 6u''(t) + 7u'(t) + u(t) = 1{,}5x(t)$. Сделаем замену $T = \sqrt{6};\ 7 = 2\sqrt{6}\frac{3{,}5}{\sqrt{6}}$ и получим:

$$\left(\sqrt{6}\right)^2 u''(t) + 2\sqrt{6}\frac{3{,}5}{\sqrt{6}}u'(t) + u(t) = 1{,}5x(t) \Rightarrow T^2u''(t) + 2T\xi u'(t) + u(t)$$

1. Колебательные звенья

Элемент САУ может быть отражен колебательным звеном, если он содержит как минимум две емкости различных энергии: в одной емкости накапливается потенциальная, а в другой – кинетическая энергия. Канал, по которому емкости обмениваются энергией, обладает сопротивлением. На сопротивлении происходят безвозвратные для элемента потери энергии. Мерой этих потерь является коэффициент затухания (демпфирования): чем больше ξ, тем больше потери энергии. При $0 < \xi < 1$ переходный процесс колебательный, причем, чем меньше ξ, тем колебания более интенсивны.

Примером колебательных звеньев являются, рассмотренные в предыдущей лекции, электрическая цепь и механическая система. В электрической цепи емкость ***C*** накапливает энергию электрического поля (потенциальная энергия), а индуктивность ***L*** – энергию электромагнитного поля (кинетическая энергия). Безвозвратные потери происходят на сопротивлении ***R***. Если сопротивление ***R*** невелико, то контур будет колебательным. В механической системе масса накапливает кинетическую, а пружина – потенциальную энергию. Потери энергии происходят в демпфере.

Рассмотрим «поведение» колебательного звена (КЗ) при воздействии на него гармонического, ступенчатого и импульсного воздействий.

1. д.у. в операторной форме $\left(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1\right)u = kx$;

2. оператор воздействия $R(p) = k$;

3. собственный оператор $T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1$;

4. передаточная функция $W(p) = \dfrac{k}{T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1}$;

5. частотная передаточная функция;

$$W(jw) = \frac{k}{T^2 (jw)^2 + 2\xi (jw) + 1} =$$

$$\frac{k\left(1 - T^2 w^2\right)}{(2\xi Tw)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2} - j\frac{2k\xi Tw}{(2\xi Tw)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2}$$

6. действительная (вещественная) часть

$$U(w) = \frac{k\left(1 - T^2 w^2\right)}{\left(2\xi T w\right)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2};$$

7. мнимая часть $V(w) = \dfrac{2k\xi T w}{\left(2\xi T w\right)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2}$;

8. модуль передаточной функции (амплитудная частотная функция) $A(w) = \dfrac{k}{\sqrt{\left(2\xi T w\right)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2}}$ имеет максимум $A_{\max}$ на резонансной частоте. Чем меньше ξ, тем больше $A_{\max}$.

$A(w)$ может иметь резонансный пик. Исследования модуля $A(w)$ на максимум показывают, что пик будет существует при $\xi < 0,707$. Высота пика будет тем больше, чем меньше оператор затухания:

максимуму $A(w)=\dfrac{k}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$ соответствует частота

$$w_м=\frac{1}{T}\sqrt{1-\xi^2}$$

9. фазовая частотная функция $\varphi(w)=-arctg\dfrac{2\xi Tw}{1-T^2w^2}$

Следовательно, колебательное звено создает сдвиг фаз, который изменяется на 0^0 при $w=0$; на 180^0 при $w=\infty$; на -90^0 при $w=\dfrac{1}{T}$.

10. переходная функция $h(t)$, т.е. по реакции звена на входной сигнал типа единичной ступенчатой функции $1(t)$. Так как $x(t)=1(t)\Rightarrow h(t)=u(t)$, то исходное д.у. (1) примет вид

$$T^2h''(t)+2\xi Th'(t)+h(t)=k\cdot 1(t) \qquad (2)$$

Формулой (2) описывается линейное неоднородное д.у. 2-го порядка. Решением д.у. (2) будет сумма двух решений:

$$h_{о.н.}(t) = h_{о.о.}(t) + h_{ч.н.}(t) \qquad (3)$$

где $h_{о.н.}(t)$ - общее решение неоднородного д.у.; $h_{о.о.}(t)$ - общее решение однородного д.у.; $h_{ч.н.}(t)$ - частное решение неоднородного д.у.

I. Частное неоднородное решение д.у. (2):

Так как правая часть уравнения (2) представляет собой константу (многочлен, полином нулевой степени), то ищем частное решение так же в виде многочлена нулевой степени:

$$h_{ч.н.}(t) = A \qquad (4)$$

где A - константа или многочлен нулевой степени.

