

# Функционалы Минковского цифровых пространств

Выполнил студент 4 курса бакалавриата, 471 группы  
Бондарь А.В.  
Научный руководитель доц. Оскорбин Д.Н.  
Барнаул 2021 Г



# Введение

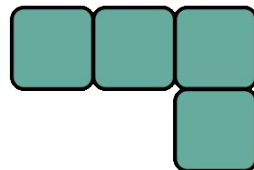
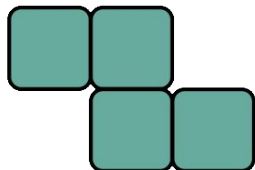
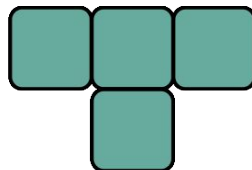
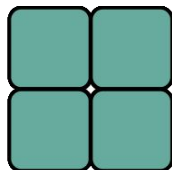
Изучение функционалов Минковского на сегодняшний день актуально и востребовано, так как они являются достаточно точным инструментом моделирования и изучения пористых сред. Их можно использовать при срезках томографа любого черно-белого изображения объекта реального мира [1, 2, 3].

Для наиболее точного описания и дальнейшей характеристики пористой структуры используется двумерное цифровое пространство.

В данной работе изучается алгоритм вычисления некоторых функционалов Минковского для цифровых пространств. Таким образом, можно наиболее точно дать характеристику пористой структуре, имея только начальное бинарное изображение.



# Понятие двумерного цифрового пространства



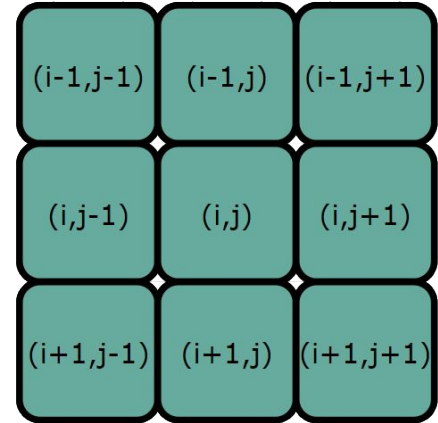
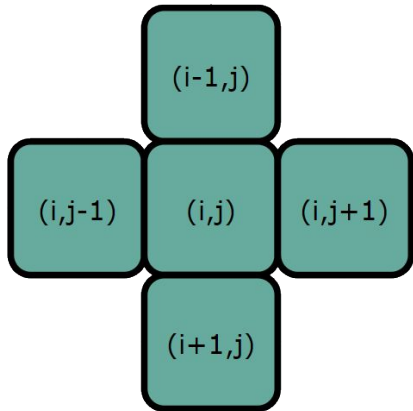


Двумерным цифровым пространством называют сетку, ячейки которой принимают значения: “0” - в ячейке нет элемента (белый цвет ячейки), “1” - в ячейке есть элемент (черный цвет ячейки). Тогда совокупность черных и белых ячеек образует изображение в двумерном цифровом пространстве.

Двумерное цифровое пространство задается как совокупность 0 и 1 (матричное представление двумерного цифрового пространства).

Элементы данного пространства называются пикселями в размерности 2 и вокселями в размерности 3.

# Понятие 4-связности и 8-связности





## Разница между типами связности

### 8 - СВЯЗНОСТЬ:

Каждый пиксель может иметь не более 8 соседей. При таком способе соседом считается тот пиксель, между которым есть общая вершина или ребро с рассматриваемым пикселем.

### 4 - СВЯЗНОСТЬ:

Каждый пиксель имеет не более 4 соседей. Соседом считается тот пиксель, между которым есть общее ребро.



# Вычисление эйлеровой характеристики цифровых пространств



Эйлерова характеристика для конечного клеточного комплекса определена как знакопеременная сумма

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 - \dots,$$

где  $k_i$  число клеток размерности  $i$ .

Для цифрового пространства эйлерова характеристика считается по формуле:

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n(n=2)} (-1)^i c_i,$$

где  $c_0$  – число вершин,  $c_1$  – число элементарных ребер,  $c_2$  – число пикселей, входящих в  $K$  с учетом связности. Доказательство данного факта приведено в источнике [4]

В двумерном цифровом пространстве существуют области вида:


$$U = \{(x, y) \in R^2 | i - \frac{1}{2} < x < i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} < y < j + \frac{1}{2}\},$$

которые моделируют окрестность целочисленной точки. Каждой такой окрестности сопоставляется бинарная матрица  $a(U_{i,j})$ : «0» – пустая область, «1» – область, в которой находится пиксель.



Вокруг точки  $(i, j)$  - возникает шесть различных типов точек  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .

