

# Презентация по научной работе на тему

«Численные методы и оптимизация  
траекторий межпланетных траекторий»

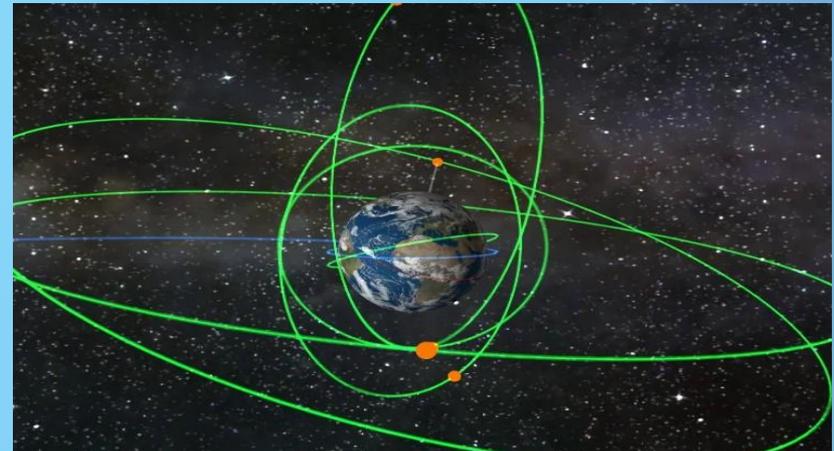
НИЯУ МИФИ,  
2020

Подготовили студенты группы Б20-215  
Халимов Тимур и Кузин Алексей  
Руководитель практики :к. ф.-м. н.  
Шильников Кирилл Евгеньевич

# Задачи, поставленные на второй семестр

Суть нашего проекта заключается в моделировании и оптимизации траектории полетов космических аппаратов при помощи вычислительных алгоритмов, основанных на методах численного исчисления.

На второй семестр была поставлена задача решения задачи двух тел при помощи численных методов, а конкретно методов семейства Рунге-Кутта и методов Эйлера. Далее провести их сравнение с аналитическим решением, исследовать методы на сходимость, построить соответствующие различным значениям шага по сетке разностные схемы.



# Задача двух тел

$$\vec{r}''' + \chi \cdot \frac{r}{r^3} = 0, \quad \chi = Gm_0.$$

Для случая двух подвижных тел получим два уравнения:

$$m_1 \vec{r}_1'' - G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = 0,$$

$$m_1 \vec{r}_2'' + G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = 0$$

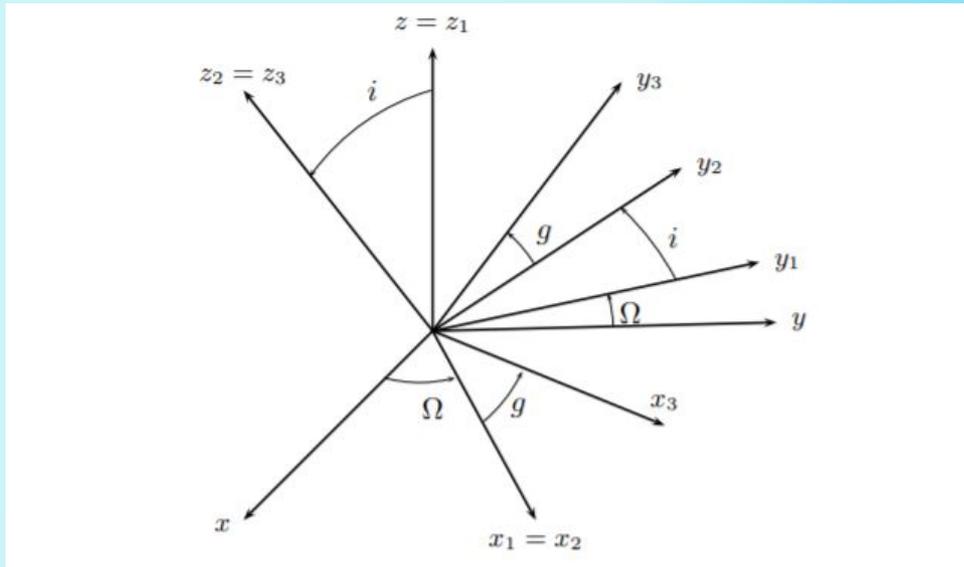
$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится интеграл площади, энергии и Лапласа :

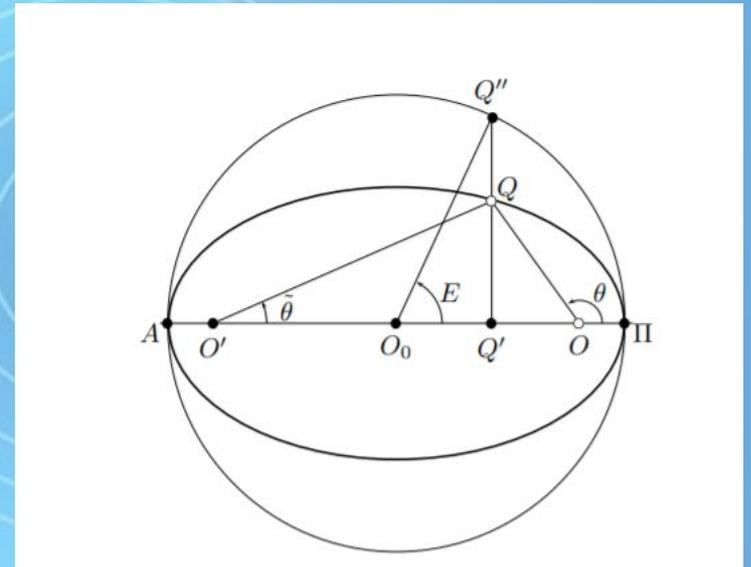
$$\vec{r} \times \vec{r}' = c,$$

$$\frac{(\vec{r}')^2}{2} - \frac{\chi^2}{r} = h$$
$$\vec{r}' \times c = \vec{r}$$

# Задача двух тел



Преобразование координат



Работа с эллиптической орбитой

# Задача Коши

Рассмотрим одну из наиболее часто встречающихся задач — задачу Коши. По заданному условию находится функция  $x(t)$  при помощи интегрирования и дальнейшего использования начального условия. Ниже приведен общий вид задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

$$x(0) = x_0$$

Далее, при помощи метода сеток и конечных разностей ищется сеточная функция, область определения и значения которой дискретны. Ниже приведены различные методы нахождения искомой сеточной функции:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n, t_n) \quad - \text{ явная схема Эйлера}$$