2. Найдем производные:

$$h'_{ч.н.}(t) = A' = 0;\ h''_{ч.н.}(t) = \left(h'_{ч.н.}(t)\right)' = 0$$

3. Подставим в формулу (2) и получим:

$$T^2 \cdot 0 + 2\xi T \cdot 0 + A = k \cdot 1(t) \Rightarrow A = k \cdot 1(t) \quad y_{ч.н.} = k \cdot \ (t)$$

II. Общее решение однородного линейного д.у.

1. однородное линейного д.у.

$$T^2 h''(t) + 2\xi T h'(t) + h(t) = 0 \qquad (5)$$

2. характеристическое уравнение:

$$T^2 \lambda^2 + 2\xi T \lambda + 1 = 0 \qquad (6)$$

а) дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = 4\xi^2 T^2 - 4T^2 = 4T^2\left(\xi^2 - 1\right)$$

$$\sqrt{D} = 2T\sqrt{\left(\xi^2 - 1\right)}$$

б) так как $D < 0$, то решением характеристического уравнения (6) будет 2 комплексных сопряженных корня:

$$D = b^2 - 4ac = 4\xi^2 T^2 - 4T^2 = 4T^2\left(\xi^2 - 1\right)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{-\left(-\xi^2 + 1\right)}}{T} = \frac{-\xi \pm \sqrt{-1}\sqrt{\left(1 - \xi^2\right)}}{T} == \frac{-\xi \pm \sqrt{\left(1 - \xi^2\right)}j}{T},$$

$$где \quad j = \sqrt{-1}$$

в) в случае комплексных корней общее решение однородного линейного д.у. (5) ищется в виде: $h_{o.o.}(t)=e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right)$ (7)

где $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$.

Для нашего случая $\lambda=-\dfrac{\xi}{T};\beta=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ и общее решение однородного д.у. (5) примет вид:

$$h_{o.o.}(t)=e^{-\frac{\xi}{T}t}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right).$$

III. Общее решение линейного неоднородного д.у. (2) по формуле (3)

$$h_{o.н.}(t)=e^{-\frac{\xi}{T}t}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right)+k\cdot 1(t) \qquad (9)$$

IV. Решение задачи Коши для уравнения (2). При $t_0=0$,

$h_{o.н.}(t_0)=h'_{o.н.}(t_0)=0$.

а) производная функции $h_{о.н.}(t)$

$$h'_{о.н.}(t)=e^{-\frac{\xi}{T}t}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\left(C_1\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right)+0 \qquad (10)$$

б) подставим начальные условия в (9) и (10) и получим систему линейных уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases}0=e^{-\frac{\xi}{T}\cdot 0}\left(C_1\cdot 1+0\right)+k\left(1(t)\right)\\ 0=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\cdot C_2-\frac{\xi}{T}\cdot C_1\end{cases}\begin{cases}C_1=-k\cdot 1(t)\\ C_2=\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot C_1\end{cases}\begin{cases}C_1=-k\cdot 1(t)\\ C_2=-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot k\cdot 1(t)\end{cases} \qquad (11)$$

Подставим (11) в (9) и найдем решение задачи Коши уравнения (2)

$$h_o(t)=k\cdot 1(t)\left(1-\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right) \qquad (12)$$

11. Динамические свойства пропорционального звена по весовой функции, т.е. реакция звена на импульсное воздействие: $x(t)=\delta(t)$.

и $w(t)=u(t)$. Исходное д.у. запишем в виде:

$$T^2 w''(t)+2\xi T w'(t)+w(t)=k\delta(t) \qquad (13)$$

Для нахождения весовой функции воспользуемся соотношением: $w(t)=h'(t)$ и получим из формулы (10)

$$w(t)=e^{-\frac{\xi}{T}t}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\left(C_1\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right)+0 \qquad (14)$$

Для нулевых начальных условий получим:

$$w_0(t)=k\cdot 1(t)\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) \qquad (15)$$

2. КОНСЕРВАТИВНЫЕ ЗВЕНЬЯ

Консервативное звено является частным случаем колебательного звена при $\xi = 0$. Это идеальный случай, когда потери энергии отсутствуют и элемент сохраняет неизменным первоначальный запас энергии, ввиду чего называется консервативным. Следовательно, переходный процесс будет незатухающим, а потери энергии в звене можно пренебречь.

Консервативные звенья часто применяются в устройствах для решения задач выделения из входного воздействия сигнала определенной частоты.

