Презентация по научной работе на тему

«Численные методы и оптимизация траекторий межпланетных траекторий»

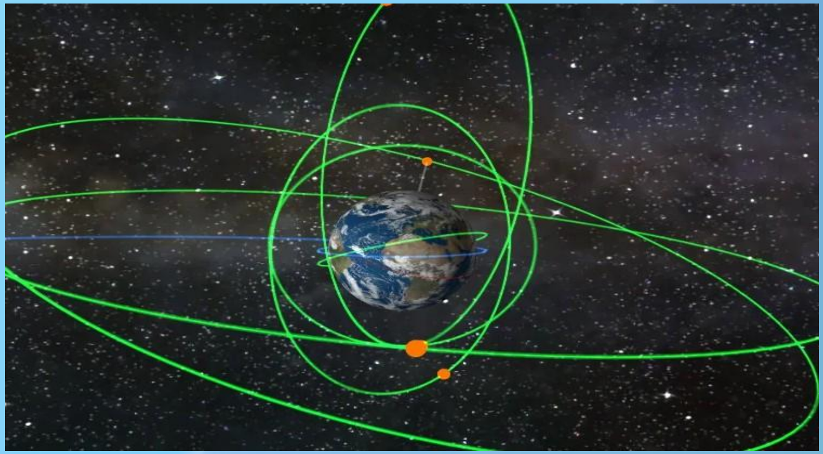
Подготовили студенты группы Б20-215
Халимов Тимур и Кузин Алексей
Руководитель практики :к. ф.-м. н.
Шильников Кирилл Евгеньевич

НИЯУ МИФИ,
2020

Задачи, поставленные на второй семестр

Суть нашего проекта заключается в моделировании и оптимизации траектории полетов космических аппаратов при помощи вычислительных алгоритмов, основанных на методах численного исчисления.

На второй семестр была поставлена решения задачи двух тел при помощи численных методов, а конкретно методов семейства Рунге-Кутта и методов Эйлера. Далее провести их сравнение с аналитическом решением, исследовать методы на сходимость, построить соответствующие различным значениям шага по сетке разностные схемы.



Задача двух тел

$$\vec{r}'' + \chi \cdot \frac{r}{r^3} = 0, \qquad \chi = Gm_0.$$

Для случая двух подвижных тел получим два уравнения:

$$\mathrm{m}_1\overrightarrow{r_1''} - G\frac{m_1 m_2}{r^3}\ \vec{r} = 0,$$

$$\mathrm{m}_1\overrightarrow{r_2''} + G\frac{m_1 m_2}{r^3}\ \vec{r} = 0$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}.$$

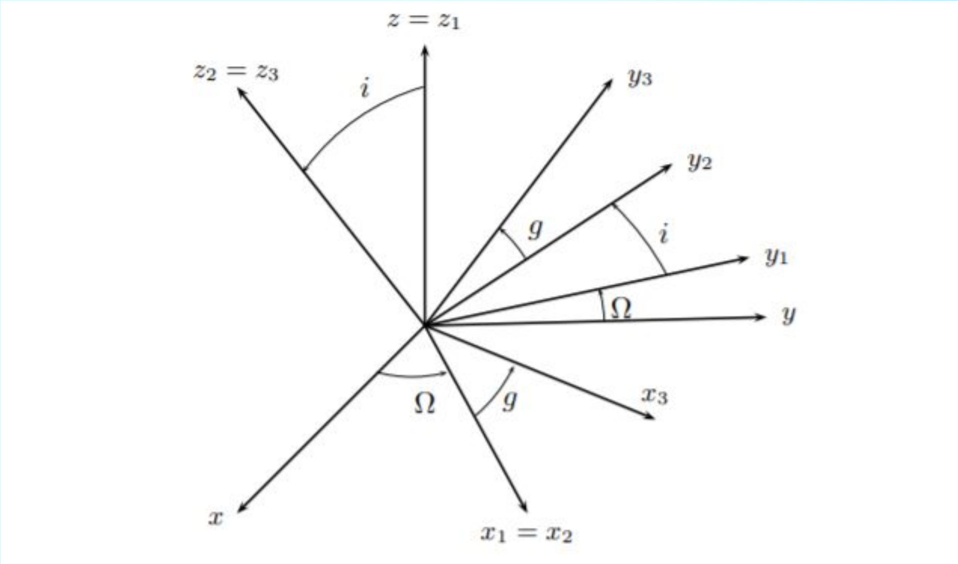
Для дальнейших вычислений нам понадобится интеграл площади, энергии и Лапласа :

$$\vec{r} \times \overrightarrow{r'} = c,$$

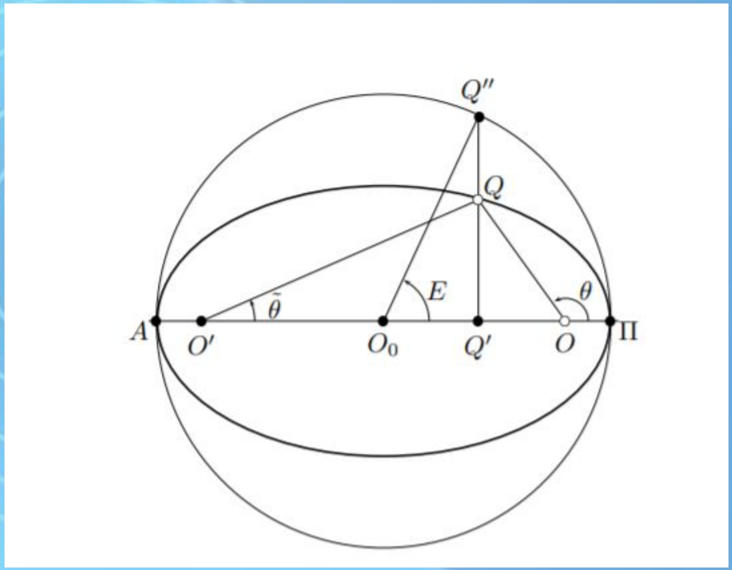
$$\frac{\left(\overrightarrow{\vec{r}'}\right)^2}{2} - \frac{\chi^2}{r} = \mathrm{h}$$

$$\overrightarrow{r'} \times c \quad \vec{r}$$

Задача двух тел



Преобразование координат



Работа с эллиптической орбитой

Задача Коши

Рассмотрим одну из наиболее часто встречающихся задач — задачу Коши. По заданному условию находится функция x(t) при помощи интегрирования и дальнейшего использования начального условия. Ниже приведен общий вид задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)\,,$$

$$x(0) = x_0$$

Далее, при помощи метода сеток и конечных разностей ищется сеточная функция, область определения и значения которой дискретны.
Ниже приведены различные методы нахождения искомой сеточной функции:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n, t_n)$$ - явная схема Эйлера