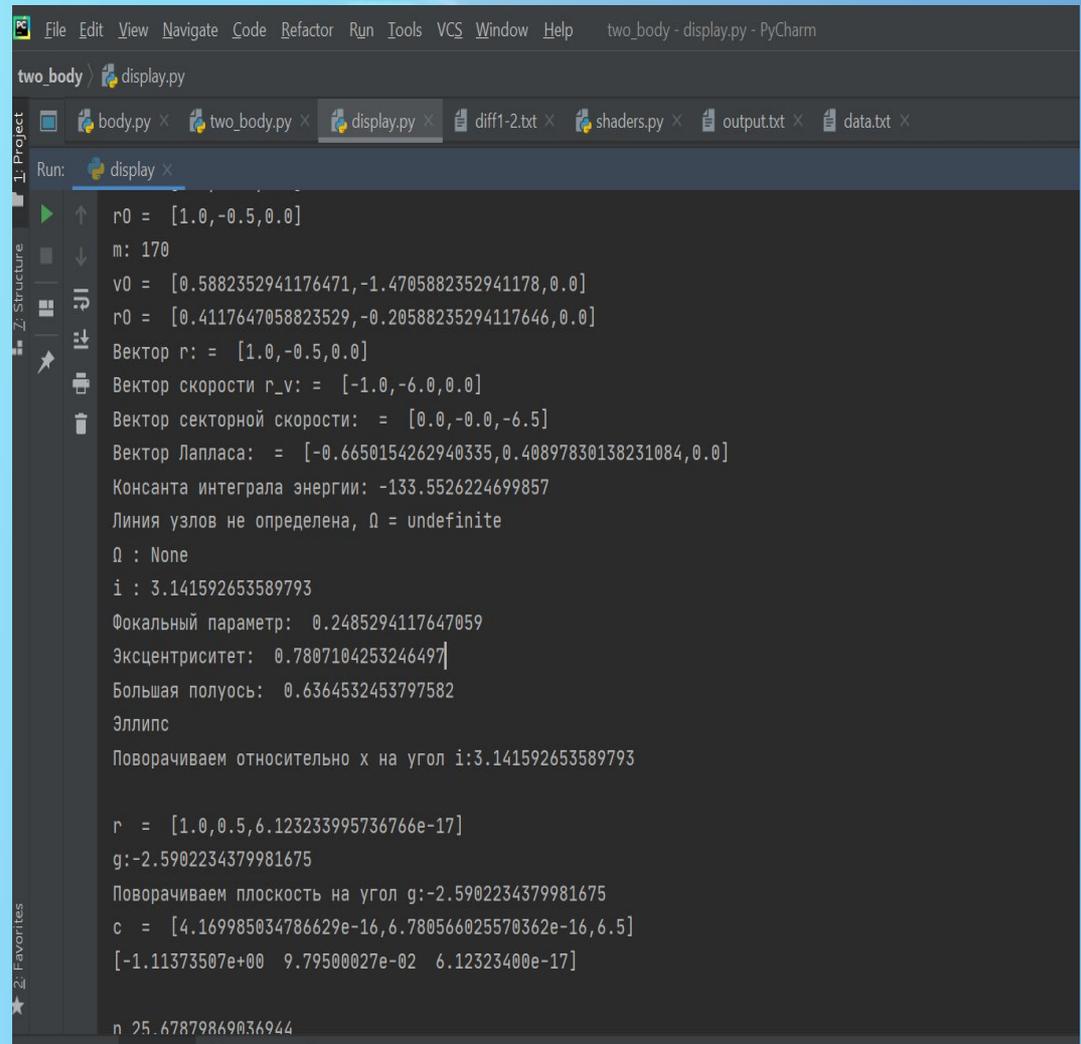
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_{n+1}, t_{n+1}) \quad - \text{ неявная схема Эйлера}$$

$$\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau} = f(x_n, t_n) \quad - \text{ схема центральной разности}$$

# Сходимость методов

Метод	Локальная ошибка	Глобальная ошибка
Явный метод Эйлера		
Неявный метод Эйлера		
Схема с центральной разностью		
Классический метод Рунге-Кутта 4-го порядка		
Метод Рунге-Кутта 2-го порядка		

На данном изображении приведен вывод программы, показывающий параметры, нужные для аналитического решения.

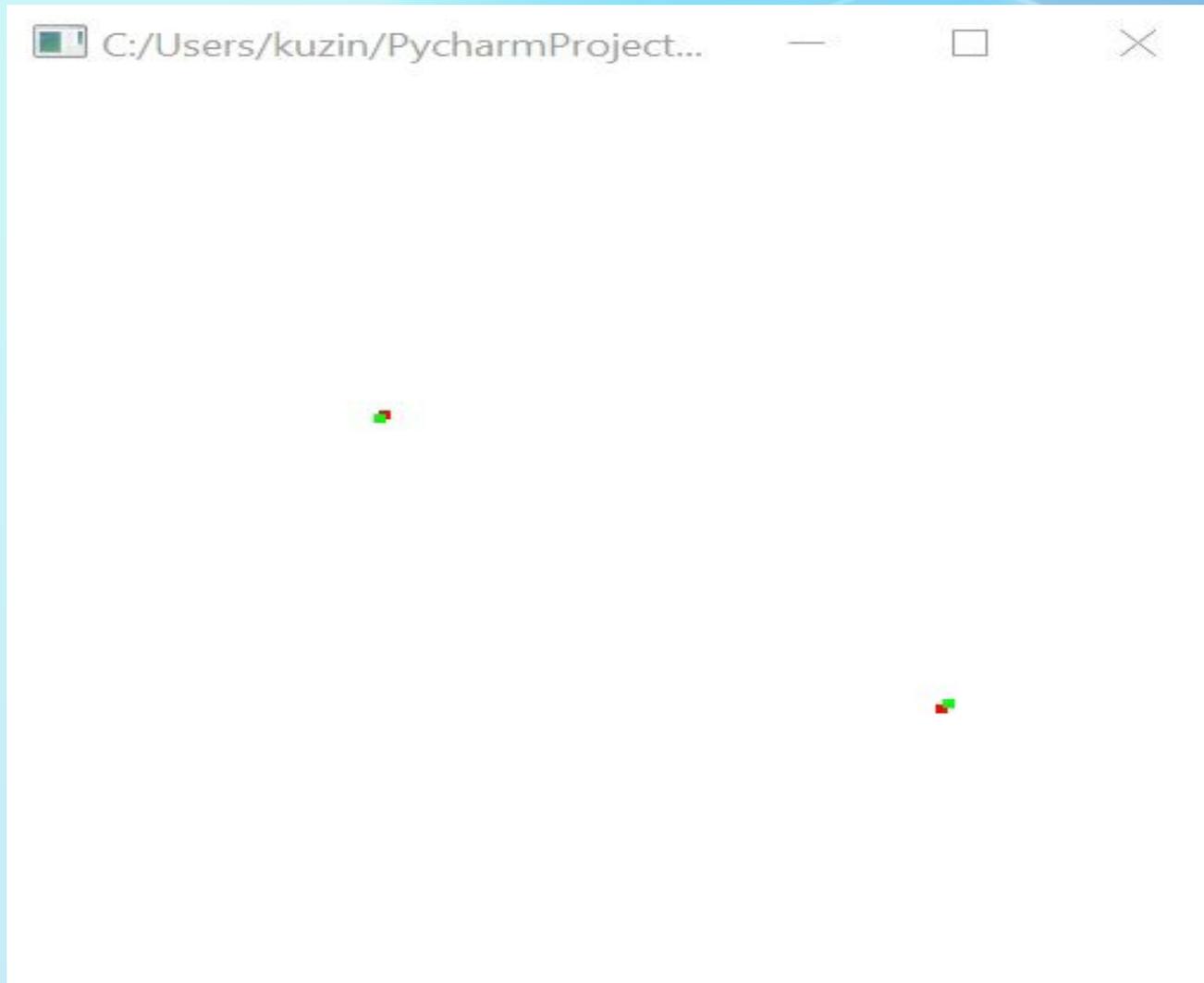


```
File Edit View Navigate Code Refactor Run Tools VCS Window Help two_body - display.py - PyCharm
two_body display.py
body.py two_body.py display.py diff1-2.txt shaders.py output.txt data.txt
Run: display
r0 = [1.0, -0.5, 0.0]
m: 170
v0 = [0.5882352941176471, -1.4705882352941178, 0.0]
r0 = [0.4117647058823529, -0.20588235294117646, 0.0]
Вектор r: = [1.0, -0.5, 0.0]
Вектор скорости r_v: = [-1.0, -6.0, 0.0]
Вектор секторной скорости: = [0.0, -0.0, -6.5]
Вектор Лапласа: = [-0.6650154262940335, 0.40897830138231084, 0.0]
Консанта интеграла энергии: -133.5526224699857
Линия узлов не определена,  $\Omega$  = indefinite
 $\Omega$  : None
i : 3.141592653589793
Фокальный параметр: 0.2485294117647059
Эксцентриситет: 0.7807104253246497
Большая полуось: 0.6364532453797582
Эллипс
Поворачиваем относительно x на угол i:3.141592653589793

r = [1.0, 0.5, 6.123233995736766e-17]
g:-2.5902234379981675
Поворачиваем плоскость на угол g:-2.5902234379981675
c = [4.169985034786629e-16, 6.780566025570362e-16, 6.5]
[-1.11373507e+00 9.79500027e-02 6.12323400e-17]

n 25.67879869036944
```