Для случая консервативного звена, когда $\xi = 0$, исходное д.у. примет вид:

$$T^2 u''(t) + u(t) = k \cdot x(t) \tag{16}$$

1. Д.у. в операторной форме: $\left(T^2 p^2 + 1\right) u = k \cdot x$;
2. Оператор воздействия: $R(p) = k$;
3. Собственный оператор: $Q(p) = T^2 p^2 + 1$;
4. Передаточная функция в операторной форме: $W(p) = k / T^2 p^2 + 1$

5. Частотная передаточная функция:

$$W(jw) = \frac{k}{T^2(jw)^2 + 1} = \frac{k}{1 - T^2w^2};$$

6. Действительная часть: $U(w) = \dfrac{k}{1 - T^2w^2};$

7. Мнимая часть: $V(w) = 0;$

8. Амплитудная частотная функция: $A(w) = \dfrac{k}{1 - T^2w^2};$

Амплитудная частотная функция консервативного звена имеет максимум при условии $T^2w^2 \to 1$ или $\left(w^2 \to \dfrac{1}{T^2} \qquad w \to \dfrac{1}{T}\right).$

9. Фазовая частотная функция:

$$\varphi(w) = \operatorname{arctg}\frac{V(w)}{U(w)} = 0$$

Консервативное звено фазы входного воздействия не изменяет.

10. Переходная функция (т.е. реакция звена на единичное ступенчатое воздействия). Так как $x(t)=1(t) \quad h(t)=u(t)$, то исходное д.у. консервативного звена (16) примет вид:

$$T^2h''(t)+h(t)=k\cdot 1(t) \qquad (17).$$

Уравнение (17) представляет собой неоднородное линейное д.у. 2-го порядка, решение которого определяется по формуле (3) и ранее рассмотренной методике:

I. Частное решение неоднородного д.у. (17) аналогично рассмотренному ранее (ф. 4);

II. Общее решение однородного линейного д.у.

$$T^2h''(t)+h(t)=0 \qquad (18);$$

1. решение характеристического уравнения

$$T^2\lambda^2+1=0 \qquad (19);$$

а) дискриминант $D=-4T^2<0$;

б) решение характеристического уравнения (19) – два комплексных сопряженных корня: $\lambda_{1,2}=\pm\frac{1}{T}j \Rightarrow \alpha=0; \beta=\frac{1}{T}$

в) общее решение однородного линейного д.у. (18) ищем в виде (7) ($\alpha = 0; \beta = \frac{1}{T}$)

$$h_{o.o.}(t) = e^{0}\left(C_1 \cos\frac{1}{T}t + C_2 \sin\frac{1}{T}t\right);$$

III. Общее решение для д.у. (17);

$$h_{в.\ .}(t) = C_1 \cos\frac{1}{T}t + C_2 \sin\frac{1}{T}t + k \cdot 1(t) \qquad (20)$$

IV. Решение задачи Коши для (17). Принимаем $t = 0;$ $h_{о.н.}(t) = h'_{о.н.}(t) = 0$.

а) производная функции $h_{в.\ .}(t)$ (20):

$$h'(t) = C_2 \frac{1}{T} \cos\frac{1}{T}t - C_1 \frac{1}{T} \sin\frac{1}{T}t \qquad (21)$$

б) подставим начальные условия в (20) и (21) и получим:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + k \cdot 1(t); \\ 0 = -C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot \frac{1}{T} \cdot 1; \end{cases} \begin{cases} C_1 = -k \cdot 1(t); \\ C_2 = 0. \end{cases} \qquad (22);$$

в) (22) подставим в (20) и найдем решение задачи Коши уравнения (17):

$$h_0(t) = k \cdot 1(t)\left(1 - \cos\frac{1}{T}t\right). \qquad (23)$$

11. Весовая функция определяется из формулы (21)

$$w(t) = h'(t) = C_2 \frac{1}{T} \cos\frac{1}{T}t - C_1 \frac{1}{T} \sin\frac{1}{T}t \qquad (24)$$

Для нулевых начальных условий

$$w_0(t) = k \cdot 1(t) \frac{1}{T} \sin\frac{1}{T}t \qquad (25)$$

3. АПРИОДИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Апериодическое звено второго порядка также, как и консервативное звено, является частным случаем колебательного звена при $\xi \geq 1$.

Апериодическое звено второго порядка эквивалентно двум апериодическим звеньям первого порядка, включенным последовательно друг за другом, с общим коэффициентом передачи (пропорциональности) и постоянными времени.

Апериодическое звено второго порядка описывается исходным д.у. (1). Для случая $\xi > 1$ это уравнение будет иметь вид, не отличающийся от исходного

$$T^2 u''(t) + 2\xi T u'(t) + u(t) = kx(t).$$

Для случая $\xi = 1$ исходное д.у. принимает вид

$$T^2 u''(t) + T u'(t) + u(t) = kx(t).$$

Рассмотрим поведение апериодического звена второго порядка при подаче на его вход различных воздействий.