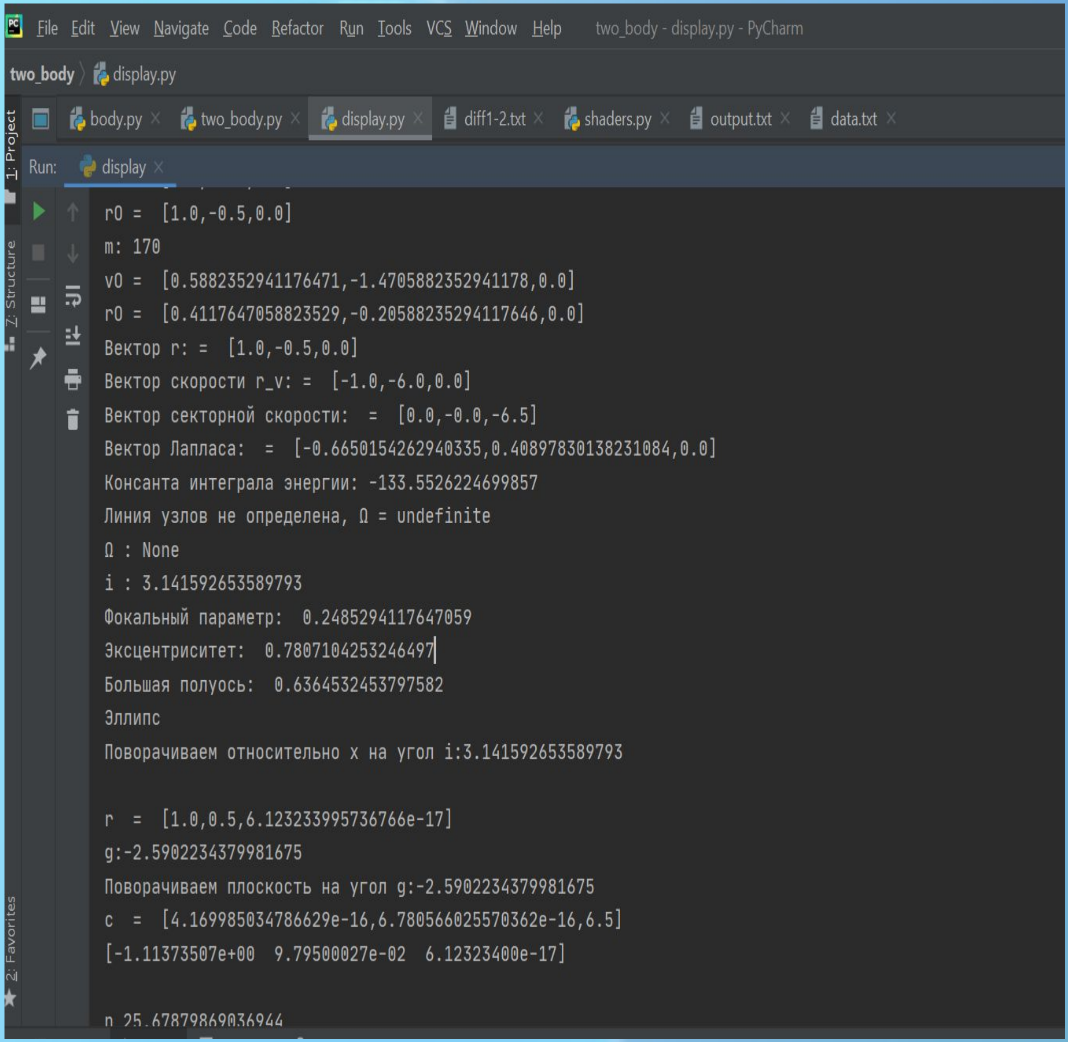
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_{n+1}, t_{n+1})$$ - неявная схема Эйлера

$$\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\tau} = f(x_n, t_n)$$ - схема центральной разности