# Пример работы программы



- Напомним, что есть сходимость и порядок сходимости метода. Сходимость:  $\|x_\tau - \chi_\tau\| \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\|x_\tau - \chi_\tau\| \leq C\tau^q$ , где  $q$  - порядок сходимости,  $\chi_\tau$  - значение аналитического решения при данном разбиении сетки в данный момент, значение численного метода при данном разбиении сетки в данный момент,  $f(\tau) = \|x_\tau - \chi_\tau\|$  - разностная функция,  $C$  - некоторая константа Рунге - Кутта.
- Согласно теории, порядок сходимости  $q$  у классического метода Рунге-Кутты - 4, у схемы Эйлера - 1. Иначе говоря,  $f(\tau) = O(\tau^4)$  при  $\tau \rightarrow 0$  для Рунге-Кутты,  $f(x) = O(\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$  для явной схемы Эйлера. То есть в некоторой окрестности нуля мы ожидаем, что разностная функция, например для Рунге-Кутты, будет ограничена сверху  $\tau^4$ , умноженной на константу. Мы решили брать максимальное значение  $f(\tau)$  в окрестности афелия (в перигелии по нашим наблюдениям скорость сходимости получается ниже) в окрестности нуля  $\tau$ . Качественно, мы ожидаем получить для явной схемы Эйлера на графике нуля прямую, для

