

Функционалы Минковского цифровых пространств

Выполнил студент 4 курса бакалавриата, 471 группы
Бондарь А.В.
Научный руководитель доц. Оскорбин Д.Н.
Барнаул 2021 Г



Введение

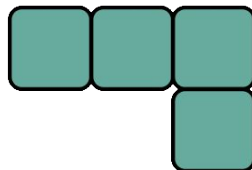
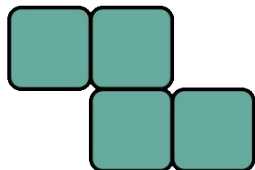
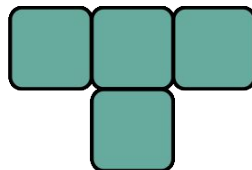
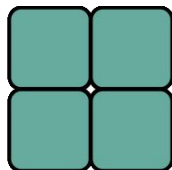
Изучение функционалов Минковского на сегодняшний день актуально и востребовано, так как они являются достаточно точным инструментом моделирования и изучения пористых сред. Их можно использовать при срезках томографа любого черно-белого изображения объекта реального мира [1, 2, 3].

Для наиболее точного описания и дальнейшей характеристики пористой структуры используется двумерное цифровое пространство.

В данной работе изучается алгоритм вычисления некоторых функционалов Минковского для цифровых пространств. Таким образом, можно наиболее точно дать характеристику пористой структуре, имея только начальное бинарное изображение.



Понятие двумерного цифрового пространства



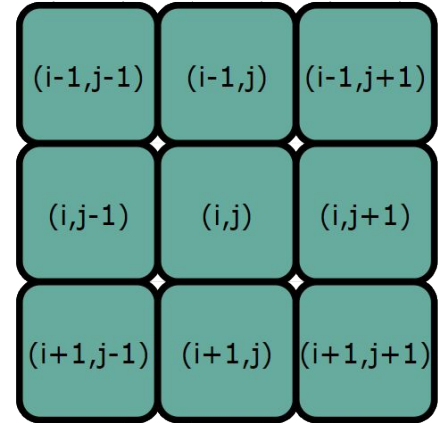
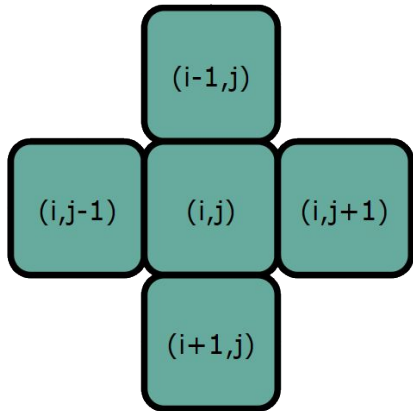


Двумерным цифровым пространством называют сетку, ячейки которой принимают значения: “0” - в ячейке нет элемента (белый цвет ячейки), “1” - в ячейке есть элемент (черный цвет ячейки). Тогда совокупность черных и белых ячеек образует изображение в двумерном цифровом пространстве.

Двумерное цифровое пространство задается как совокупность 0 и 1 (матричное представление двумерного цифрового пространства).

Элементы данного пространства называются пикселями в размерности 2 и вокселями в размерности 3.

Понятие 4-связности и 8-связности





Разница между типами связности

8 - СВЯЗНОСТЬ:

Каждый пиксель может иметь не более 8 соседей. При таком способе соседом считается тот пиксель, между которым есть общая вершина или ребро с рассматриваемым пикселем.

4 - СВЯЗНОСТЬ:

Каждый пиксель имеет не более 4 соседей. Соседом считается тот пиксель, между которым есть общее ребро.



Вычисление эйлеровой характеристики цифровых пространств



Эйлерова характеристика для конечного клеточного комплекса определена как знакопеременная сумма

$$\chi = k_0 - k_1 + k_2 - \dots,$$

где k_i число клеток размерности i .

Для цифрового пространства эйлерова характеристика считается по формуле:

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n(n=2)} (-1)^i c_i,$$

где c_0 – число вершин, c_1 – число элементарных ребер, c_2 – число пикселей, входящих в K с учетом связности. Доказательство данного факта приведено в источнике [4]


В двумерном цифровом пространстве существуют области вида:

$$U = \{(x, y) \in R^2 | i - \frac{1}{2} < x < i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2} < y < j + \frac{1}{2}\},$$

которые моделируют окрестность целочисленной точки. Каждой такой окрестности сопоставляется бинарная матрица $a(U_{i,j})$: «0» – пустая область, «1» – область, в которой находится пиксель.

Вокруг точки (i, j) - возникает шесть различных типов точек $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

$c(U_{i,j})$	$a(U_{i,j})$	$4\chi^{(8)}$	$4\chi^{(4)}$
0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	0	0
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	1	1
2	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	0	0
3	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	-2	2
4	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	-1	-1
5	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	0	0



Для каждой вершины мы считаем число $\chi_{i,j}^{(k)} = 1 - \frac{(c_1)_{i,j}}{2} + \frac{(c_2)_{i,j}}{4}$, где $(c_1)_{i,j}$ и $(c_2)_{i,j}$ — число ребер и пикселей, входящих в данную целочисленную вершину (i,j) , соответственно, посчитанные с учетом типа связанности. Результаты вычислений представлены в таблице. Итоговая эйлерова характеристика цифрового изображения получается следующим образом: $\chi(K) = \sum_{i,j \in Z} \chi_{i,j}$.