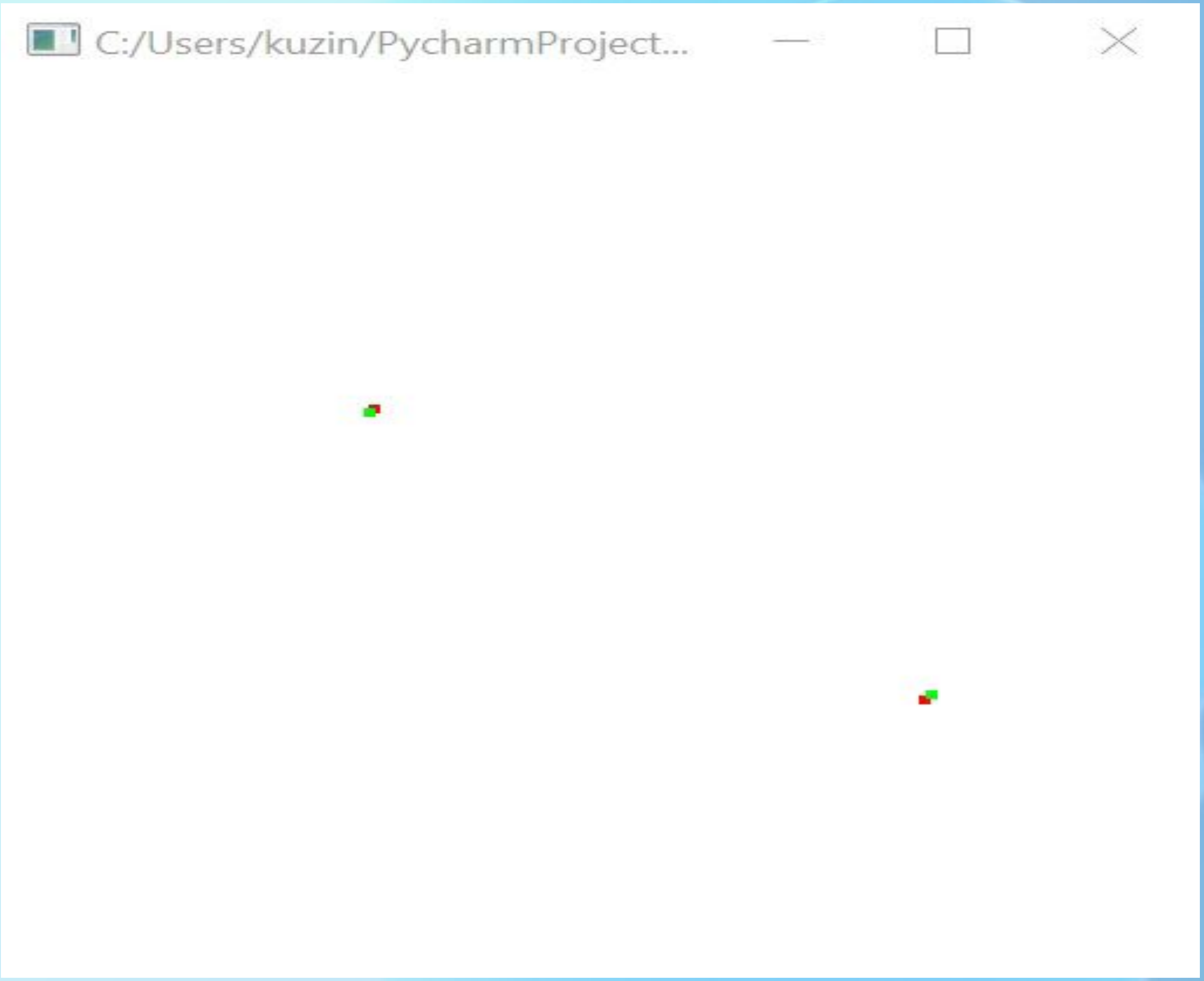
Сходимость методов

Метод	Локальная ошибка	Глобальная ошибка
Явный метод Эйлера		
Неявный метод Эйлера		
Схема с центральной разностью		
Классический метод Рунге-Кутта 4-го порядка		
Метод Рунге-Кутта 2-го порядка		

На данном изображении приведен вывод программы, показывающий параметры, нужные для аналитического решения.



Пример работы программы



- Напомним, что есть сходимость и порядок сходимости метода. Сходимость: $||x_\tau - \chi_\tau|| \to 0$ при $\tau \to 0$, $||x_\tau - \chi_\tau|| \le C\tau^q$, где q - порядок сходимости, χ_τ – значение аналитического решения при данном разбиении сетки в данный момент, значение численного метода при данном разбиении сетки в данный момент, $f(\tau) = ||x_\tau - \chi_\tau||$ – разностная функция, C – некоторая константа Рунге – Кутта.
- Согласно теории, порядок сходимости q у классического метода Рунге-Кутты - 4, у схемы Эйлера - 1. Иначе говоря, $f(\tau) = O(\tau 4)$ при $\tau \to 0$ для Рунге-Кутты, $f(x) = O(\tau)$ при $\tau \to 0$ для явной схемы Эйлера. То есть в некоторой окрестности нуля мы ожидаем, что разностная функция, например для Рунге-Кутты, будет ограничена сверху τ 4 , умноженной на константу. Мы решили брать максимальное значение f(τ) в окрестности афелия(в перигелии по нашим наблюдениям скорость сходимости получается ниже) в окрестности нуля τ . Качественно, мы ожидаем получить для явной схемы Эйлера на графике нуля прямую, для