# Разностные схемы

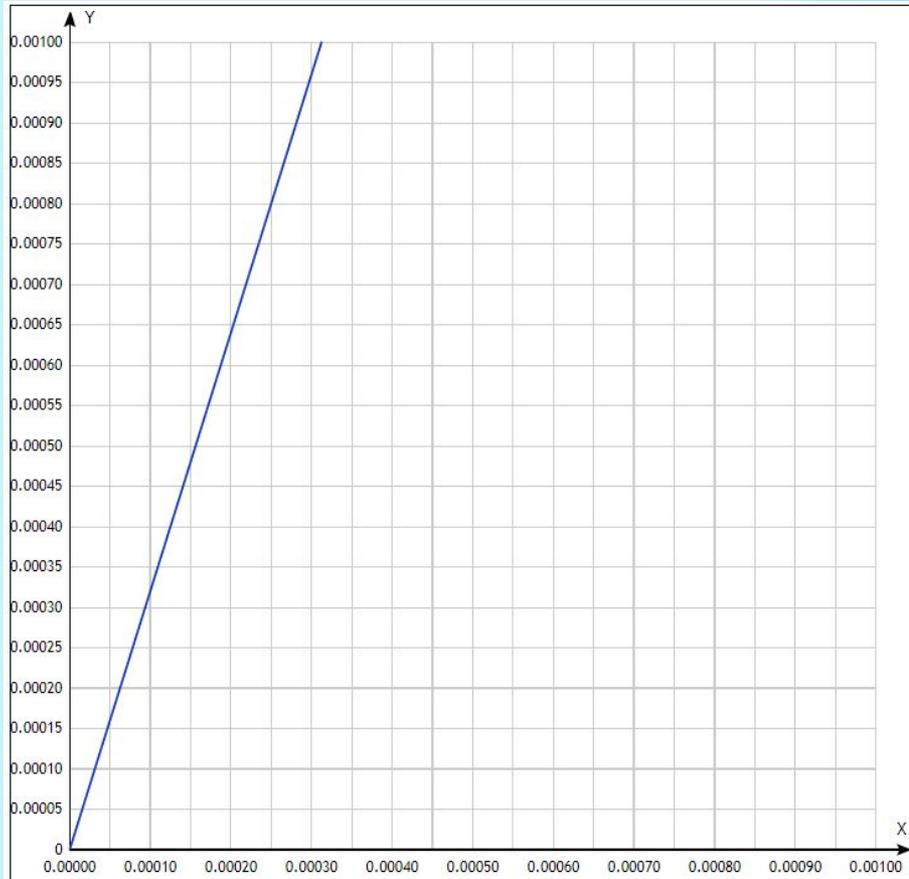


Схема для явного метода Эйлера  
порядка

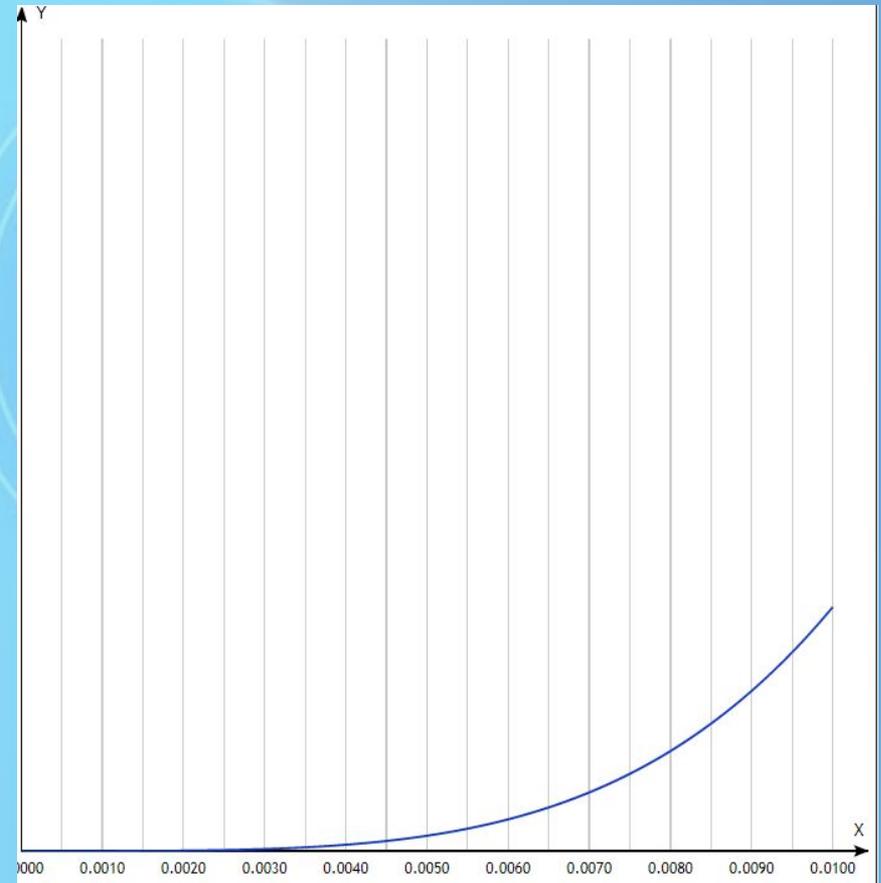


Схема для метода Рунге-Кутта 4

## Список литературы:

- [1] Федоренко Р.П., «Введение в вычислительную физику». – 1994
- [2] Калиткин Н.Н., «Численные методы». – 1978
- [3] Муха В.С., «Вычислительные методы и компьютерная алгебра». – 2010
- [4] Савельев И.В., «Курс физики – том 1 – Механика. Молекулярная физика». – 1989
- [5] Холшевников К.В., Титов В.Б., «Задача двух тел».- 2007

Ссылка на GitHub с исходными кодами:

[https://github.com/teodor-r/two\\_body](https://github.com/teodor-r/two_body)



# Процесс решения задачи

- Построение математической модели заданного физического процесса
- Компьютерное моделирование процесса при помощи построенной математической модели
- Нахождение аппроксимированной зависимости при помощи численных методов

# Полученные результаты

При решении задачи о движении тел, брошенного под углом к горизонту, использовались такие физические законы, как:  
II закон Ньютона, закон всемирного тяготения.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

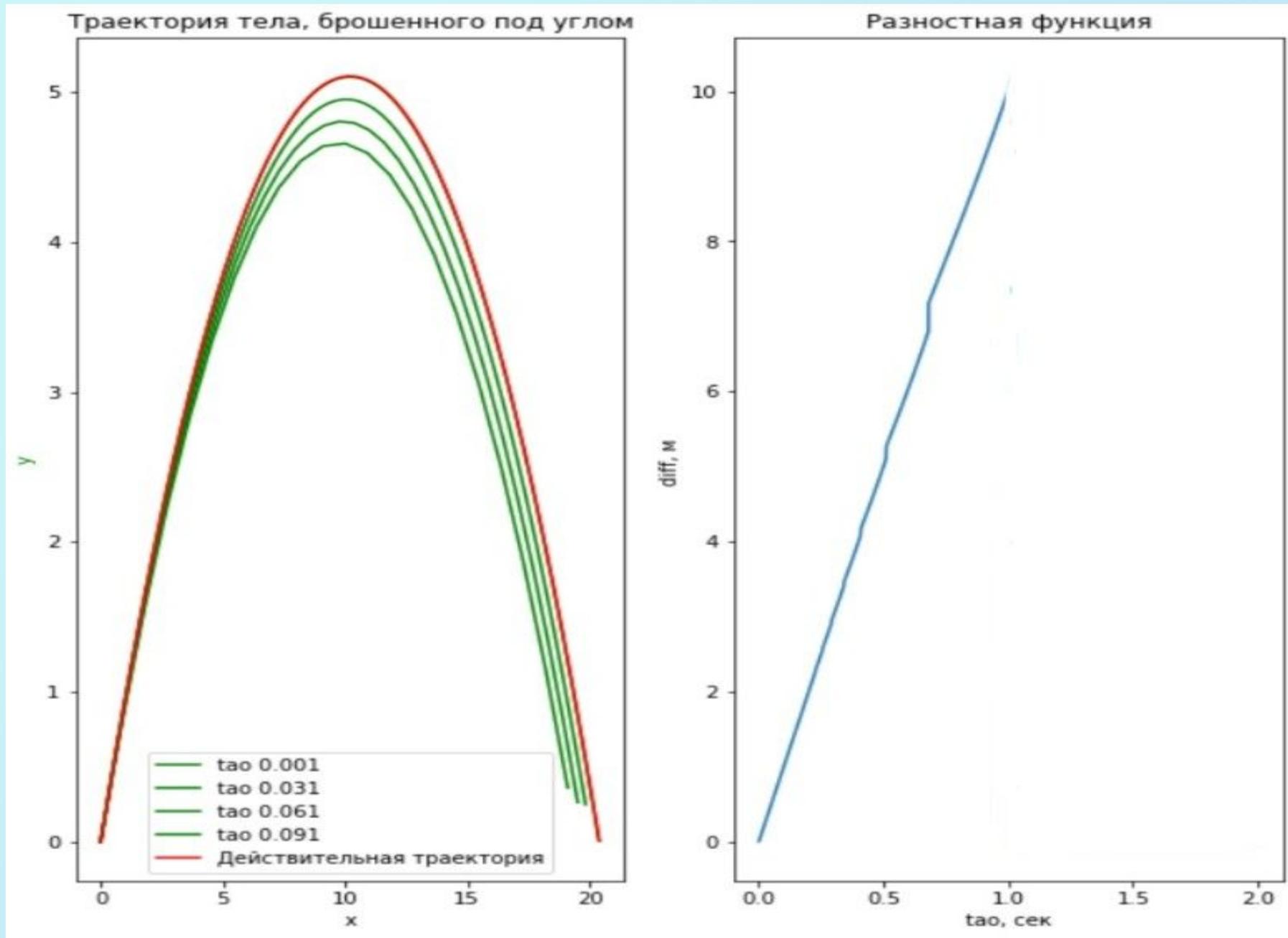
При решении использовалась явная схема Эйлера: был взят бесконечно малый промежуток времени, и для каждого значения искалось приращение радиус — вектора.

$$r_{n+1}^{\vec{}} = r_n^{\vec{}} + \tau \vec{v}$$

Получаем зависимость радиус — вектора от времени  
на выбранной временной сетке.

$$r_{n+1}^{\vec{}} = r_n^{\vec{}} + \tau(\vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t_n)$$