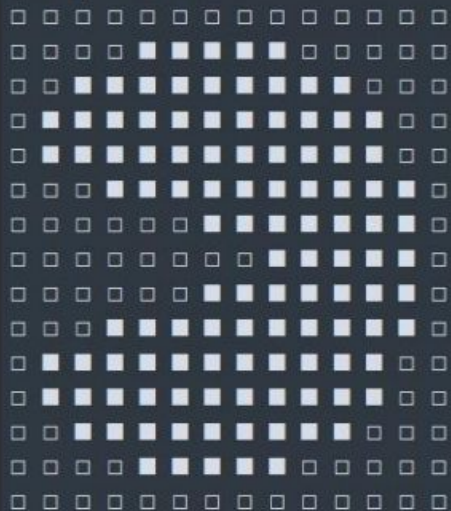
Рассмотрим примеры работы алгоритма. Для этого зададим произвольное множество двумерного цифрового пространства в виде бинарной матрицы.

Для начала рассмотрим «бублик». В «бублике» есть отверстие в середине из чего мы можем сделать вывод, что его эйлерова характеристика будет равна 0 для любого типа связности.

```
| Hi^4 | --> 0  
| Hi^8 | --> 0  
| S | --> 40  
| P | --> 48  
  
□ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □  
□ □ ■ ■ ■ ■ ■ □ □  
□ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □  
□ ■ ■ □ □ □ □ ■ ■ □  
□ ■ ■ □ □ □ □ ■ ■ □  
□ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □  
□ □ ■ ■ ■ ■ ■ □ □  
□ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ □ □  
[Finished in 166ms]
```

Следующим объектом будет «Распан». Данный объект с точки зрения связности в топологии ничем не примечателен и эйлерова характеристика в таком случае равна 1.

```
| Hi^4 | --> 1  
| Hi^8 | --> 1  
| S | --> 111  
| P | --> 64
```



```
[Finished in 172ms]
```

Далее разберем более интересный объект «Смайл», у которого есть 3 отверстия внутри. Результаты программы для такого изображения будут следующими:

```
| Hi^4 | --> -2
| Hi^8 | --> -2
| S | --> 79
| P | --> 86

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
□ □ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □
□ □ □ ■ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □
□ □ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □
□ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ □
□ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ □
□ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ □
□ ■ ■ □ □ ■ ■ ■ □ □ ■ ■ □
□ ■ ■ □ □ □ □ □ □ □ ■ ■ □
□ □ ■ ■ ■ □ □ □ ■ ■ ■ □ □
□ □ □ ■ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □
□ □ □ □ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □
[Finished in 167ms]
```


Последним примером возьмем следующий символ из четырех компонентов. С точки зрения 4 – связности, его эйлера характеристика будет равна 4, а с точки зрения 8 – связности будет равна 0.

```
| Hi^4 | --> 4  
| Hi^8 | --> 0  
| S | --> 64  
| P | --> 88  
  
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ ■ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ ■ ■ □ □ □ □ □ □ ■ □ □ □ □  
□ □ ■ ■ ■ □ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ □ □  
□ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ □ □  
□ □ ■ ■ ■ □ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ □ □  
□ □ □ ■ ■ □ □ □ □ □ □ ■ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ ■ ■ ■ ■ ■ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ ■ ■ ■ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ ■ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
[Finished in 177ms]
```



Заключение

Мы проверили работу алгоритма на наглядных примерах бинарных изображений и убедились в точности вычислений. Алгоритм был разработан с использованием результатов работ [4, 5].

Дальнейшее развитие работы предполагает написание алгоритма для большей размерности пространства.



Список литературы

1. C.H. Arns, M.A. Knackstedt, K.R. Mecke. Characterisation of irregular spatial structures by parallel sets and integral geometric measures // Colloids and Surfaces A. — 2015. — Т.24. — С.352 – 359.
2. C.H. Arns, M.A. Knackstedt, W.V. Pinczewski, and K.R. Mecke. Euler – Poincare’ characteristics of classes of disordered media // Cambridge University Press. — 2004.
3. K. R. Mecke, Additivity, Convexity, and Beyond: Applications of Minkowski Functionals in Statistical Physics in Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin, 2000), Vol. 554, pp. 100 – 130.
4. Базайкин Я. В. Лекции по вычислительной топологии: Учебно – метод. пособие // Новосиб. гос. ун – т — Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2017. – 57с.
5. Любанович Билл. Простой Python. Современный стиль программирования. — СПб.: Питер, 2016. — 480 с.: ил. — (Серия «Бестселлеры O’Reilly»).
6. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бэтти. Издательство иностранной литературы // Москва, 1957 г. – 152 с.
7. Богоявленская О. А. О вычислении функционалов Минковского четырехмерных цифровых изображений // Научно - исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, 2020. – 170с.