Разностные схемы

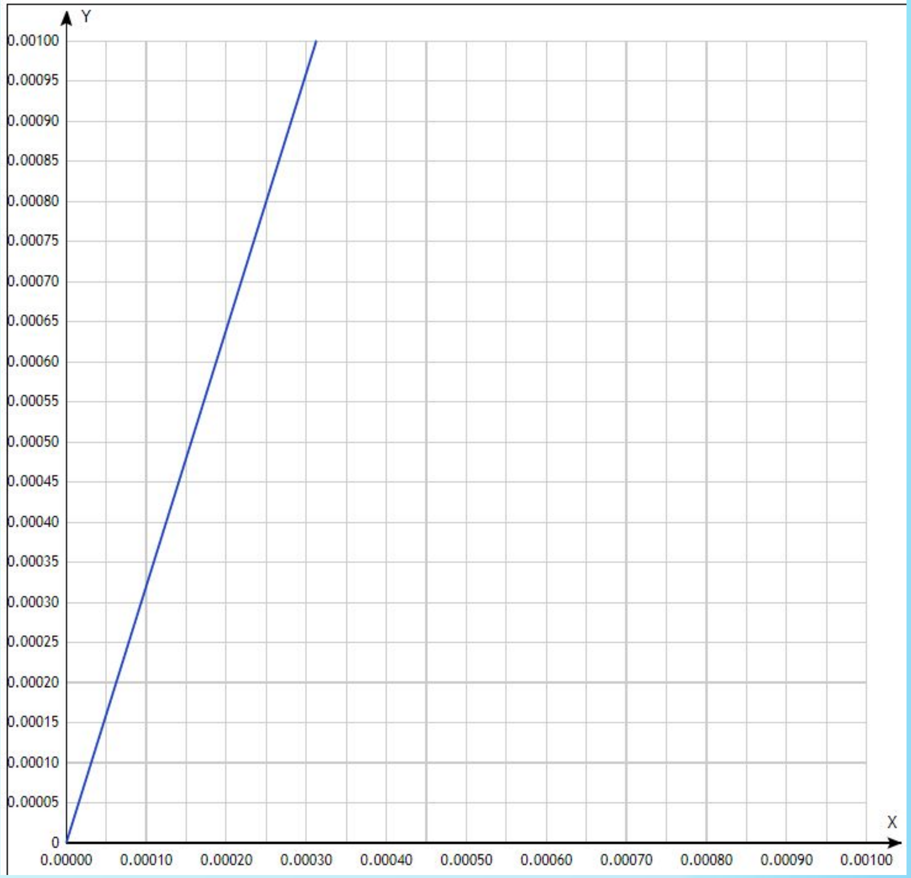


Схема для явного метода Эйлера

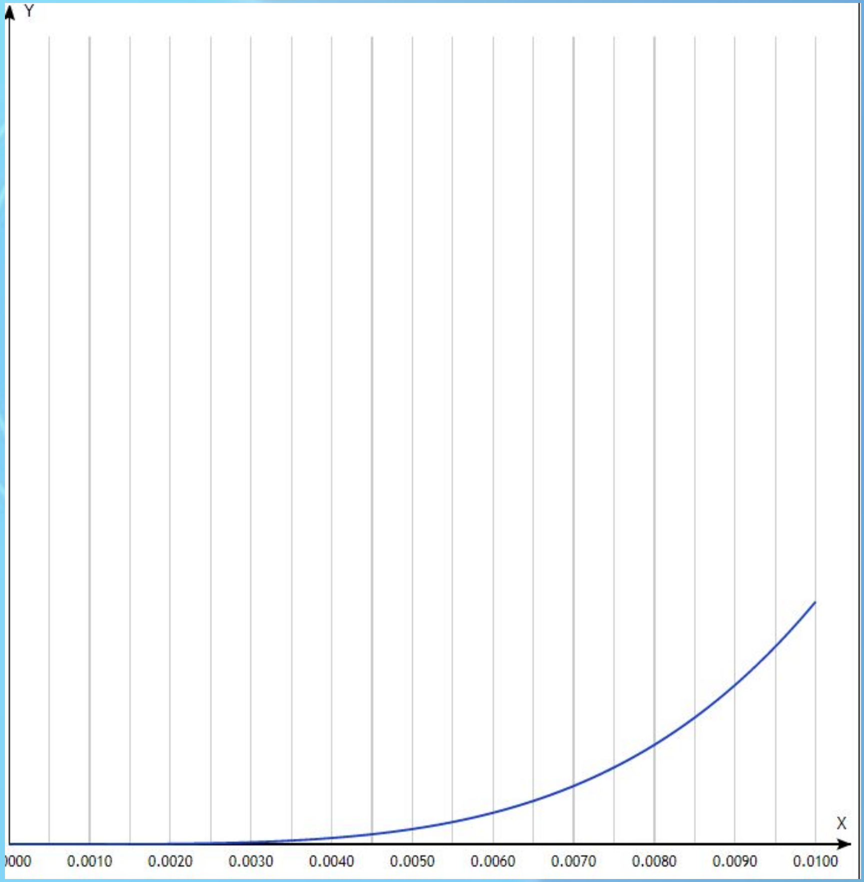


Схема для метода Рунге-Кутта 4 порядка

Список литературы:

[1] Федоренко Р.П., «Введение в вычислительную физику». – 1994
[2] Калиткин Н.Н., «Численные методы». – 1978
[3] Муха В.С., «Вычислительные методы и компьютерная алгебра». – 2010
[4] Савельев И.В., «Курс физики – том 1 – Механика. Молекулярная физика». – 1989
[5] Холшевников К.В., Титов В.Б., «Задача двух тел».- 2007

Ссылка на GitHub с исходными кодами:

https://github.com/teodor-r/two_body

Процесс решения задачи

- Построение математической модели заданного физического процесса
- Компьютерное моделирование процесса при помощи построенной математической модели
- Нахождение аппромиксимированной зависимости при помощи численных методов

Полученные результаты

При решении задачи о движении тел, брошенного под углом к горизонту, использовались такие физические законы, как: II закон Ньютона, закон всемирного тяготения.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