# Полученные результаты



200

МЯ  
СТ

# Полученные результаты

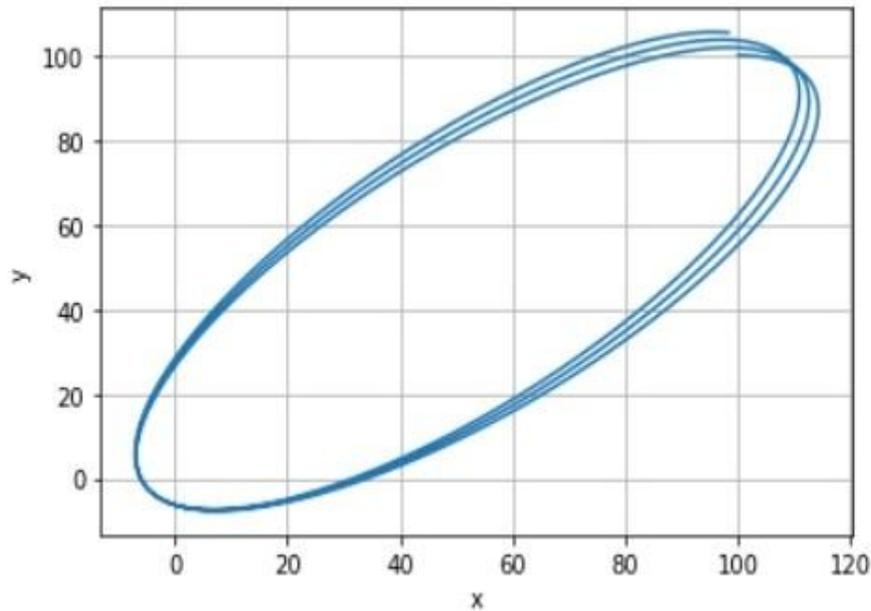
Далее была решена задача, в которой рассматривается два тела, одно из которых покоится, а другое движется под действием сил тяготения. В решении этой задачи были также использованы II закон Ньютона и закон всемирного тяготения.

Далее, при помощи явной схемы Эйлера была получена сеточная зависимость радиус — вектора от времени.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\gamma \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \\ \vec{F} &= m\vec{w} \\ \vec{w} &= -\gamma M \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} &= \int \vec{w} dt = -\gamma M \int \frac{\vec{r}}{r^3} dt\end{aligned}$$

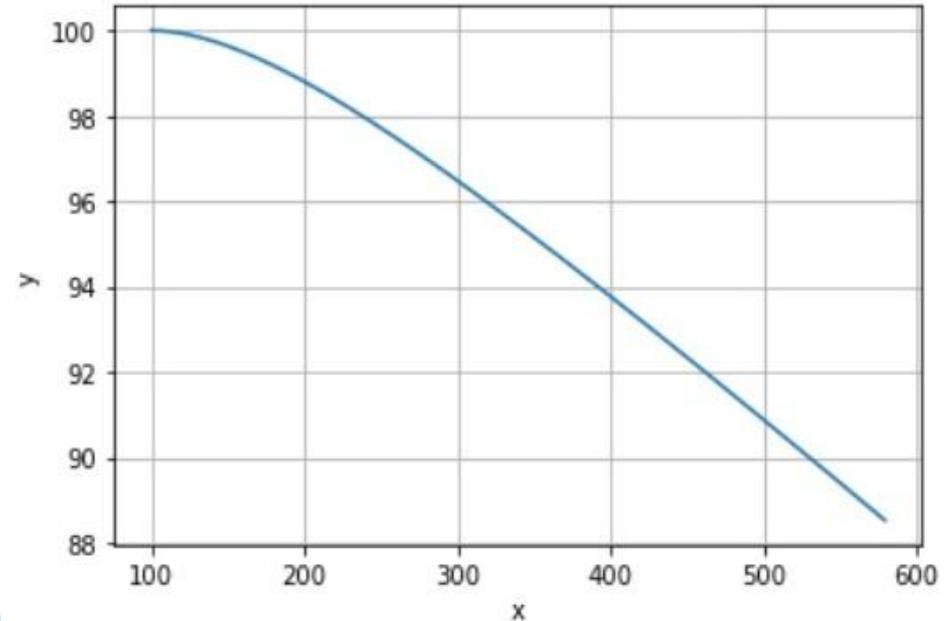
$$\begin{aligned}\frac{r_{n+1}^{\vec{r}} - r_n^{\vec{r}}}{\tau} &= \vec{v}(r_n^{\vec{r}}, t_n) \\ r_{n+1}^{\vec{r}} &= (-\gamma M \sum_{i=0}^n \frac{r_i^{\vec{r}}}{r_i^3} \tau + v_0) \tau + r_n\end{aligned}$$

# Полученные результаты



Тело движется в поле действия второго тела

Координаты неподвижного тела	(0,0)
Начальные координаты подвижного тела	(100,100)
Начальная скорость	(10, 0)
Масса неподвижного тела	100000



Тело преодолело притяжение второго тела и удаляется от него

Координаты неподвижного тела	(0, 0)
Начальные координаты подвижного тела	(100,100)
Начальная скорость	(100, 0)
Масса неподвижного тела	100000

# Задачи, которые предстоит решить

В данный момент мы решаем, так называемую, задачу двух тел. Её формулировка следующая: даны два тела, их массы, начальные скорости и радиус-векторы. Между телами действует лишь сила гравитационного притяжения. Требуется отыскать зависимость положения обеих тел от времени.

Для решения данной задачи был выбран классический метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

# Задача двух тел

$$\ln \cdot (c)^{-1} = \chi \cdot ((e)^{-1} - 1).$$

$$yz' - zy' = c_1, \quad zx' - xz' = c_2, \quad xy' - yx' = c_3$$

Решение задачи двух тел

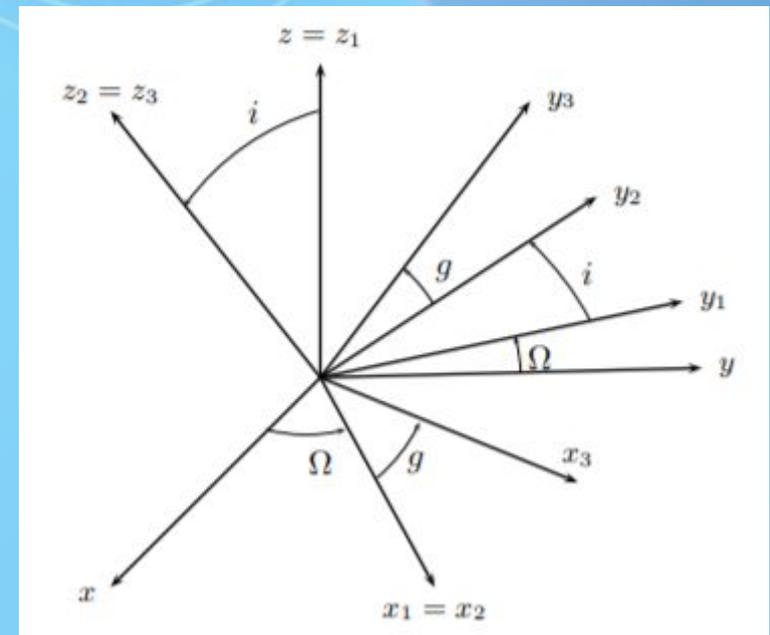
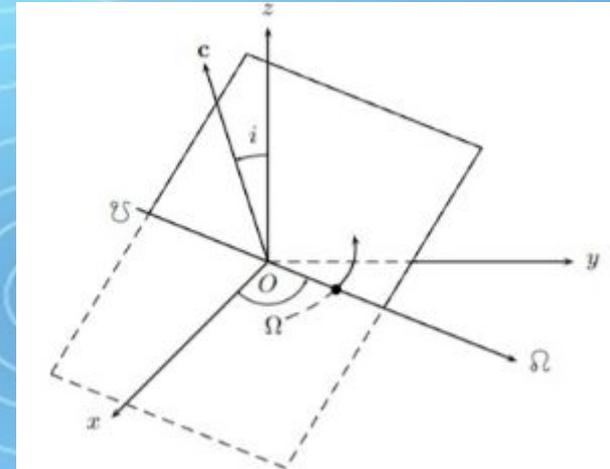
# Поворот пространства