$c(U_{i,j})$	$a(U_{i,j})$	$4\chi^{(8)}$	$4\chi^{(4)}$
0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	0
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1	1
2	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	0	0
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	-2	2
4	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	-1	-1
5	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	0



Для каждой вершины мы считаем число  $\chi_{i,j}^{(k)} = 1 - \frac{(c_1)_{i,j}}{2} + \frac{(c_2)_{i,j}}{4}$ , где  $(c_1)_{i,j}$  и  $(c_2)_{i,j}$  — число ребер и пикселей, входящих в данную целочисленную вершину  $(i,j)$ , соответственно, посчитанные с учетом типа связанности. Результаты вычислений представлены в таблице. Итоговая эйлерова характеристика цифрового изображения получается следующим образом:  $\chi(K) = \sum_{i,j \in Z} \chi_{i,j}$ .

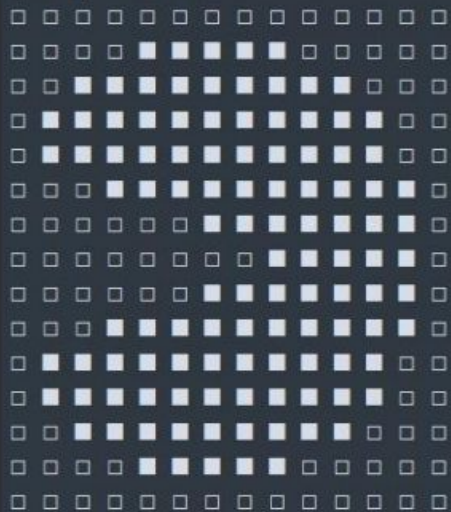
Рассмотрим примеры работы алгоритма. Для этого зададим произвольное множество двумерного цифрового пространства в виде бинарной матрицы.

Для начала рассмотрим «бублик». В «бублике» есть отверстие в середине из чего мы можем сделать вывод, что его эйлерова характеристика будет равна 0 для любого типа связности.

```
| Hi^4 | --> 0  
| Hi^8 | --> 0  
| S | --> 40  
| P | --> 48  
  
□ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □  
□ □ ■ ■ ■ ■ ■ □ □  
□ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □  
□ ■ ■ □ □ □ □ ■ ■ □  
□ ■ ■ □ □ □ □ ■ ■ □  
□ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □  
□ □ ■ ■ ■ ■ ■ □ □  
□ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ □ □  
[Finished in 166ms]
```

Следующим объектом будет «Распан». Данный объект с точки зрения связности в топологии ничем не примечателен и эйлерова характеристика в таком случае равна 1.

```
| Hi^4 | --> 1  
| Hi^8 | --> 1  
| S | --> 111  
| P | --> 64
```



```
[Finished in 172ms]
```

Далее разберем более интересный объект «Смайл», у которого есть 3 отверстия внутри. Результаты программы для такого изображения будут следующими:

```
| Hi^4 | --> -2  
| Hi^8 | --> -2  
| S | --> 79  
| P | --> 86  
  
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □ □  
□ □ □ ■ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □  
□ □ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □  
□ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ □  
□ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ □  
□ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ □  
□ ■ ■ □ □ □ □ □ □ □ ■ ■ □  
□ □ ■ ■ ■ □ □ □ ■ ■ ■ □ □  
□ □ □ ■ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □  
□ □ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
[Finished in 167ms]
```







## Заключение

Мы проверили работу алгоритма на наглядных примерах бинарных изображений и убедились в точности вычислений. Алгоритм был разработан с использованием результатов работ [4, 5].

Дальнейшее развитие работы предполагает написание алгоритма для большей размерности пространства.





# Список литературы

1. C.H. Arns, M.A. Knackstedt, K.R. Mecke. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures // Colloids and Surfaces A. — 2015. — Т.24. — С.352 – 359.
2. C.H. Arns, M.A. Knackstedt, W.V. Pinczewski, and K.R. Mecke. Euler – Poincare’ characteristics of classes of disordered media // Cambridge University Press. — 2004.
3. K. R. Mecke, Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of Minkowski Functionals in Statistical Physics in Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin, 2000), Vol. 554, pp. 100 – 130.
4. Базайкин Я. В. Лекции по вычислительной топологии: Учебно – метод. пособие // Новосиб. гос. ун – т — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. – 57с.
5. Любанович Билл. Простой Python. Современный стиль программирования. — СПб.: Питер, 2016. — 480 с.: ил. — (Серия «Бестселлеры O’Reilly»).
6. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бэтти. Издательство иностранной литературы // Москва, 1957 г. – 152 с.
7. Богоявленская О. А. О вычислении функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений // Научно - исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020. – 170с.