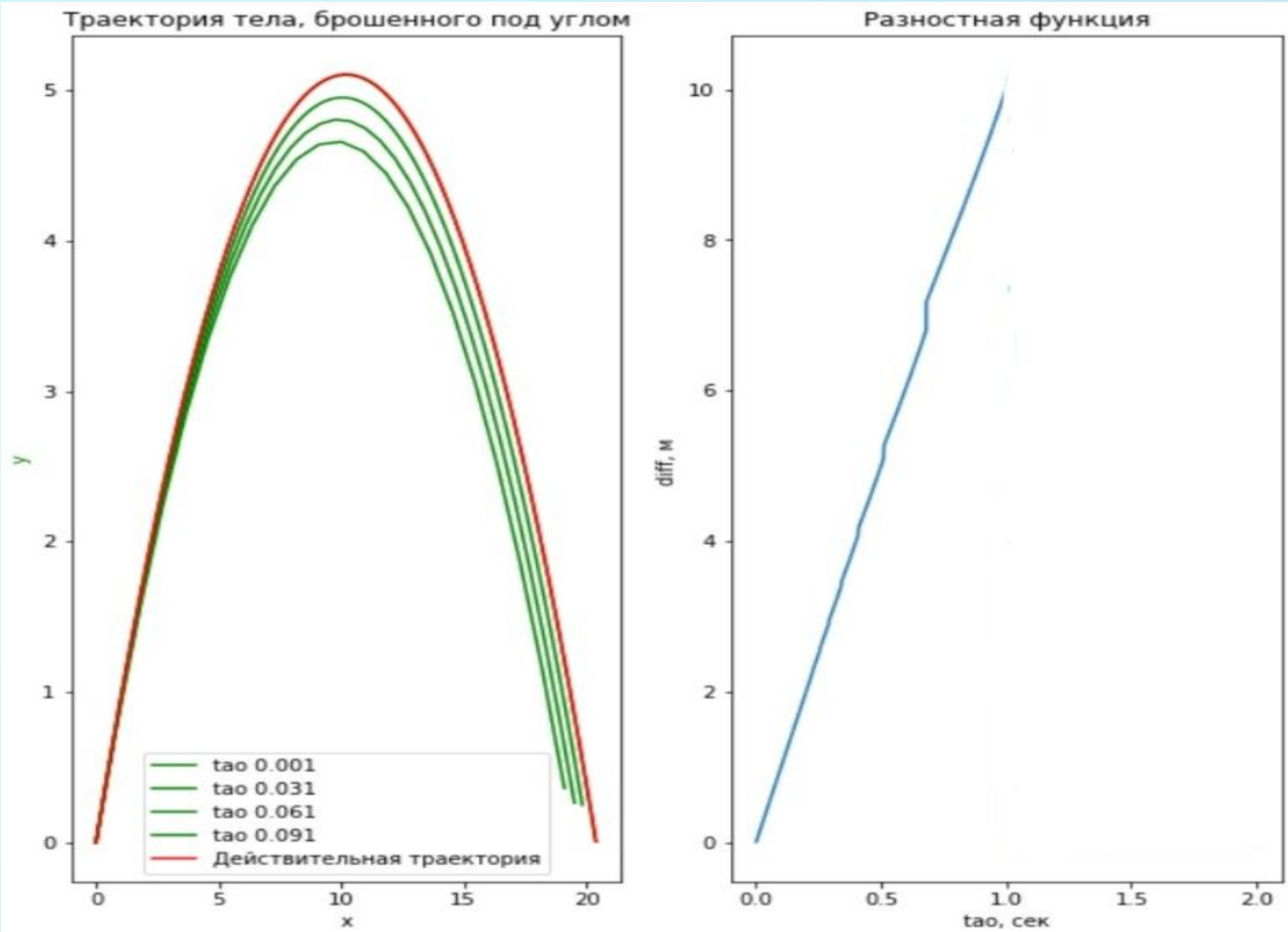
При решении использовалась явная схема Эйлера: был взят бесконечно малый промежуток времени, и для каждого значения искалось приращение радиус — вектора.

$$\vec{r_{n+1}} = \vec{r_n} + \tau\vec{v}$$

Получаем зависимость радиус — вектора от времени
на выбранной временной сетке.

$$\vec{r_{n+1}} = \vec{r_n} + \tau(\vec{v_0} + \vec{g} \cdot t_n)$$

Полученные результаты



Полученные результаты

Далее была решена задача, в которой рассматривается два тела, одно из которых покоится,
А другое движется под действием сил тяготения. В решении этой задачи были также использованы II закон Ньютона и закон всемирного тяготения.

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{F} = m\vec{w}$$

$$\vec{w} = -\gamma M \frac{\vec{r}}{r^3}$$

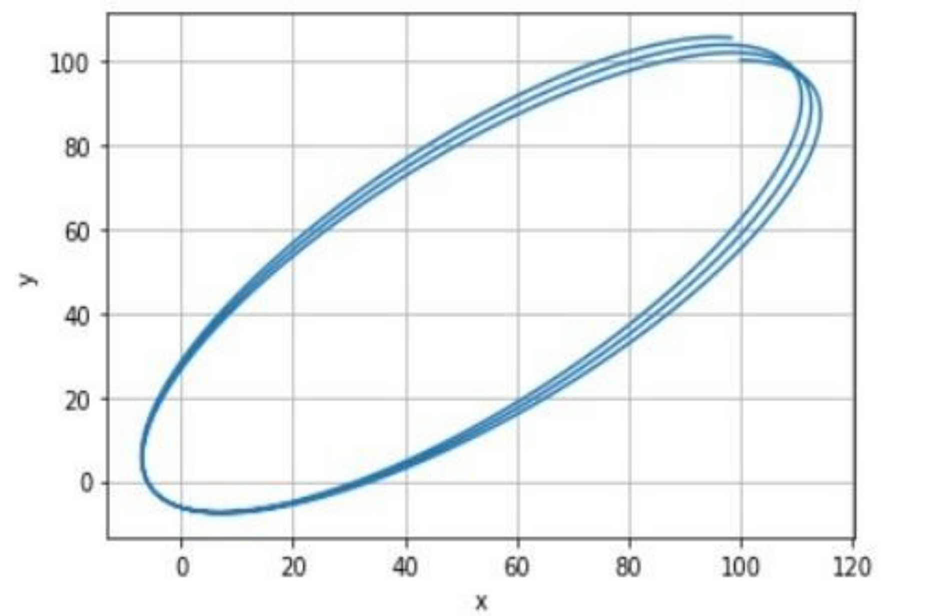
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \int \vec{w} dt = -\gamma M \int \frac{\vec{r}}{r^3} dt$$

Далее, при помощи явной схемы Эйлера была получена сеточная зависимость радиус — вектора от времени.