При аналитическом решении мы используем повороты пространства:

$i$  :  $\cos(i) = \frac{(\vec{c}, \vec{z})}{|\vec{c}|}$  - наклонение

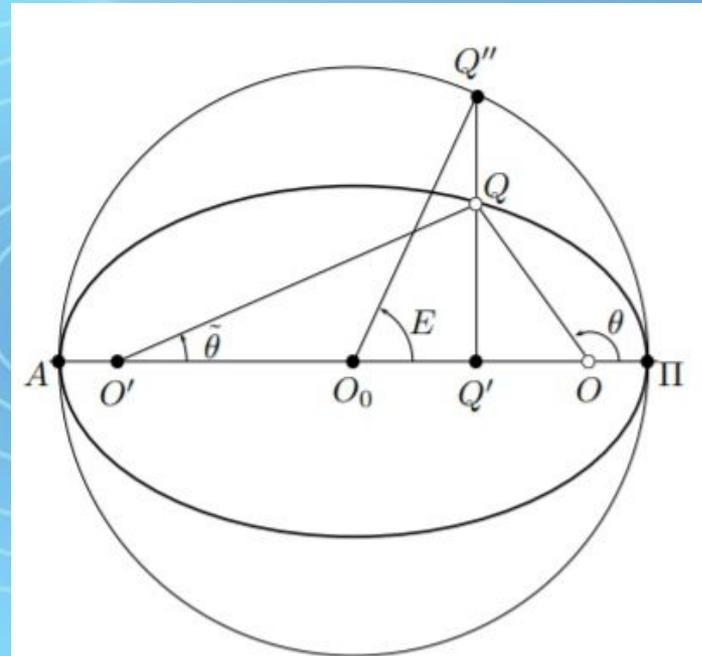
$\Omega$  : угол между линией узлов и осью  $Ox$

$g$  : угол поворота  $Ox$  для совпадения с перицентром

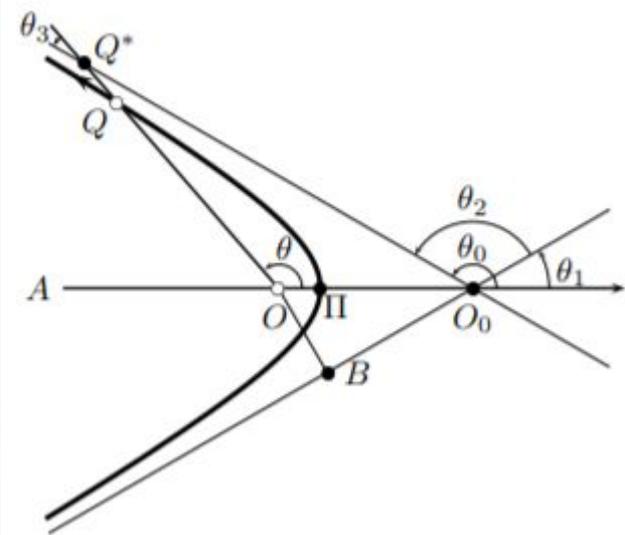


# Виды траекторий движения

Эллиптическая траектория движения тел



Гиперболическая траектория



# СВЯЗЬ ЭКСЦЕНТРИЧНОЙ АНОМАЛИИ С ИСТИННОЙ

Имеем выражение для истинной  
и эксцентричной аномалии:

Дифференцируем его:

Переписываем полученное  
выражение, где  $n$  константа для  
средней аномалии:

Интегрируем полученное  
выражение, получаем ( $M$  –  
средняя аномалия):

Далее переписываем и решаем  
это уравнение просто  
рекуррентно с начальной  
подстановкой  $E_0 = M$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

$$\dot{E} = \frac{\kappa \sin \theta}{a^{3/2} \sqrt{1-e^2} \sin E} = \frac{\kappa a^{-3/2}}{1-e \cos E},$$

$$(1 - e \cos E) dE = n dt,$$

$$E - e \sin E = M,$$

$$M = n(t - T)$$

$$f(E) = M + e \sin E$$

# Метод Рунге-Кутты

По своей сути, задача двух тел – один из случаев задачи Коши, рассмотренной ранее. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка – один из методов решения таких задач.

Метод Рунге-Кутты заключается в использовании следующей итерационной формулы ( $h$  – величина разбиения сетки):

Классический метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на каждом шаге имеет порядок  $O(h^5)$ , а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок  $O(h^4)$

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

# Явные методы Рунге-Кутты

Семейство явных методов Рунге — Кутты является обобщением как явного метода Эйлера, так и классического метода Рунге — Кутты четвёртого порядка.  $h$  — величина разбиения сетки по  $x$ .

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i \cdot k_i$$

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1),$$

...

$$k_s = f(x_n + c_s h, y_n + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \dots + a_{s,s-1} h k_{s-1})$$

Коэффициенты  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  можем найти по формулам из таблицы, приведенной справа. Такую упорядоченную таблицу называют таблицей Батчера.