Для случая, когда $\xi > 0$, амплитудные и фазовые частотные функции, а также передаточные функции ничем не отличаются от функций и характеристик колебательного звена $\left(0 < \xi < 1\right)$. Отличия заключаются в переходной и весовой функциях. Эти отличия будут рассмотрены позже, а сейчас рассмотрим случай $\xi = 0$.

Исследуем поведение звена на гармоническое, единичное и импульсное воздействия.

1. Д.у. в операторной форме: $\left(T^2 p^2 + Tp + 1\right)u = kx$

2. $R(p) = k$ - оператор воздействия;

3. $Q(p) = T^2 p^2 + Tp + 1$ - собственный оператор;

4. $W(p) = \dfrac{k}{T^2 p^2 + Tp + 1}$ - передаточная функция;

5. $W(jw) = \dfrac{k\left(1 - T^2 w^2\right)}{T^2 w^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2} - j\dfrac{kTw}{T^2 w^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2}$ - час-

тотная передаточная функция;

6. $$U(w)=\frac{k\left(1-T^2w^2\right)}{T^2w^2+\left(1-T^2w^2\right)^2}$$ - действительная (вещественная) часть;

7. $$V(w)=-\frac{kTw}{T^2w^2+\left(1-T^2w^2\right)^2}$$ - мнимая часть;

8. $$A(w)=\frac{k}{\sqrt{T^2w^2+\left(1-T^2w^2\right)^2}}$$ - модуль передаточной функции (амплитудная частотная функция).

9. $$\varphi(w)=\mathrm{arctg}\frac{-kTw}{k\left(1-T^2w^2\right)}=-\mathrm{arctg}\frac{Tw}{1-T^2w^2}$$ - фазовая частотная функция.

10. Переходная функция апериодического звена второго порядка определяется аналогично, как и для колебательного и консервативного звеньев путем решения д.у.

$$T^2 h''(t) + Th'(t) + h(t) = k \cdot 1(t). \qquad (27)$$

Общее решение д.у. (27) имеет вид:

$$h(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T}} + k \cdot 1(t). \qquad (28)$$

Задача Коши для д.у. (27):

$$h_0(t) = k \cdot 1(t)\left[1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right) \cdot e^{-\frac{t}{T}}\right].$$

11. Весовая функция

$$w(t) = \left(C_2\left(1 - \frac{t}{T}\right) - C_1 \frac{1}{T}\right) e^{-\frac{t}{T}}. \qquad (29)$$

Для нулевых начальных условий:

$$w_0(t) = -k \cdot 1(t)\left(1 - \frac{t}{T} - \frac{1}{T}\right) e^{-\frac{t}{T}}.$$

Для апериодических звеньев 2-го порядка при $\xi > 1$ имеем

1. Д.у. в операторной форме: $\left(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1\right)u = kx$

2. $R(p) = k$ - оператор воздействия;

3. $Q(p) = T^2 p^2 + 2\xi T p + 1$ - собственный оператор;

4. $W(p) = \dfrac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$ - передаточная функция;

5. $W(jw) = \dfrac{k\left(1 - T^2 w^2\right)}{\left(2\xi T w\right)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2} - j\dfrac{2k\xi T w}{\left(2\xi T w\right)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2}$ - частотная передаточная функция;

6. $U(w) = \dfrac{k\left(1 - T^2 w^2\right)}{\left(2\xi T w\right)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2}$ - действительная (вещественная) часть;

7. $V(w) = -\dfrac{2k\xi T w}{\left(2\xi T w\right)^2 + \left(1 - T^2 w^2\right)^2}$ - мнимая часть;

8. $$A(w)=\frac{k}{\sqrt{(2\xi Tw)^2+\left(1-T^2w^2\right)^2}}$$ - модуль передаточной функции (амплитудная частотная функция).

9. $$\varphi(w)=-\mathrm{arctg}\,\frac{2\xi Tw}{1-T^2w^2}$$ - фазовая частотная функция.

10. Переходная функция:

$$h(t)=C_1e^{-\frac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}+C_2e^{-\frac{-\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}+k\cdot 1(t)$$

$$h_0(t)=k\cdot 1(t)\left[\frac{-\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{\frac{-\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}-e^{-\frac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}+1\right]$$

11. Весовая функция

$$w(t)=h'(t)=C_1\frac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}e^{\frac{-\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}-$$

$$-C_2-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}e^{\frac{-\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}$$

$$w_0(t)=k\cdot 1(t)\left[\frac{2\xi^2-1}{2T\sqrt{\xi^2-1}}-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}\cdot e^{-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}{2T\sqrt{\xi^2-1}}e^{-\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-1}}{T}t}\right]$$