$$\frac{\vec{r_{n+1}} - \vec{r_n}}{\tau} = \vec{v}(\vec{r_n}, t_n)$$

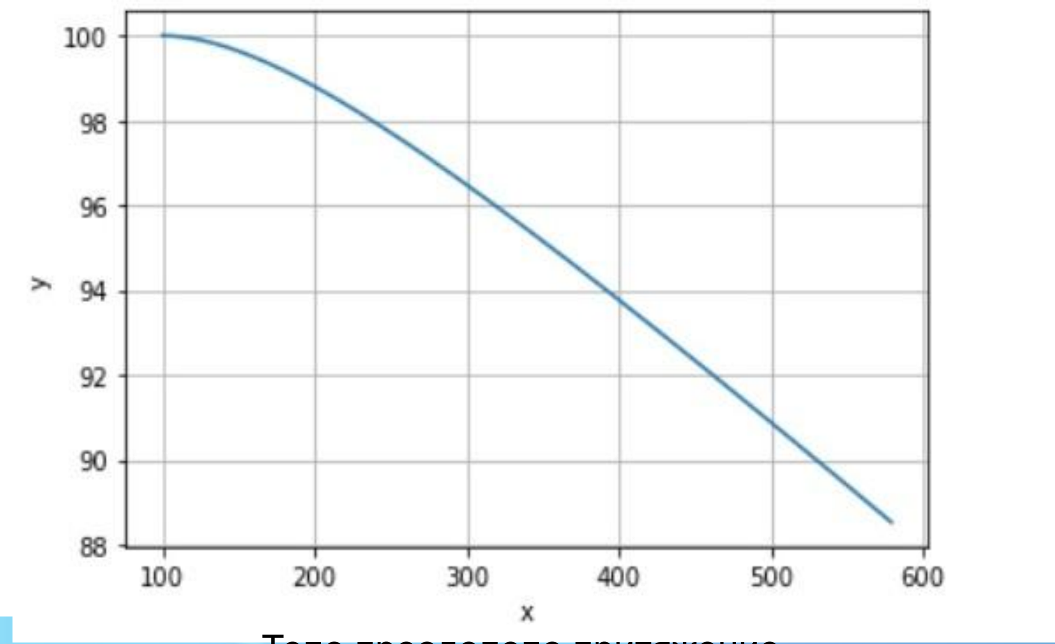
$$\vec{r_{n+1}} = (-\gamma M \sum_{i=0}^{n} \frac{\vec{r_i}}{r_i^3}\tau + v_0)\tau + r_n$$

Полученные результаты



Тело движется в поле действия второго тела

Координаты неподвижного тела	(0,0)
Начальные координаты подвижного тела	(100,100)
Начальная скорость	(10, 0)
Масса неподвижного тела	100000



Тело преодолело притяжение второго тела
и удаляется от него

Координаты неподвижного тела	(0, 0)
Начальные координаты подвижного тела	(100,100)
Начальная скорость	(100, 0)
Масса неподвижного тела	100000

Задачи, которые предстоит решить

В данный момент мы решаем, так называемую, задачу двух тел. Её формулировка следующая: даны два тела, их массы, начальные скорости и радиус-векторы. Между телами действует лишь сила гравитационного притяжения. Требуется отыскать зависимость положения обеих тел от времени.

Для решения данной задачи был выбран классический метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Задача двух тел

$$2h \cdot (c)^2 = \chi^2((e)^2 - 1).$$

$$yz' - zy' = c_1, \qquad zx' - xz' = c_2, \qquad xy' - yx' = c_3$$

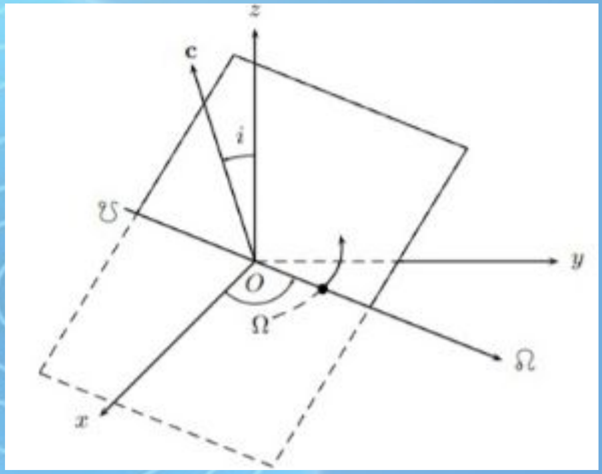
Поворот пространства

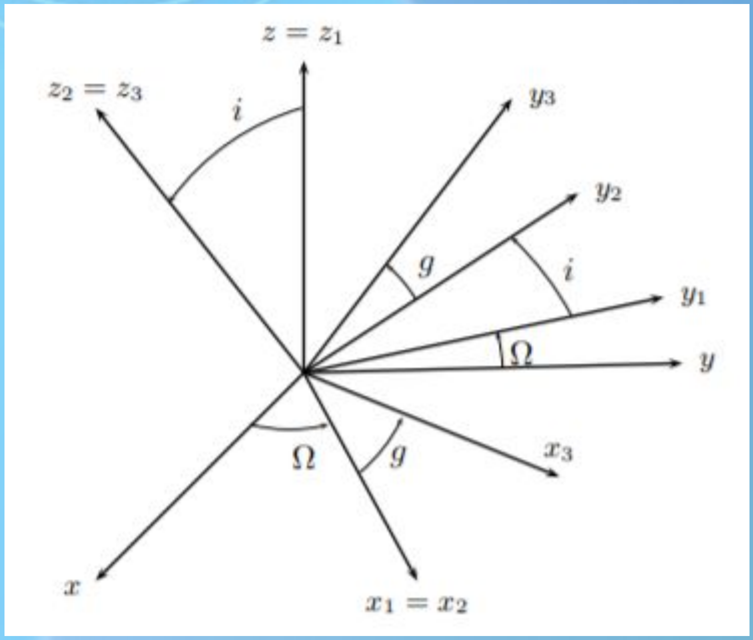
При аналитическом решении мы используем повороты пространства:

i : $\cos(i) = \frac{(\vec{c}, \vec{z})}{|\vec{c}|}$ - наклонение

Ω : угол между линией узлов и осью 0x

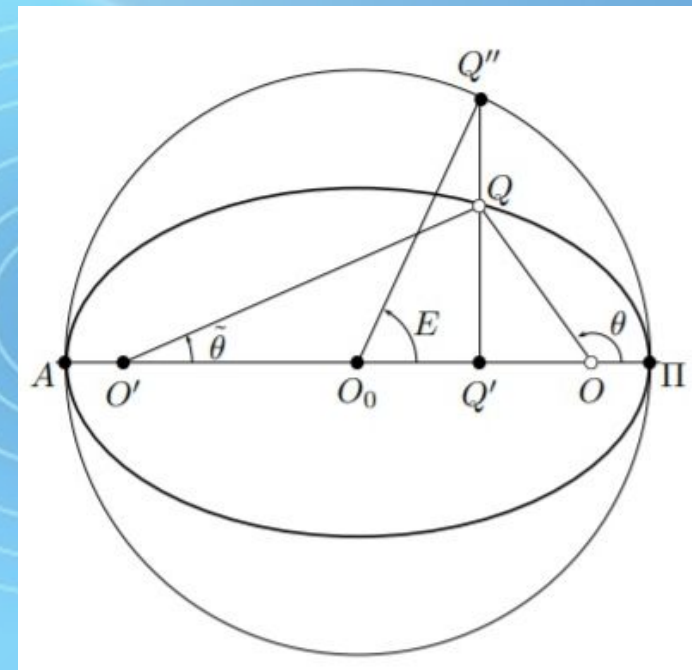
g : угол поворота 0x для совпадения с перицентром