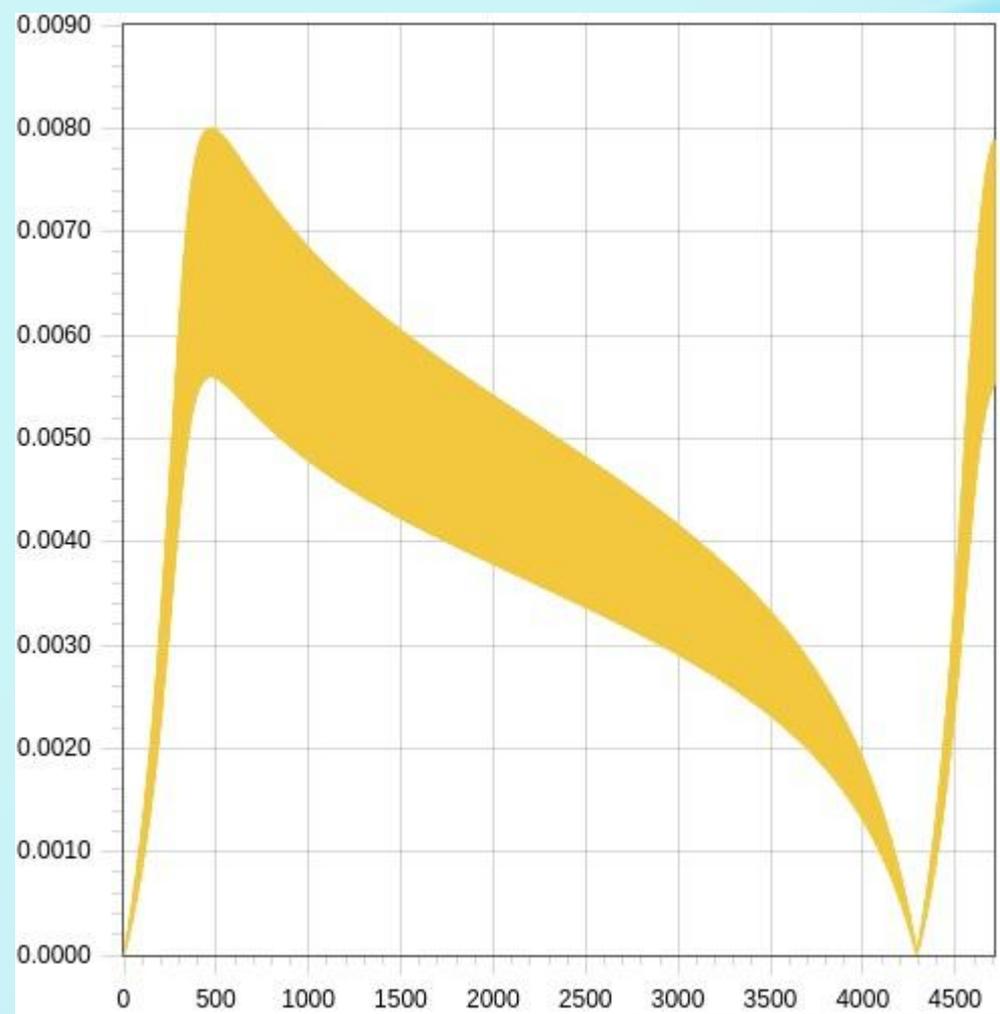
0					
$c_2$	$a_{21}$				
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	...	$a_{s,s-1}$	
	$b_1$	$b_2$	...	$b_{s-1}$	$b_s$

# Метод Рунге - Кутты с автоматическим выбором шага

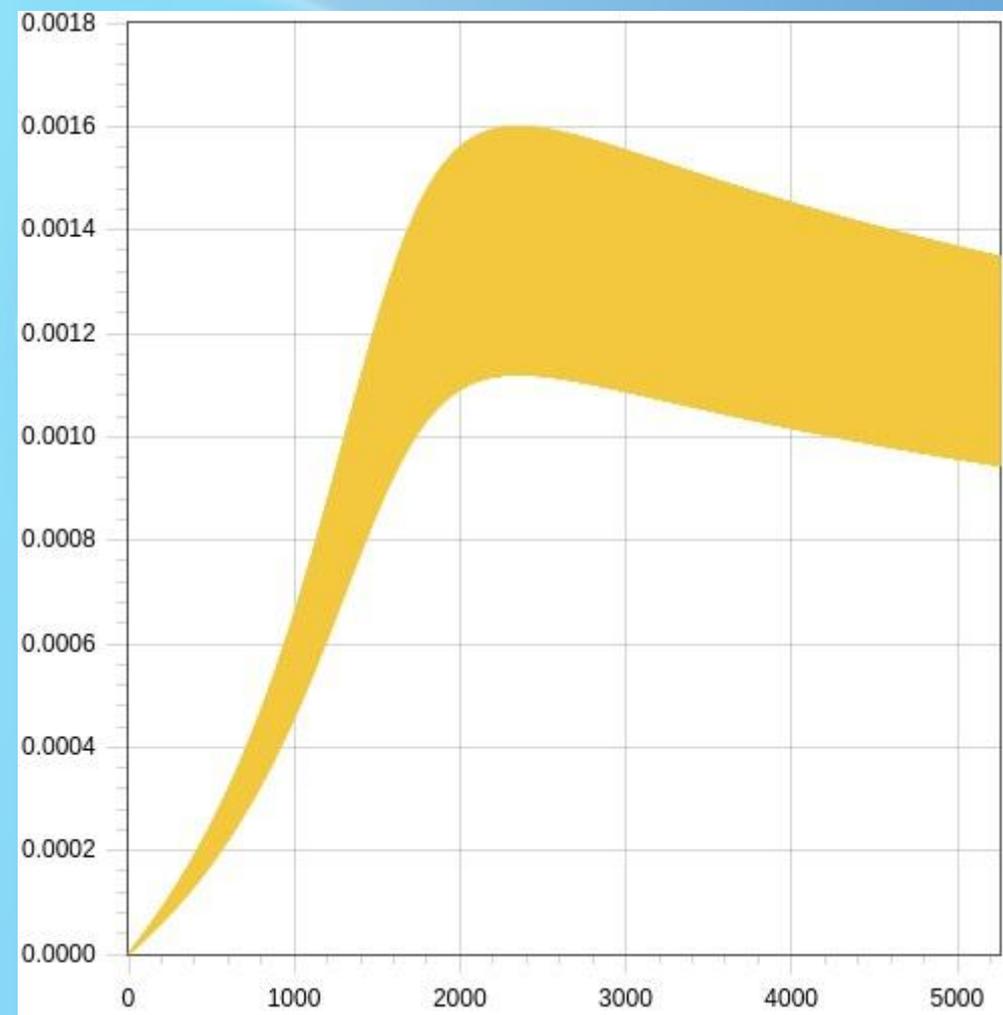
Пусть  $y(x, h)$  - приближенное значение решения с порядком точности  $p$  в точке  $x$  с шагом по сетке  $h$ . Тогда можно рассмотреть погрешность данного решения, используя приближенное решение с удвоенным шагом  $y(x, 2h)$  того же порядка  $p$ . Выберем величину  $\varepsilon$  - положительный параметр, обозначающий погрешность:

$$\left| \frac{y(x, h) - y(x, 2h)}{2^p - 1} \right| \leq \varepsilon$$

Для автоматического выбора шага в программе заранее задается значение  $\varepsilon$ , и на каждом шаге подбирают такое  $h$ , что выполняется данное выше неравенство.