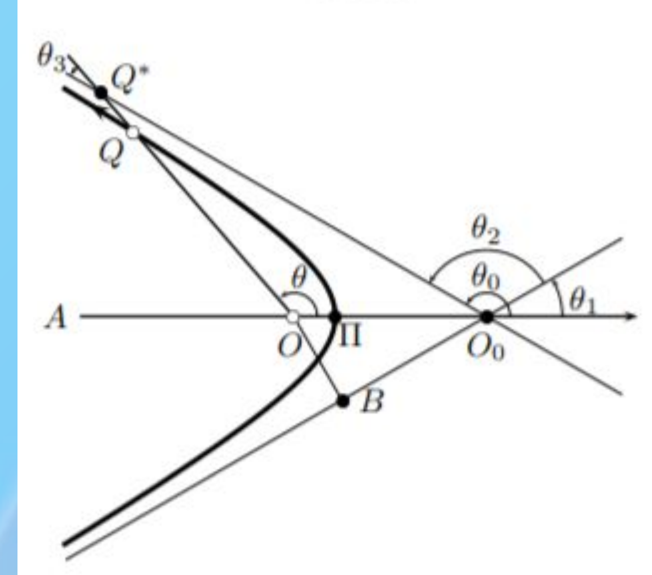




Виды траекторий движения

Эллиптическая траектория движения тел





Гиперболическая траектория

Связь эксцентричной аномалии с истинной

Имеем выражение для истинной и эксцентричной аномалии:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}.$$

Дифференцируем его:

$$\dot{E} = \frac{\varkappa \sin\theta}{a^{3/2}\sqrt{1-e^2}\sin E} = \frac{\varkappa a^{-3/2}}{1 - e\cos E},$$

Переписываем полученное выражение, где n константа для средней аномалии:

$$(1 - e\cos E)\,dE = n\,dt,$$

Интегрируем полученное выражение, получаем (M – средняя аномалия):

$$E - e\sin E = M,$$

$$M = n(t - T)$$

Далее переписываем и решаем это уравнение просто рекуррентно с начальной подстановкой E0 = M:

$$f(E) = M + e\sin E$$

Метод Рунге-Кутты

По своей сути, задача двух тел – один из случаев задачи Коши, рассмотренной ранее. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка – один из методов решения таких задач.

$$y' = f(x, y)$$

$$\mathrm{y}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{y}_0$$

Метод Рунге-Кутты заключается в использовании следующей итерационной формулы (h – величина разбиения сетки):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}. y_n + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Классический метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на каждом шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$

Явные методы Рунге-Кутта

Семейство явных методов Рунге — Кутты является обобщением как явного метода Эйлера, так и классического метода Рунге — Кутты четвёртого порядка. h – величина разбиения сетки по x.

$$y_{n+1} = y_n + \; h\sum_{i=1}^{s} b_i \cdot k_i$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n),\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(x_n + c_2 h, \mathbf{y}_n + a_{21} h \mathbf{k}_1),\\
&\cdots\\
\mathbf{k}_s &= \mathbf{f}(x_n + c_s h, \mathbf{y}_n + a_{s1} h \mathbf{k}_1 + a_{s2} h \mathbf{k}_2 + \cdots + a_{s,s-1} h \mathbf{k}_{s-1})
\end{aligned}$$

Коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} можем найти по формулам из таблицы, приведенной справа. Такую упорядоченную таблицу называют таблицей Батчера.

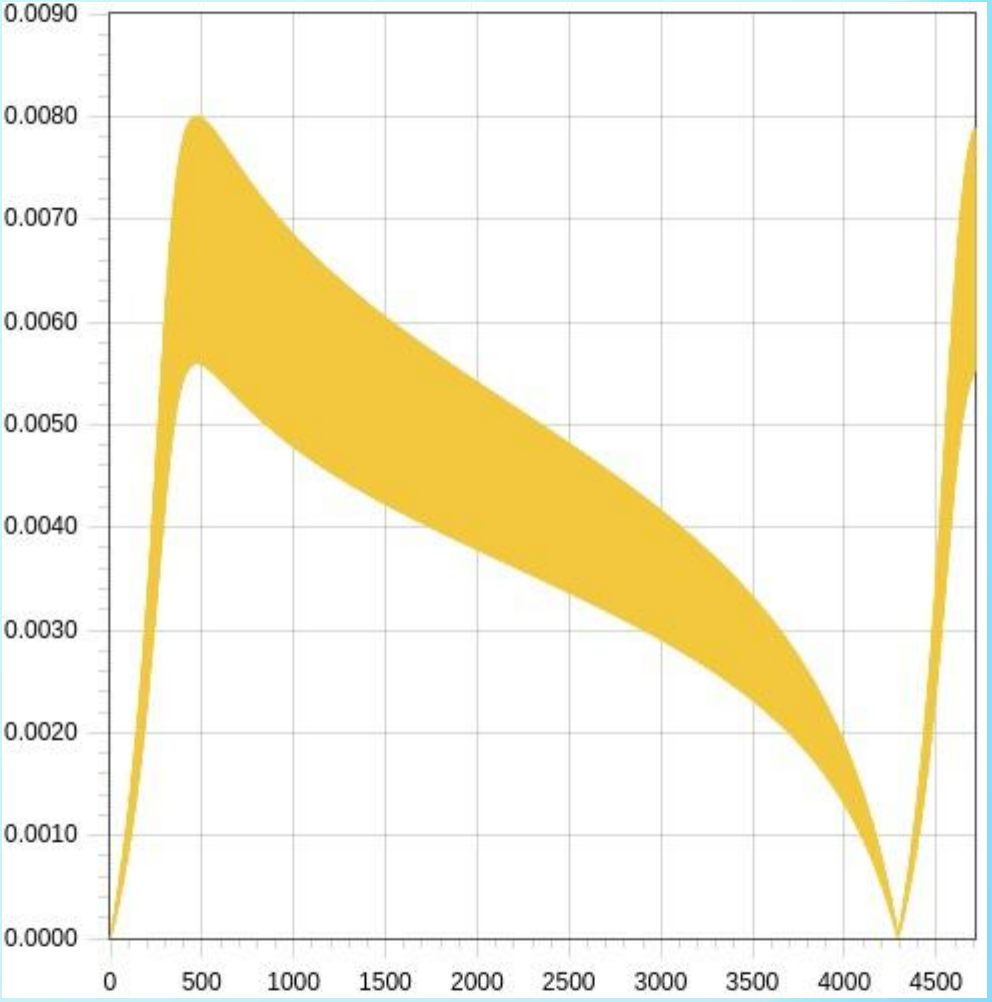
$$\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

Метод Рунге - Кутты с автоматическим выбором шага

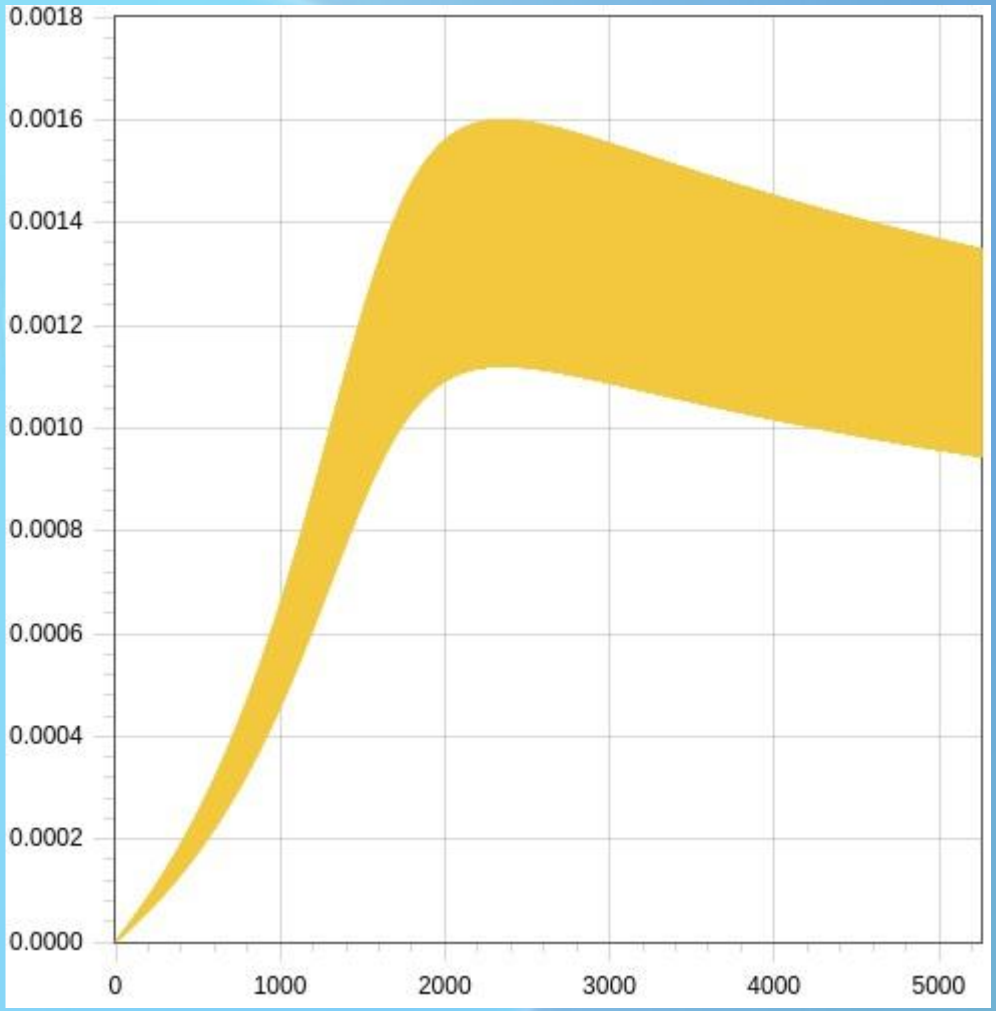
Пусть $y(x, h)$ - приближенное значение решения с порядком точности p в точке x с шагом по сетке h. Тогда можно рассмотреть погрешность данного решения, используя приближенное решение с удвоенным шагом $y(x, 2h)$ того же порядка p. Выберем величину ε - положительный параметр, обозначающий погрешность:

$$\left|\frac{y(x,h)-y(x,2h)}{2^p-1}\right| \leq \varepsilon$$

Для автоматического выбора шага в программе заранее задается значение ε, и на каждом шаге подбирают такое h, что выполняется данное выше неравенство.



$h = 5 \cdot 10^{-4}$



$h = 1 \cdot 10^{-4}$

Оптимизация траекторий

проектирования траектории, ко-
торый сводит к минимуму (или
максимизирует) некоторую
меру производительности при
соблюдении набора
ограничений.

Прямой метод решения задач оптимизации

оптимизации траектории, преобразовав ее в задачу оптимизации с ограниченными параметрами.

2) Решить эту задачу оптимизации.

Примеры прямых методов

Многократная стрельба – ограничение дефекта на множестве сегментов изначальной области решения

Планы на ближайшее время

Построение оптимальной траектории для тела, начинающего движение от Земли до Марса с учетом лишь сил притяжения со стороны Солнца.