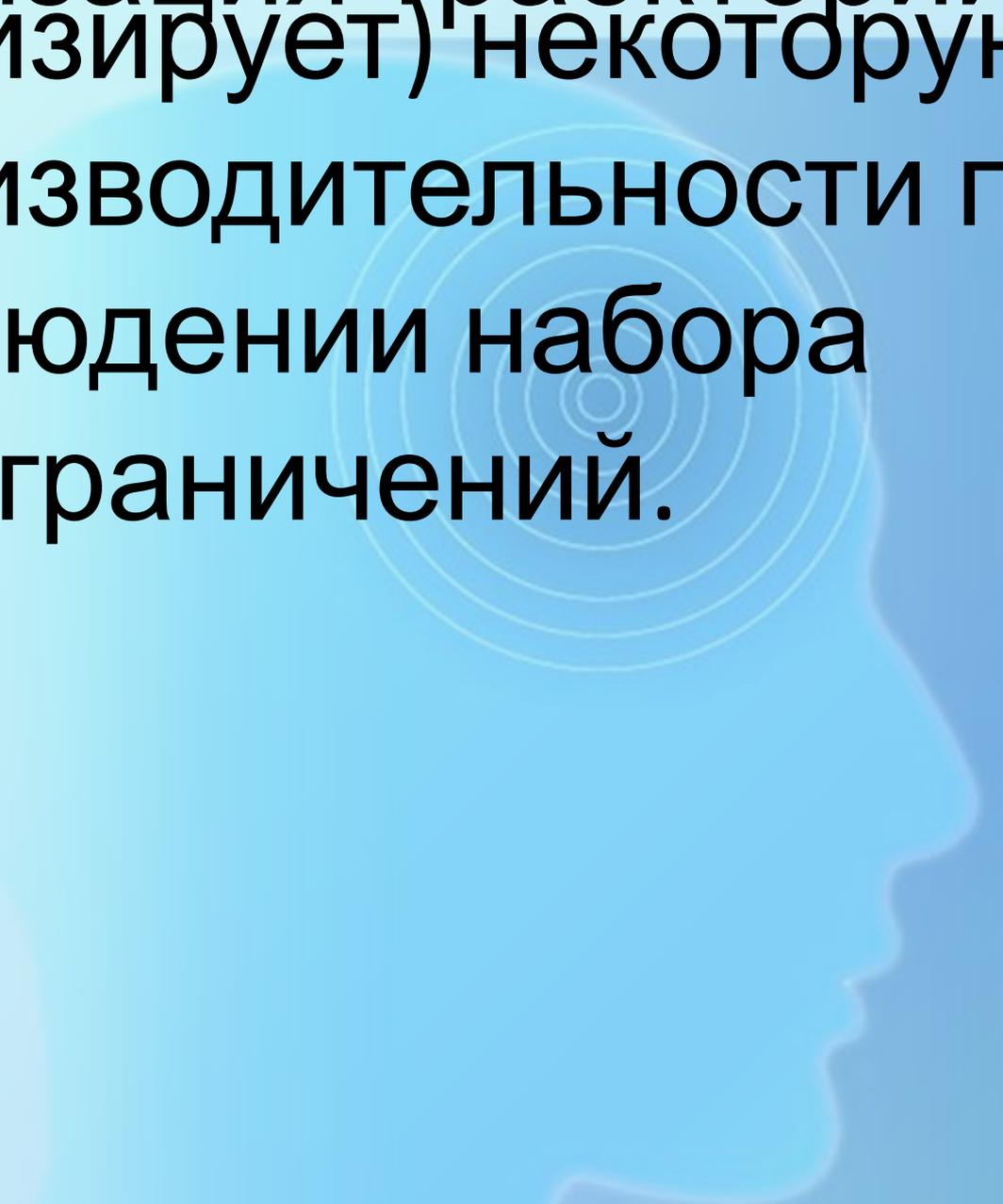


$$h = 5 \cdot 10^{-4}$$



$$h = 1 \cdot 10^{-4}$$

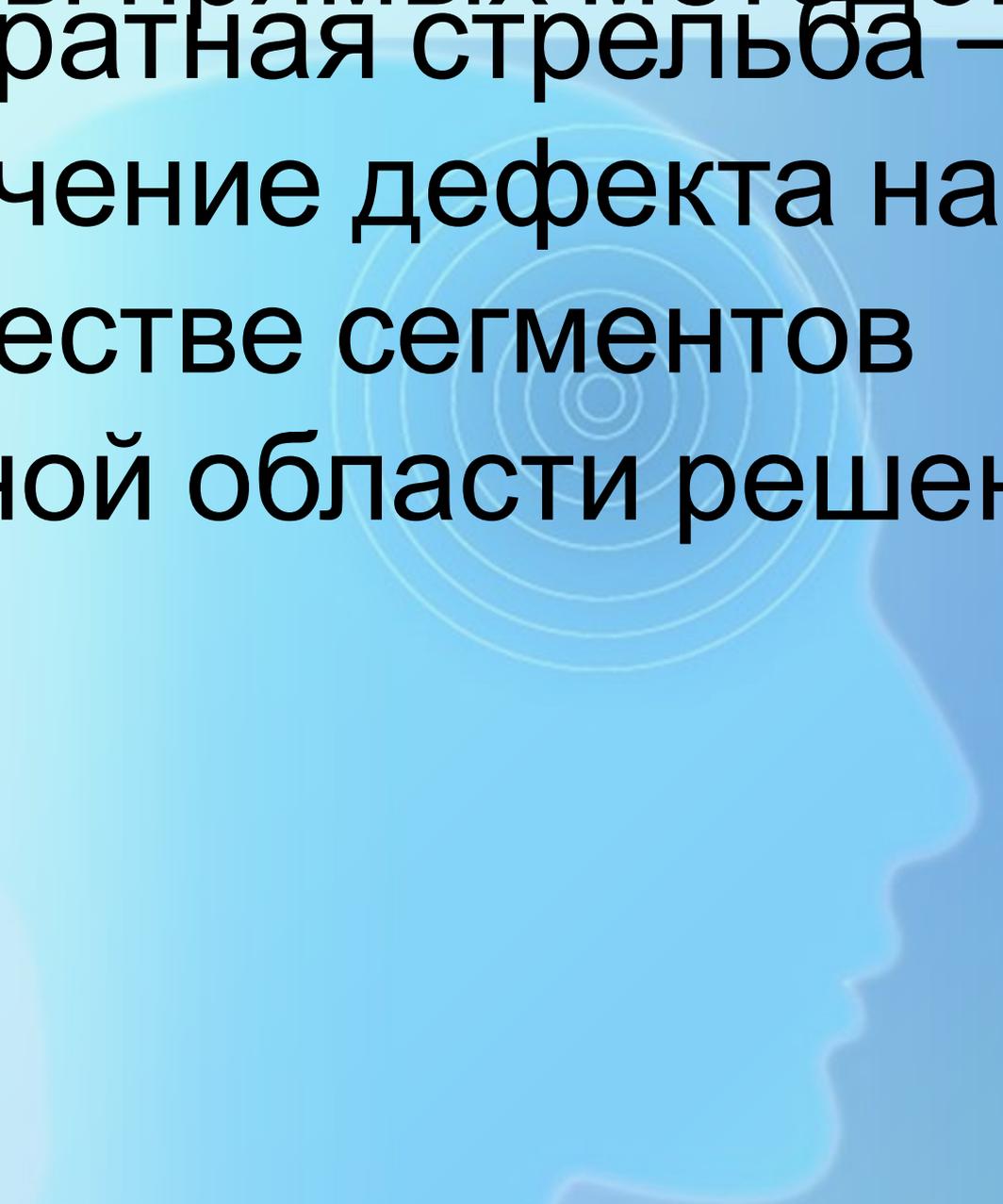
торый сводит к минимуму (или  
Оптимизация траектории  
максимизирует) некоторую  
меру производительности при  
соблюдении набора  
ограничений.



оптимизации траектории,  
Прямой метод решения задачи оптимизации  
преобразования ее в задачу оптимизации  
оптимизации с ограниченными  
параметрами.

2) Решить эту задачу  
оптимизации.

Примеры прямых методов  
Многократная стрельба –  
ограничение дефекта на  
множестве сегментов  
изначальной области решения



Построение оптимальной  
Планы на ближайшее время  
траектории для тела,  
начинающего движение от  
Земли до Марса с учетом лишь  
сил притяжения со стороны  
Солнца.

